Curs 4

Serii numerice

4.1 Serii convergente. Serii divergente

Definiţia 4.1.1 *Fiind dat un şir de numere reale (x_n), cuplul format din şirurile (x_n) şi (S_n), unde*

$$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

se numeşte ***serie*** *de termen general x_n. Şirul (S_n) se numeşte* ***şirul sumelor parţiale*** *asociat şirului (x_n).*

Vom nota o serie prin

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \text{ sau } \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \text{ sau } x_0 + x_1 + ... + x_n + ... \text{ sau, simplu, } \sum x_n$$

Definiţia 4.1.2 *1. Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este* ***convergentă*** *dacă şirul sumelor parţiale (S_n) asociat lui (a_n) este convergent în $\mathbb{R}$. În acest caz,*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

se numeşte ***suma seriei*** *şi o vom nota prin $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sau $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, sau $x_0 + x_1 + ... + x_n + ...$*

2. Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este ***divergentă*** *dacă şirul sumelor parţiale, (S_n), este divergent.*

Observaţia 4.1.3 *1. Prin notaţia $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ vom înţelege fie seria cu termenul general x_n, fie suma seriei, la ce anume se face referire reieşind din context.*

2. Uneori seria nu va fi indexată de la 0, ci de la un număr natural n_0 : $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} x_n$. Convenim să notăm tot prin S_n suma termenilor până la cel de rang n: $S_n = x_{n_0} + ...x_n$.

3. Faptul că o serie este convergentă sau divergentă îl vom numi ***natura seriei.***

Exemplul 4.1.4 (seria geometrică) Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ poartă numele de **serie geometrică** (termenul general al seriei provine dintr-o serie geometrică în care primul termen are valoare

a iar raţia este egală cu q). Această serie este convergentă pentru orice q astfel încât $|q| < 1$. Suma seriei este, în acest caz,

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Exemplul 4.1.5 Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă. Aceasta pentru că şirul sumelor parţiale poate fi scris:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

deci

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

iar de aici vedem că $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, adică şirul sumelor parţiale este convergent.

Exemplul 4.1.6 (seria telescopică) Ca o generalizare pentru exemplul anterior, dacă termenul general al unei serii $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ poate fi scris sub forma

$$x_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o **serie telescopică**. Se observă că şirul sumelor parţiale este dat de: $S_n = \alpha_1 - \alpha_n$ şi deci seria este convergentă dacă şi numai dacă (α_n) este un şir convergent, caz în care

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha_1 - \lim_{n\to\infty} \alpha_n.$$

Exemplul 4.1.7 Seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ este divergentă. Şirul sumelor parţiale este dat de

$$S_{2n} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{iar } S_{2n+1} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplul 4.1.8 (seria armonică) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, numită **seria armonică** deoarece fiecare termen este media armonică a termenilor învecinaţi, este divergentă. Şirul sumelor parţiale este dat de:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

şi am vazut în cursul precedent că acesta este un şir divergent (are limita $+\infty$).

Exemplele de mai sus prezintă şi serii pentru care putem preciza şi suma acestora. În general, asemenea situaţii sunt destul de rare, aşa că ne vom axa în special pe a stabili natura unei serii, fără a găsi, efectiv suma seriei.

4.2 Proprietăţi generale

Teorema 4.2.1 *Dacă unei serii i se adaugă sau i se suprimă un număr finit de termeni, atunci natura seriei nu se schimbă.*

Demonstraţie. Să presupunem că dintr-o serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ am eliminat un număr finit de termeni. Fie aceştia $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_p}$, cu $n_1 \leq n_2 ... \leq n_p$. Atunci, pentru orice $n \geq n_p$ avem $T_n = S_n - s$, unde cu (S_n) am notat şirul sumelor parţiale pentru seria iniţială, (T_n) este şirul sumelor parţiale pentru seria nou obţinută iar

$$s = x_{n_1} + x_{n_2} + ... + x_{n_p}.$$

Numărul s fiind o constantă, natura şirului (T_n) nu va depinde de acesta. În consecinţă, (T_n) este convergent dacă şi numai dacă (S_n) este convergent. În plus, în caz de convergenţă avem

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} S_n - s,$$

adică suma seriei nou obţinută se modifică cu suma finită a termenilor care se elimină.

Se raţionează similar pentru situaţia în care adăugăm seriei un număr finit de termeni.□

Teorema 4.2.2 (condiţia necesară de convergenţă) *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este o serie convergentă, atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstraţie. Fie $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Din relaţia evidentă $x_n = S_n - S_{n-1}$ obţinem, prin trecere la limită:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$ □

Corolarul 4.2.3 *Dacă termenul general al unei serii nu este convergent la* 0*, atunci seria este divergentă.*

Observaţia 4.2.4 *Condiţia ca* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *este una necesară, nu şi suficientă pentru ca seria* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *să fie convergentă. De exemplu, seria armonică* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *este divergentă, deşi* $\frac{1}{n} \to 0$.

Analizând din nou Exemplul 4.1.7, putem spune imediat că $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ *este divergentă, deoarece termenul general nu are limită.*

Teorema 4.2.5 (operaţii cu serii convergente) *Considerăm seriile* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *şi numărul real nenul* λ.

1. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt convergente, atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ *este convergentă şi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

2. *Seriile* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x_n)$ *au aceeaşi natură.*

Demonstraţie. 1. Notând cu S_n, T_n, U_n şirurile sumelor parţiale pentru seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ şi, respectiv, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ avem

$$U_n = S_n + T_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Din proprietăţile şirurilor convergente, rezultă că (U_n) este convergent şi că $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n + \lim\limits_{n\to\infty} T_n$, ceea ce spune că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$.

2. Rezultă imediat din faptul că pentru orice număr real nenul λ un şir oarecare (x_n) are aceeaşi natură cu şirul (λx_n). □

Observaţia 4.2.6 *Bineînţeles, dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt serii divergente, se poate întâmpla ca seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ să fie una convergentă. De exemplu, este cazul seriilor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}$. După cum am văzut anterior, acestea sunt serii divergente, dar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n + (-1)^{n-1}\right]$ este convergentă.*

Teorema 4.2.7 (Criteriul lui Cauchy) *Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \in \mathbb{N}^*$, să avem*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. O serie converge dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale, (S_n) este convergent, ceea ce este echivalent cu faptul că (S_n) este şir Cauchy, adică

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Dar $S_{n+p} - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}$ şi demonstraţia este completă. □

4.3 Serii cu termeni pozitivi

În această parte ne vom ocupa de seriile cu termeni pozitivi. Aceste serii au proprietatea că şirul sumelor parţiale este crescător:

$$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0.$$

Astfel, o serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale este majorat. Altfel spus, pentru serii cu termeni pozitivi mărginirea şirului sumelor parţiale este un criteriu suficient pentru convergenţă. Pe parcurs vom compara diferite serii cu unele a căror natură este cunoscută.

Teorema 4.3.1 (Criteriul de comparaţie de speţa I) *Fie seriile cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ astfel încât $x_n \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.*
2. *Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.*

Demonstraţie. Fie $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ şi $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k$ pentru $n \in \mathbb{N}$. Din $x_n \le y_n$ pentru orice n rezultă că $S_n \le T_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

1. Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci T_n este majorat, deci şi S_n este majorat şi atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci şirul S_n este nemajorat şi atunci nici şirul T_n nu este majorat, deci, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă. □

Exemplul 4.3.2 1. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, cu $\alpha < 1$ este divergentă. Este suficient să remarcăm că pentru $\alpha < 1$ avem

$$\frac{1}{n^\alpha} \ge \frac{1}{n}.$$

Dar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă şi atunci, conform criteriului de comparaţie I rezultă ca şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este divergentă.

2. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă. Într-adevăr,

$$\frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n \ge 2$$

şi cum seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ este convergentă, rezultă că şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Mai departe, pentru orice $\alpha > 2$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă.

Teorema 4.3.3 (Criteriul de comparaţie de speţa a II-a) *Fie seriile cu termeni strict pozitivi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *astfel încât*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \le \frac{y_{n+1}}{y_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Înmulţind relaţiile

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \le \frac{y_{k+1}}{y_k}, \quad \text{pentru } k = \overline{1, n-1}$$

obţinem

$$\frac{x_n}{x_1} \le \frac{y_n}{y_1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

sau, echivalent,

$$x_n \le \frac{x_1}{y_1} y_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicând acum criteriul de comparaţie I şi Teorema 4.2.5, obţinem rezultatul dorit. □

Teorema 4.3.4 (Criteriul de comparaţie cu limită) *Fie seriile cu termeni strict pozitivi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

1. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lambda \in (0,\infty)$, *atunci cele două serii au aceeaşi natură.*

2. Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, *atunci dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă rezultă că şi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă, iar dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă.*

3. Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$, *atunci dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă rezultă că şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, iar dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lambda \in \mathbb{R}$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$\lambda - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < \lambda + \varepsilon.$$

1. Pentru $\lambda > 0$, alegem $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$ şi atunci

$$\frac{\lambda}{2} < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3\lambda}{2}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Afirmaţia rezultă acum din Criteriul de comparaţie de speţa I şi Teorema 4.2.5.
2. Dacă $\lambda = 0$ atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem

$$-\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < \varepsilon.$$

Ţinem cont că $x_n > 0$ şi $y_n > 0$ şi obţinem $x_n < \varepsilon y_n$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Concluzia urmează din nou din criteriul de comparaţie de speţa I şi Teorema 4.2.5.
3. Demonstraţia este complet analoagă cu cea pentru punctul 2, dacă avem în vedere că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0. \qquad \square$$

Exemplul 4.3.5 Folosind acest criteriu, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ este divergentă. Într-adevăr, considerând seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

deci cele două serii au aceeaşi natură. Ştim însă că seria armonică este divergentă.

Teorema 4.3.6 (Cauchy: criteriul condensării) *Fie* (x_n) *un şir descrescător de numere pozitive. Atunci seria* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *are aceeaşi natură cu seria* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n} = x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8a_8 + \ldots$

Demonstraţie. Notăm cu (T_n) şirul sumelor parţiale pentru seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$. Fiecare număr natural nenul se află între două puteri consecutive ale lui 2:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : 2^k \leq n < 2^{k+1} - 1.$$

Atunci,

$$\begin{aligned} S_n &= x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + ... + (x_{2^k} + ... + x_n) \\ &\leq x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + ... + (x_{2^k} + ... + x_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq x_1 + 2x_2 + 2^2 x_4 + ... + 2^k x_{2^k} = T_k. \end{aligned}$$

Similar, avem

$$\begin{aligned} S_n &= x_1 + x_2 + ... + x_n \geq x_1 + x_2 + ... + x_{2^k} \\ &\geq x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + ... + (x_{2^{k-1}+1} + ... + x_{2^k}) \\ &\geq x_1 + x_2 + 2x_{2^2} + 2^2 x_{2^3} + ... + 2^{k-1} x_{2^k} \geq \frac{1}{2} T_k. \end{aligned}$$

Împreună cu relaţia obţinută anterior, avem:

$$\frac{1}{2} T_k \leq S_n \leq T_k,$$

de unde rezultă imediat afirmaţia teoremei. □

Exemplul 4.3.7 (seria armonică generalizată) Cu acest criteriu putem stabili natura seriei armonice generalizate: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. În primul rând, dacă $\alpha \leq 0$, seria este divergentă deoarece termenul general nu tinde la 0. Pentru $\alpha > 0$, $\frac{1}{n^\alpha}$ este un şir descrescător şi, din criteriul condensării rezultă că seria iniţială are aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{n(1-\alpha)}$. Dar ultima serie este una geometrică de raţie $q = 2^{1-\alpha}$. Am văzut că o serie geometrică este convergentă dacă şi numai dacă $|q| < 1$. În cazul nostru,

$$2^{1-\alpha} < 1 \text{ dacă şi numai dacă } 1 - \alpha < 0,$$

adică $\alpha > 1$.

În concluzie, seria armonică generalizată

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ este } \begin{cases} (C), & \text{pentru } \alpha > 1 \\ (D), & \text{pentru } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Teorema 4.3.8 (Cauchy - Hadamard: criteriul rădăcinii) *Fie seria cu termeni pozitivi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

1. *Dacă* $\lambda < 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\lambda > 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1. Fie $\lambda < 1$. Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\lambda + \varepsilon < 1$. Conform definiţiei, $\lambda = \lim \sqrt[n]{x_n}$. Există atunci un număr natural n_ε astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$,

$$\sqrt[n]{x_n} < \lambda + \varepsilon < 1.$$

Dar atunci $x_n < (\lambda + \varepsilon)^n$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Dar seria $\sum\limits_{n=n_\varepsilon}^{\infty} (\lambda + \varepsilon)^n$ este convergentă, raţia $\lambda + \varepsilon$ fiind subunitară. Conform criteriului de comparaţie de prima speţă rezultă acum că şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Să presupunem acum că $\lambda > 1$. Aplicând din nou definiţia, avem:

$$1 < \lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}.$$

Dar atunci există n_1 astfel încât $x_n > 1$ pentru orice $n \geq n_1$. În consecinţă, termenul general nu tinde la 0, deci seria este divergentă. □

Observaţia 4.3.9 *Dacă $\lambda = 1$ nu putem decide dacă seria este convergentă sau divergentă. Pentru ambele serii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ avem $\lambda = 1$, dar prima este divergentă, iar a doua convergentă.*

Teorema 4.3.10 (D'Alembert: criteriul raportului) *Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ cu $x_n > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.*

1. *Dacă $\lambda < 1$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.*
2. *Dacă $\lambda > 1$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.*

Demonstraţie. Rezultă din faptul că dacă există $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lambda$. Concluziile sunt imediate, din criteriul rădăcinii. □

Observaţia 4.3.11 *1. Ca şi în cazul criteriului rădăcinii, dacă*

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1,$$

nu putem decide dacă seria de termen general x_n este convergentă sau divergentă. Aceleaşi două serii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sunt exemplu în acest sens.

3. Există şi situaţii în care niciunul din criterii nu poate fi aplicat pentru a stabili natura unei serii. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este un exemplu în acest sens.

Atunci când folosind criteriul raportului nu putem preciza natura unei serii, putem utiliza următorul criteriu:

Teorema 4.3.12 (Criteriul lui Raabe - Duhamel) *Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, cu $x_n > 0$, pentru orice n. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \rho$, atunci*

1. *dacă $\rho > 1$, seria este convergentă;*
2. *dacă $\rho < 1$, seria este divergentă.*

Demonstraţie. 1. Dacă $\rho > 1$, atunci există $M > 1$ astfel încât de la un rang încolo toţi termenii şirului $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$ sunt cel puţin egali cu M. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > M > 1 \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Aceasta revine la

$$Mx_{n+1} < nx_n - nx_{n+1} \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Adunând relaţiile de acest tip, obţinem

$$\begin{aligned} & M\left(x_2 + x_3 + ... + x_n\right) \\ & \quad < x_1 - x_2 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_3 - 3x_4 + ... + (n-1)\, x_{n-1} - (n-1)\, x_n \end{aligned}$$

adică

$$M\left(x_2 + x_3 + ... + x_n\right) < x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{n-1} - (n-1)\, x_n.$$

Dar $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = S_n$, şirul sumelor parţiale al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Atunci,

$$MS_n - Mx_1 < S_n - nx_n < S_n \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Rezultă de aici că

$$S_n < \frac{Mx_1}{M-1},$$

adică şirul sumelor parţiale este mărginit. Astfel, seria este convergentă.

2. Facem un raţionament similar: dacă $\rho < 1$, atunci există $m < 1$ astfel încât (fără a restrânge generalitatea) toţi termenii şirului $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$ sunt cel mult egali cu m:

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq m.$$

Mai departe, pentru că $m < 1$, avem

$$nx_n - nx_{n+1} \leq mx_{n+1} \leq x_{n+1}.$$

Echivalent,

$$nx_n \leq (n+1)\, x_{n+1},$$

de unde

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Deoarece $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, conform criteriului de comparaţie de speţa a doua rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este divergentă. $\square$

Observaţia 4.3.13 *Criteriul Raabe - Duhamel este mai general decât cel al raportului cu limită. Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda \neq 1$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } \lambda < 1 \\ -\infty, & \text{dacă } \lambda > 1, \end{cases}$$

ceea ce conduce la concluziile criteriului raportului.

Exemplul 4.3.14 Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Având în vedere forma termenului general, vom încerca să aplicăm criteriul raportului cu limită. Calculând $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, obţinem

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)},$$

raport care are limita 1, deci din criteriul raportului nu putem trage o concluzie.

Aplicăm mai departe criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n \cdot \frac{-6n-5}{(2n+2)(2n+3)} \to -\frac{3}{2}.$$

Fiindcă limita este subunitară, seria este divergentă.

Exemplul 4.3.15 Să stabilim natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}$, în funcţie de parametrul real $a > 0$. Din nou, apelăm mai întâi la criteriul raportului cu limită:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n+1}} = a \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)}} \to a,$$

având în vedere că $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n} \to +\infty$.

Astfel, dacă $a > 1$ seria este divergentă iar dacă $a < 1$, seria este convergentă. Pentru $a = 1$ nu putem trage o concluzie din criteriul raportului, aşa că încercăm să aplicăm criteriul lui Raabe - Duhamel. Notând $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n} = a_n$, avem:

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n \cdot \frac{1}{(n+1)\,a_n} \to 0$$

deoarece $\frac{n}{n+1} \to 1$ iar $a_n \to +\infty$. Astfel, conform criteriului lui Raabe - Duhamel, seria este divergentă pentru $a = 1$.

4.4 Serii cu termeni oarecare

Pentru serii care nu au termeni pozitivi nu mai putem aplica criteriile din secţiunea precedentă. Începem studiul cu un rezultat util în cele ce urmează.

Teorema 4.4.1 *Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri de numere reale, $n \geq 1$ şi $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Atunci pentru orice număr natural n are loc*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} S_k \left(b_{k+1} - b_k\right).$$

Demonstraţie. Notăm $S_0 = 0$. Cum $S_k - S_{k-1} = a_k$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1})\, b_k \\ &= b_1 (S_1 - S_0) + b_2 (S_2 - S_1) + ... + b_n (S_n - S_{n-1}) \\ &= S_1 (b_1 - b_2) + ... + S_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + S_n (b_n - b_{n+1}) + S_n b_{n+1} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} S_k (b_{k+1} - b_k) + S_n b_{n+1},\end{aligned}$$

adică relaţia de demonstrat. □

Lema 4.4.2 (Abel) *Dacă (a_n) este un şir de numere reale cu şirul sumelor parţiale mărginit de numerele reale m şi M: $m \leq S_n \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar (b_n) este un şir descrescător de numere pozitive, atunci*

$$mb_1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq M b_1, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstraţie. Din teorema anterioară avem:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = S_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} S_k (b_{k+1} - b_k).$$

Deoarece (b_n) este un şir descrescător, rezultă că $b_k - b_{k+1} \geq 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Atunci,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq -M \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) + M b_{n+1} = M b_1.$$

În acelaşi mod se obţine şi prima inegalitate. □

Teorema 4.4.3 (Criteriul lui Dirichlet) *Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, având şirul (S_n) al sumelor parţiale mărginit. Dacă (y_n) este un şir descrescător şi convergent la 0, atunci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.*

Demonstraţie. Fie $M > 0$ astfel încât $|S_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi fie $n_0 \in \mathbb{N}$ fixat. Pentru orice $n \geq n_0$ şi pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ aplicăm Lema 4.4.2 pentru (x_k) şi (y_k), $k = n+1, ..., n+p$ şi obţinem:

$$|x_{n+1} y_{n+1} + ... + x_{n+k} y_{n+k}| \leq 2M y_{n+1} \leq 2M y_{n_0}$$

Dar $y_n \to 0$ şi atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ suficient de mare astfel încât

$$|y_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Astfel,

$$|x_{n+1} y_{n+1} + ... + x_{n+k} y_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot 2M = \varepsilon,$$

deci este verificată condiţia Cauchy şi prin urmare seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă. □

Exemplul 4.4.4 Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$, unde $x \in \mathbb{R}$. Este cunoscut că

$$\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Atunci,

$$\left|\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx\right| \leq \frac{2}{2\left|\sin \frac{x}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|},$$

pentru orice $x \neq 2k\pi$. Pentru $x = 2k\pi$ suma este, evident, nulă. Astfel, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$ are şirul sumelor parţiale mărginit.

Pe de altă parte, şirul $b_n = \dfrac{1}{n}$ este descrescător la 0. Astfel, sunt îndeplinite condiţiile criteriului lui Dirichlet şi deci seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

este convergentă.

Teorema 4.4.5 (Criteriul lui Abel) *Dacă seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *este convergentă iar* (y_n) *este un şir monoton şi mărginit, atunci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ *este o serie convergentă.*

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că şirul (y_n) este descrescător, întrucât în caz contrar putem înlocui şirul (y_n) cu şirul $(-y_n)$. Fiind monoton şi mărginit, (y_n) este convergent. Fie $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n - y) = 0$.

Cum $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă, rezultă că are şirul sumelor parţiale mărginit. Aplicând criteriul lui Dirichlet, rezultă că seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n (y_n - y)$$

este convergentă. Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y x_n$ este convergentă, urmează că

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (y_n - y) + \sum_{n=1}^{\infty} y x_n$$

este convergentă, fiind suma a două serii convergente. □

Exemplul 4.4.6 Conform criteriului lui Dirichlet, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ este o serie convergentă, întrucât $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ are şirul sumelor parţiale mărginit iar $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ este un şir descrescător la 0. Atunci, conform criteriului lui Abel, pentru orice şir monoton şi mărginit (y_n), seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} y_n$ este o serie convergentă. În particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

sunt convergente.