Curs 6

Spaţiul $\mathbb{R}^k$

6.1 Norme pe $\mathbb{R}^k$

Scopul acestui curs este de a introduce şi studia mulţimea $\mathbb{R}^k$. Vor fi analizate proprietăţile algebrice şi topologice ale acestui spaţiu, ce vor permite introducerea şirurilor de puncte din $\mathbb{R}^k$.

Considerăm $k \in \mathbb{N}^*$ şi fie

$$\mathbb{R}^k := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{\text{de } k \text{ ori}} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_k) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, k}\}.$$

Această mulţime se organizează ca spaţiu liniar real în raport cu operaţiile

$$\text{“}+\text{”} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k,\ x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_k + y_k),$$
$$\text{“}\cdot\text{”} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k,\ \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_k),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^k$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$, operaţii numite adunarea şi înmulţirea cu scalari.

$\mathbb{R}^k$ se poate organiza ca spaţiu euclidian.

Pentru orice două elemente $x = (x_1, x_2, ..., x_k), y = (y_1, y_2, ..., y_k) \in \mathbb{R}^k$, considerăm

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ky_k = \sum_{i=1}^{k} x_iy_i. \tag{6.1}$$

numit **produsul scalar standard**.

Definiţia 6.1.1 *O aplicaţie* $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *se numeşte* ***normă*** *pe* $\mathbb{R}^k$ *dacă îndeplineşte relaţiile:*

(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

(N_2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$;

(N_3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Proprietăţile $(N_1) - (N_3)$ se mai numesc **axiomele normei**. Având definită o normă $\|\cdot\|$ pe $\mathbb{R}^k$, vom spune că $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ este spaţiu liniar normat. Pentru un element $x \in \mathbb{R}^k$, vom numi $\|x\|$ **norma** sau **lungimea** vectorului x.

Norma are următoarele proprietăţi elementare.

Propoziţia 6.1.2 *Presupunem că* $\|\cdot\|$ *este o normă pe* $\mathbb{R}^k$*. Atunci:*

(i) $\|-x\| = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$;

(ii) $\|x\| \ge 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$;

(iii) $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Demonstraţie. Deoarece (i) este evidentă, să arătăm (ii). Pentru aceasta, să observăm că, pentru orice $x \in \mathbb{R}^k$,

$$0 = \|\theta\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|.$$

Pentru (iii), observăm că

$$\begin{aligned} &\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|, \\ &\|y\| = \|(y-x)+x\| \leq \|y-x\| + \|x\| = \|x-y\| + \|x\| \\ &\quad \Rightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|. \end{aligned}$$

□

Am văzut, în cadrul cursului de algebră, că există următoarea legatură între noţiunile prezentate anterior: având definit un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, acesta induce o normă pe $\mathbb{R}^k$.

Propoziţia 6.1.3 *Fie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produs scalar pe $\mathbb{R}^k$. Atunci aplicaţia $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$,*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k, \tag{6.2}$$

este o normă pe $\mathbb{R}^k$.

O proprietate interesantă, ce ne dă condiţii necesare şi suficiente pentru ca o normă să fie indusă de un produs scalar, este prezentată în continuare.

Propoziţia 6.1.4 *Condiţia necesară şi suficientă ca o normă $\|\cdot\|$ să fie indusă de un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este ca $\|\cdot\|$ să satisfacă următoarea identitate, numită **identitatea paralelogramului***

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k. \tag{6.3}$$

Demonstraţie.

" $\Rightarrow$ " Să presupunem că există $\langle \cdot, \cdot \rangle$ astfel încât $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \forall x \in \mathbb{R}^k$. Atunci (6.3) revine la

$$\langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle = 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k,$$

relaţie ce se verifică uşor în baza proprietăţilor produsului scalar.

" $\Leftarrow$ " Să presupunem acum că (6.3) este îndeplinită şi să definim, pentru $x, y \in \mathbb{R}^k$ arbitrari,

$$\langle x, y \rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right). \tag{6.4}$$

Axiomele (PS_1) şi (PS_2) rezultă uşor. Să arătăm (PS_3). Pentru aceasta, avem

$$\begin{aligned} \langle x+y, z \rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y+z\|^2 + \|z\|^2\right) - \frac{1}{4}\left(\|z\|^2 + \|x+y-z\|^2\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\|x+y+2z\|^2 + \|x+y\|^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{8}\left(\|x+y\|^2 + \|x+y-2z\|^2\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\|x+y+2z\|^2 + \|x+y-2z\|^2\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) + \frac{1}{4}\left(\|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2\right) - \frac{1}{4}\left(\|x-z\|^2 + \|y-z\|^2\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(\|x+y+2z\|^2 + \|x-y\|^2\right)\\
&- \frac{1}{8}\left(\|x+y-2z\|^2 + \|x-y\|^2\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(\|x+y+2z\|^2 + \|x+y-2z\|^2\right).
\end{aligned}$$

În concluzie, (PS_3) este demonstrată.

Să arătăm (PS_4). Să observăm că

$$0 = \langle \theta, y\rangle = \langle x + (-x), y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle,$$

de unde

$$\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k. \tag{6.5}$$

Dacă $\|\cdot\|$ satisface (6.3), folosind $|\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|$ şi $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, avem

$$\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \le \frac{1}{4}\left(\|x\| + \|y\|\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\|x\| - \|y\|\right)^2\\
&= \|x\|\,\|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k,
\end{aligned}$$

adică $\langle \cdot, \cdot\rangle$ definit de (6.4) satisface o inegalitate de tip Cauchy-Buniakowski-Schwarz. Schimbând x cu $-x$ şi folosind (6.5), avem că

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k. \tag{6.6}$$

De asemenea, folosind (PS_3), ce a fost deja demonstrată, avem

$$\langle 2\cdot x, y\rangle = \langle x + x, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle = 2\langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k,$$

de unde, prin inducţie, obţinem

$$\langle n\cdot x, y\rangle = n\langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.7}$$

Folosind (6.5) şi (6.7), deducem că

$$\langle p\cdot x, y\rangle = p\langle x, y\rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k, \forall p \in \mathbb{Z}. \tag{6.8}$$

De aici, rezultă că pentru orice $p, q \in \mathbb{Z}$ cu $q \neq 0$, şi pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^k$,

$$q\left\langle \frac{p}{q}\cdot x, y\right\rangle = \left\langle q\frac{p}{q}\cdot x, y\right\rangle = \langle p\cdot x, y\rangle = p\langle x, y\rangle,$$

deci

$$\langle r\cdot x, y\rangle = r\langle x, y\rangle, \ \forall r \in \mathbb{Q}, \forall x, y \in \mathbb{R}^k. \tag{6.9}$$

Fie acum $a \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$ arbitrari. Avem, folosind (PS_3), relaţiile (6.6) şi (6.9), că

$$\begin{aligned}
|\langle a\cdot x, y\rangle - a\langle x, y\rangle| &= |\langle a\cdot x, y\rangle - \langle r\cdot x, y\rangle + r\langle x, y\rangle - a\langle x, y\rangle|\\
&\le |\langle (a-r)\cdot x, y\rangle| + |(r-a)\langle x, y\rangle|\\
&\le \|(a-r)\cdot x\|\,\|y\| + |r-a|\,\|x\|\,\|y\|\\
&= 2|r-a|\,\|x\|\,\|y\|.
\end{aligned}$$

Făcând $r \to a$ (vezi capitolul **Limite de funcţii**), rezultă că

$$\langle a \cdot x, y \rangle = a \langle x, y \rangle ,$$

adică (PS_4) este complet demonstrată. □

Prezentăm în continuare câteva exemple remarcabile de norme.

Exemplul 6.1.5 Pentru $k = 1$, funcţia modul $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o normă, deoarece satisface
(N_1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(N_2) $|\lambda x| = |\lambda| \, |x| , \quad \forall \lambda, x \in \mathbb{R}$;
(N_3) $|x + y| \leq |x| + |y| , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Următoarele norme definite pe $\mathbb{R}^k$ vor fi importante în cele ce urmează.

Exemplul 6.1.6 (Norma euclidiană) Reamintim că produsul scalar standard pe $\mathbb{R}^k$ este dat de (6.1). Considerăm norma indusă de acesta, notată cu $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi definită prin

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k. \tag{6.10}$$

Fiind indusă de produsul scalar standard, $\|\cdot\|_2$ este numită **norma euclidiană**.

Exemplul 6.1.7 (Norma 1) Fie aplicaţia $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{k} |x_i| , \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k. \tag{6.11}$$

Să verificăm că $\|\cdot\|_1$ satisface axiomele $(N_1) - (N_3)$. Din nou, $(N_1), (N_2)$ se verifică uşor. Pentru (N_3), să observăm că, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^k$,

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{k} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{k} |x_i| + \sum_{i=1}^{k} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1 .$$

Aşadar, $\|\cdot\|_1$ defineşte o normă pe $\mathbb{R}^k$, numită **norma 1**, sau **norma Manhattan.** Se poate observa că $\|\cdot\|_1$ nu satisface identitatea paralelogramului. Într-adevăr, pentru $x := (1, 0, ..., 0), y := (0, 1, 0, ..., 0)$, obţinem $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$ şi
$\|x + y\|_1 = \|x - y\|_1 = 2$, deci (6.3) nu este îndeplinită. Atunci, potrivit Propoziţiei 6.1.4, $\|\cdot\|_1$ nu poate fi indusă de niciun produs scalar.

Exemplul 6.1.8 (Norma maximum) Fie aplicaţia $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|x\|_\infty := \max_{i=\overline{1,k}} |x_i| , \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k. \tag{6.12}$$

Din nou, se verifică uşor axiomele normei $(N_1) - (N_3)$ (exerciţiu). Deci, aplicaţia $\|\cdot\|_\infty$ este o normă pe $\mathbb{R}^k$, numită **norma maximum**. Ca mai sus, observăm că $\|\cdot\|_\infty$ nu satisface identitatea paralelogramului, deci nu poate fi indusă de niciun produs scalar.

Să mai observăm că toate cele trei norme definite anterior se reduc, în cazul $k = 1$, la funcţia modul.

6.1.1 Bile închise. Bile deschise

Considerăm în continuare spaţiul $\mathbb{R}^k$, pe care am definit o normă $\|\cdot\|$.

Definiţia 6.1.9 *Fie $a \in \mathbb{R}^k, r \in R_+^*$. Mulţimea*

$$B(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^k | \, \|x-a\| < r\right\}$$

*se numeşte **bilă deschisă** de centru a şi rază r. Mulţimea*

$$\overline{B}\,(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^k | \, \|x-a\| \leq r\right\}$$

*se numeşte **bilă închisă** de centru a şi rază r. Mulţimea*

$$S\,(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^k | \, \|x-a\| \leq r\right\}$$

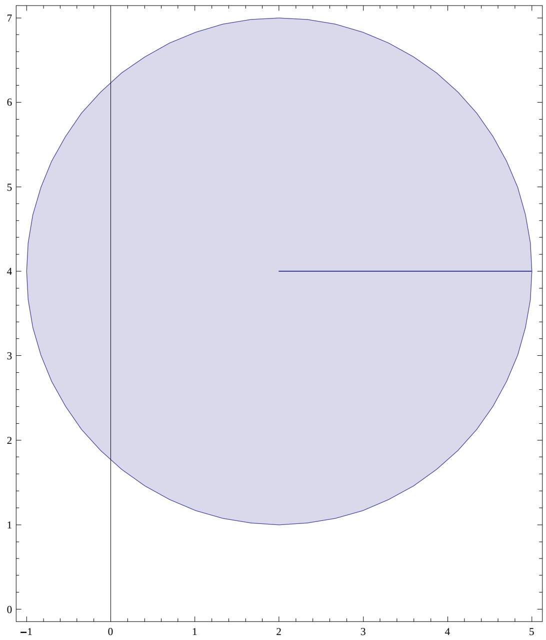
*se numeşte **sferă** de centru a şi rază r.*

Exemplul 6.1.10 În $\mathbb{R}$, $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} | \, \|x-a\| < r\}$ este un interval deschis de lungime $2r$ şi cu centrul în a.

Exemplul 6.1.11 Să considerăm cazul $\mathbb{R}^2$. Pentru norma euclidiană $\|\cdot\|_2$, bila deschisă, bila închisă şi sfera de centru $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ şi rază $r > 0$ vor fi, respectiv

$$\begin{aligned}
B(a,r) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\},\\
\overline{B}(a,r) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\},\\
S(a,r) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\}.
\end{aligned}$$

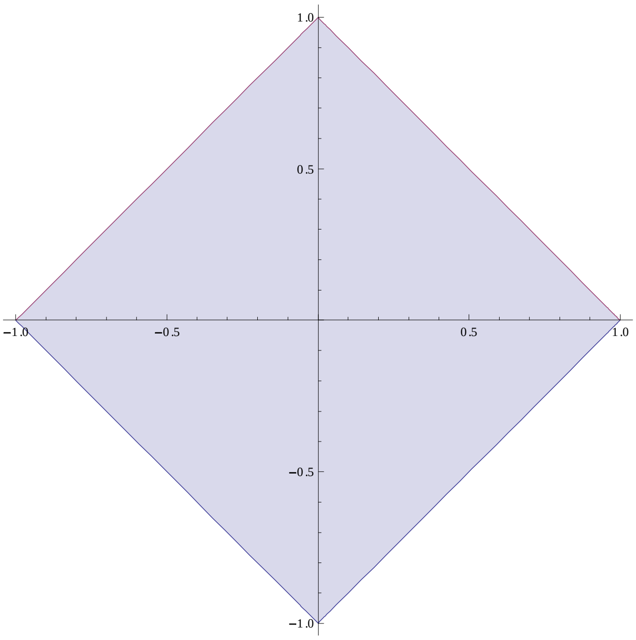
Spre exemplu, $\overline{B}((2,4),3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-4)^2 \leq 9\}$ are reprezentarea:



Exemplul 6.1.12 În cazul normei $\|\cdot\|_1$, mulţimile corespunzătoare sunt:

$$\begin{aligned}
B(a,r) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| < r\},\\
\overline{B}(a,r) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| \leq r\},\\
S(a,r) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1 - a_1| + |x_2 - a_2| = r\}.
\end{aligned}$$

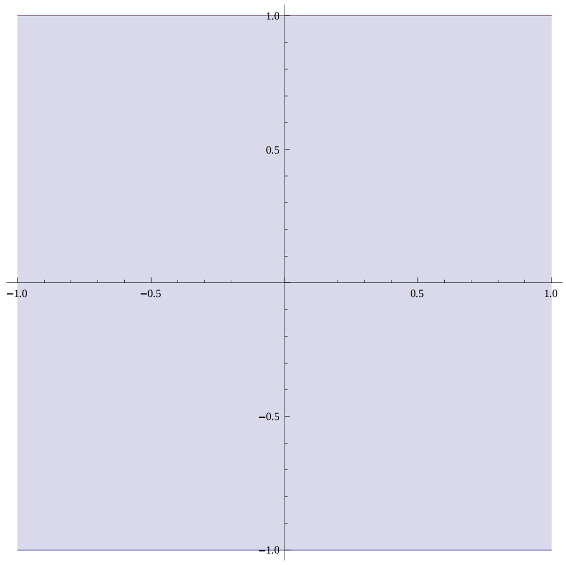
Spre exemplu, $\overline{B}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ are reprezentarea:



Exemplul 6.1.13 În sfârşit, în cazul normei $\|\cdot\|_\infty$, obţinem următoarele:

$$B(a,r) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} < r\},$$
$$\overline{B}(a,r) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} \leq r\},$$
$$S(a,r) = \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|\} = r\}.$$

Spre exemplu, $\overline{B}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$ are reprezentarea:

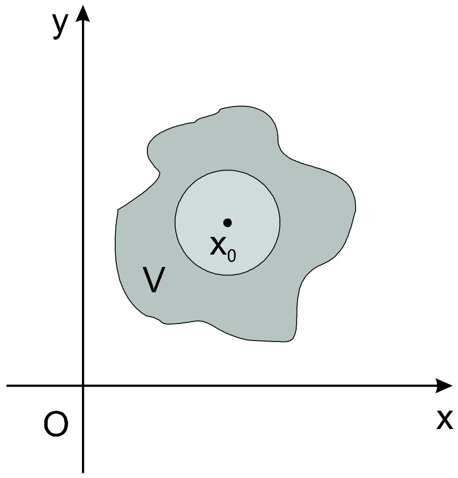


Definiţia 6.1.14 *O mulţime A nevidă din $\mathbb{R}^k$ se numeşte **mărginită** dacă există o bilă, pe care o putem presupune cu centrul în origine, care conţine A. Aceasta înseamnă că există un număr $M > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$ să avem $\|x\| \leq M$. În caz contrar, A se numeşte **nemărginită**.*

Observaţia 6.1.15 *Deoarece în spaţiul $\mathbb{R}^k$ nu avem o relaţie de ordine, $\mathbb{R}^k$ nu se pot defini noţiunile de mulţimi majorate sau mulţimi minorate şi nici marginile unei mulţimi.*

6.1.2 Vecinătăţi

Definiţia 6.1.16 *Fie $x_0 \in \mathbb{R}^k$. Se numeşte* ***vecinătate*** *a lui x_0 orice supramulţime a unei bile deschise cu centrul în x_0.*



O vecinătate a lui x_0 se notează V_{x_0} sau V, dacă nu există pericol de confuzie. Mulţimea vecinătăţilor lui x_0 se notează $\mathcal{V}(x_0)$ şi se numeşte **sistemul vecinătăţilor** lui x_0.

Observaţia 6.1.17 *Bilele deschise sau închise centrate în x_0 sunt vecinătăţi ale lui x_0.*

Proprietăţi ale vecinătăţilor

(V_1) $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$ (dacă V este o vecinătate a lui x atunci $x \in V$.) Afirmaţia rezultă din faptul că x se găseşte în orice bilă deschisă centrată în x.

(V_2) $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ şi $U \supset V$, avem $U \in \mathcal{V}(x)$ (orice supramulţime a unei vecinătăţi a lui x este vecinătate a lui x) Rezultă din faptul $x \in B(x, r_1) \subset V \subset W$.

(V_3) $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$, avem $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$. (Intersecţia a două vecinătăţi ale lui x este vecinătate a lui x, adică dacă $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.) Din definiţia vecinătăţilor rezultă că există o bilă deschisă $B(x, r_1) \subset V_1$ şi $B(x, r_2) \subset V_2$. Dacă $r = \min\{r_1, r_2\}$ $\Rightarrow B(x, r) \subset V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(V_4) $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists W \in \mathcal{V}(x)$ astfel încât $\forall y \in W$ avem $V \in \mathcal{V}(y)$.

Teorema 6.1.18 (Teorema de separaţie a lui Hausdorff) *Dacă x şi y sunt două elemente ale lui $\mathbb{R}^k$ atunci există o vecinătate V_1 a lui x şi V_2 a lui y astfel încât $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.*

Demonstraţie. Deoarece $x \neq y \Rightarrow d = \|x - y\| > 0$; sferele $B(x, \frac{d}{3})$ şi $B(y, \frac{d}{3})$ care sunt vecinătăţi ale lui x şi y nu au puncte comune, deoarece dacă ar exista $z \in B(x, \frac{d}{3}) \cap B(y, \frac{d}{3})$ ar rezulta că $d = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| < \frac{d}{3} + \frac{d}{3} = \frac{2d}{3}$, fals. $\square$

6.1.3 Mulţimi deschise

Fie A o submulţime a spaţiului $\mathbb{R}^k$ şi un punct $x_0 \in A$.

Definiţia 6.1.19 *Un punct $x_0 \in A$ se numeşte* ***punct interior*** *al mulţimii A dacă există o vecinătate V a lui x_0 conţinută în mulţimea A, adică $x_0 \in V \subset A$.*

A spune că x_0 este punct interior al lui A înseamnă că A este o vecinătate a lui x_0.

Definiţia 6.1.20 *Mulţimea punctelor interioare ale mulţimii A se numeşte* ***interiorul*** *lui A şi se notează cu* $\operatorname{int} A$ *sau* $\overset{\circ}{A}$.

Evident interiorul lui A este conţinut în A, $\overset{\circ}{A} \subset A$.

Interiorul mulţimii vide este mulţimea vidă.

Definiţia 6.1.21 *Mulţimea A se numeşte **mulţime dechisă** dacă este egală cu interiorul său: $A = \mathring{A}$, adică toate punctele sale sunt interioare.*

Propoziţia 6.1.22 (Proprietăţi ale mulţimilor deschise) *(i) Orice reuniune (finită sau infinită) de mulţimi deschise este o mulţime deschisă;*

(ii) Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este o mulţime deschisă;

(iii) $\mathbb{R}^k$ este o mulţime deschisă; mulţimea vidă este o mulţime deschisă.

Exemple de mulţimi deschise: sferele (deschise), intervalele deschise $n-$dimensionale.

6.1.4 Mulţimi închise

Definiţia 6.1.23 *Un punct $x_0 \in \mathbb{R}^k$ (nu neapărat în A) se numeşte **punct aderent** al mulţimii A dacă în orice vecinătate V a lui x_0 există cel puţin un punct din A, (eventual numai x_0, dacă $x_0 \in A$), adică $A \cap V \neq \emptyset$.*

*Mulţimea punctelor aderente mulţimii A se numeşte **aderenţa** lui A sau **închiderea** lui A şi se notează $\operatorname{cl} A$ sau $\overline{A}$.*

Orice $x_0 \in A$ este punct aderent al lui A, deoarece în orice vecinătate a lui x_0 se găseşte cel puţin punctul x_0 în A. Deci mulţimea A este conţinută în închiderea sa: $A \subset \overline{A}$.

O mulţime poate avea puncte aderente care să nu-i aparţină.

Definiţia 6.1.24 *O mulţime se numeşte **închisă** dacă este egală cu aderenţa sa.*

Propoziţia 6.1.25 (Proprietăţi ale mulţimilor închise) *(i) Orice reuniune finită de mulţimi închise este o mulţime închisă;*

(ii) Orice intersecţie (finită sau infinită) de mulţimi închise este o mulţime închisă.

(iii) $\mathbb{R}^k$ este o mulţime închisă; mulţimea vidă este o mulţime închisă.

Exemple de mulţimi închise: sferele (închise), intervalele închise $n-$dimensionale.

6.1.5 Puncte de acumulare

Definiţia 6.1.26 *Un punct $x_0 \in \mathbb{R}^k$ se numeşte **punct de acumulare** al mulţimii $A \subset \mathbb{R}^k$ dacă orice vecinătate a punctului x_0 conţine puncte din A, diferite de x_0. Cu alte cuvinte $\forall V \in \mathcal{V}(x_0) : V \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$.*

Intuitiv, un punct x_0 este punct de acumulare pentru o mulţime dacă există puncte din acea mulţime diferite de x_0, oricât de aproape de x_0. Calitatea unui punct de a fi punct de acumulare pentru o mulţime nu se schimbă dacă punctul respectiv se adaugă sau se scoate din mulţime. În general, un punct de acumulare poate să aparţină sau să nu aparţină mulţimii respective.

Definiţia 6.1.27 *Un punct x_0 se numeşte **punct izolat** dacă nu este punct de acumulare.*

Propoziţia 6.1.28 *Mulţimile finite nu au puncte de acumulare.*

Legătura dintre mulţimi deschise şi închise: o mulţime este închisă dacă şi numai dacă complementara sa este o mulţime deschisă.

6.1.6 Convergenţa în $\mathbb{R}^k, k \geq 2$

Definiţia 6.1.29 *Se numeşte* ***şir de puncte din*** $\mathbb{R}^k$ *orice funcţie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$. *În acest caz, vom nota* $f(n) \in \mathbb{R}^k$ *cu* x^n *şi vom numi acest element* ***termenul general*** *al şirului. De asemenea, convenim să notăm întregul şir cu* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Elementele spaţiului $\mathbb{R}^k$ sunt k-uple de numere reale. Dacă punem în evidenţă acest lucru pentru elementele unui şir $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ şi scriem acest şir pe coloană (deoarece este mai convenabil decât să-l scriem pe linie) avem

$$\begin{aligned} x^1 &= \left(x_1^1, x_2^1, ..., x_k^1\right) \\ x^2 &= \left(x_1^2, x_2^2, ..., x_k^2\right) \\ &\vdots \\ x^n &= (x_1^n, x_2^n, ..., x_k^n) \\ &\vdots \end{aligned}$$

se observă că şirul $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^k$ se descompune mergând pe coloane în k şiruri de numere reale

$$\begin{aligned} &x_1^1, x_1^2, ..., x_1^n, .. \text{ şirul coordonatelor de rang } 1, \\ &x_2^1, x_2^2, ..., x_2^n, .. \text{ şirul coordonatelor de rang } 2, \\ &\vdots \\ &x_k^1, x_k^2, ..., x_k^n, .. \text{ şirul coordonatelor de rang } k. \end{aligned}$$

Este natural să ne întrebăm în ce măsură anumite proprietăţi ale şirului $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ se răsfrâng asupra şirurilor coordonate. Astfel, şirul $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit dacă şi numai dacă cele k şiruri de coordonate sunt mărginite.

Definiţia 6.1.30 *Spunem că şirul* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge*** *la elementul* $\ell \in \mathbb{R}^k$ *dacă pentru orice vecinătate* V *a lui* ℓ, *există* $n_V \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru* $n \geq n_V \Rightarrow x^n \in V$. *Se notează*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \ell.$$

Observăm că afirmaţia "există $n_V \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru $n \geq n_V$" este echivalentă cu afirmaţia: în afara vecinătăţii V rămâne cel mult un număr finit de termeni ai şirului. Mai mult, deoarece în afara vecinătăţii V nu pot fi decât cel mult termenii până la rangul n_V (nu înseamnă că până la rangul n_V toţi sunt în afară, unii din ei se pot afla tot în V) deci în număr finit.

Teorema 6.1.31 (Teorema de caracterizare a şirurilor convergente) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \ell$ *dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : \left\|x^n - x^0\right\| < \varepsilon.$$

Relativ la convergenţă, avem o teoremă de caracterizare a convergenţei unui şir de elemente din $\mathbb{R}^k$ care are avantajul de a reduce convergenţa unui şir de elemente din $\mathbb{R}^k$ la convergenţa unui sistem de k şiruri de numere reale.

Teorema 6.1.32 (convergenţa pe coordonate) *Condiţia necesară şi suficientă ca un şir* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *din* $\mathbb{R}^k$ *să fie convergent este ca şirurile reale ale coordonatelor,* $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *să conveargă pentru fiecare* $i = \overline{1,n}$. *Limita şirului* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este* k*-uplul format din limitele celor* k *şiruri reale ale coordonatelor.*

Demonstraţie. Are loc inegalitatea evidentă:

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k, |x_i| \leq \|x\| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_k|, \forall i = \overline{1,k}. \tag{6.13}$$

Necesitatea. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \ell$ în $\mathbb{R}^k$, rezultă că $\|x^n - \ell\| \to 0$ şi înlocuind în stânga inegalităţii (6.13) $x = x^n - \ell$ şi $x_i = x_i^n - \ell_i$, obţinem

$|x_i^n - \ell_i| \leq \|x^n - \ell\|, \forall i = \overline{1,k}$, de unde, conform criteriului majorării, rezultă că $x_i^n \to \ell_i, \forall i = \overline{1,n}$.

Suficienţa. Dacă $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şiruri convergente şi $x_i^n \to \ell_i$, atunci notând $\ell = (\ell_1, \ell_2, ..., \ell_k) \in \mathbb{R}^k$, din partea dreaptă a inegalităţii (6.13), pentru $x = x^n - \ell$ obţinem

$\|x^n - \ell\| \leq |x_1^n - \ell_1| + |x_2^n - \ell_2| + ... + |x_k^n - \ell_k|$.

Se observă că fiecare şir din partea dreaptă a acestei inegalităţi converge la zero, deci şi suma lor converge la zero, de unde prin acelaşi criteriu al majorării, rezultă $\|x^n - \ell\| \to 0$, adică $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \ell$ în $\mathbb{R}^k$. □

Rezultatele de la şiruri de numere reale se extind în cazul şirurilor din $\mathbb{R}^k$ datorită Teoremei 6.1.32.