Curs 7

Limite de funcţii

7.1 Definiţie. Caracterizări. Exemple

Fie $k, p \geq 1$, $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime nevidă şi $f : A \to \mathbb{R}^p$ o funcţie. În cazul în care vom considera norme pe spaţiile $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^p$, le vom nota $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^k}$ şi $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$, respectiv. Uneori vom nota ambele norme prin $\|\cdot\|$, contextul permiţându-ne să deducem pe care dintre spaţii este considerată norma respectivă. Ca de obicei, notăm cu A' mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii A, şi fie $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$.

Definiţia 7.1.1 *Spunem că funcţia f **are limita** ℓ **în punctul** a, şi notăm*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell, \text{ sau } f(x) \to \ell \text{ pentru } x \to a,$$

dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, pentru orice x din $U \cap A$ diferit de a, să avem $f(x) \in V$, sau, formalizat,

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}(a) : f(U \cap A \setminus \{a\}) \subset V. \tag{7.1}$$

Observaţia 7.1.2 *Punctul a nu trebuie să aparţină neapărat mulţimii A, însă trebuie să existe puncte în mulţimea A oricât de apropiate de a, noţiunea de limită exprimând intuitiv faptul că, atunci când punctele din domeniul funcţiei se apropie de punctul a, atunci valorile funcţiei f în aceste puncte se apropie oricât de mult de punctul limită ℓ.*

Teorema 7.1.3 (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a limitei) *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci f are limita ℓ în punctul a dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\|_{\mathbb{R}^k} < \delta : \|f(x) - \ell\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \tag{7.2}$$

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Presupunem că (7.1) este satisfăcută şi fixăm $\varepsilon > 0$. Atunci, pentru $V := B(\ell, \varepsilon) \in \mathcal{V}(\ell)$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U \cap A \setminus \{a\}) \subset V$. Deci, există $\delta > 0$ astfel încât $B(a, \delta) \subset U$. Fie acum $x \in A \setminus \{a\}$ cu $\|x - a\| < \delta$. Dar asta înseamnă exact $x \in B(a, \delta) \cap A \setminus \{a\}$, de unde $x \in U \cap A \setminus \{a\}$. Atunci $f(x) \in V = B(\ell, \varepsilon)$, adică $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$.

"$\Leftarrow$" Presupunem acum că (7.2) este îndeplinită şi fie $V \in \mathcal{V}(\ell)$ oarecare. Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(\ell, \varepsilon) \subset V$. Folosind (7.2), există $U := B(a, \delta) \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, pentru orice $x \in B(a, \delta) \cap A \setminus \{a\}$ să avem $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$, ceea ce implică $f(x) \in B(\ell, \varepsilon) \subset V$. □

Teorema 7.1.4 (Caracterizarea cu şiruri a limitei) *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci f are limita ℓ în punctul a dacă şi numai dacă*

$$\forall (x_n) \subset A \setminus \{a\}, x_n \to a \text{ implică } f(x_n) \to \ell. \tag{7.3}$$

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Presupunem că $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ şi considerăm (x_n) arbitrar din $A \setminus \{a\}$ astfel încât $x_n \to a$. Fie acum $V \in \mathcal{V}(\ell)$. Atunci, folosind relaţia (7.1), există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U \cap A \setminus \{a\}) \subset V$. Cum $x_n \to a$, există $n_U \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_U$ să avem $x_n \in U$. Cum alegerea lui U depinde de V, avem că $n_U = n_V$. Atunci, pentru orice $n \geq n_V$, deoarece $x_n \in U \cap A \setminus \{a\}$, rezultă $f(x_n) \in V$, de unde $f(x_n) \to \ell$.

" $\Leftarrow$ " Raţionăm prin reducere la absurd. Să presupunem că (7.3) este adevărată, dar că (7.1) nu este satisfăcută. Aşadar, există $V \in \mathcal{V}(\ell)$ astfel încât, pentru orice $U \in \mathcal{V}(a)$, există $x \in U \cap A, x \neq a$ astfel încât $f(x) \notin V$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $U_n := B\left(a, \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{V}(a)$, deci vom găsi $x_n \in U_n \cap A, x_n \neq a$ astfel încât $f(x_n) \notin V$. Deoarece $\|x_n - a\| < \frac{1}{n}$, rezultă că $x_n \to a$. Cum $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$, avem din (7.3) că $f(x_n) \to \ell$. Dar asta înseamnă că, pentru n suficient de mare, $f(x_n) \in V$, contradicţie. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă şi deci demonstraţia este încheiată. □

Observaţia 7.1.5 *Uneori, una din relaţiile (7.2), respectiv (7.3), se consideră a fi definiţia limitei funcţiei f în punctul a, numite şi* ***definiţia $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii într-un punct,*** *respectiv* ***definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct.***

Teorema 7.1.4 ne permite să arătăm în anumite cazuri că nu există limita unei funcţii într-un punct. Mai precis, are loc următorul rezultat.

Corolarul 7.1.6 *Dacă există $(x_n), (u_n) \subset A \setminus \{a\}$ astfel încât $x_n \to a, u_n \to a$, iar $f(x_n) \to \ell_1, f(u_n) \to \ell_2$, cu $\ell_1 \neq \ell_2$, atunci nu există limita funcţiei f în punctul a.*

Exemplul 7.1.7 Să se arate că $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x+1} = 2$.

Să observăm că $\left|\sqrt{x+1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 2 - \varepsilon < \sqrt{x+1} < 2 + \varepsilon$. Dacă $\varepsilon \in (0, 2)$, alegem $\delta := \varepsilon(4 - \varepsilon) > 0$. Atunci

$$\begin{aligned}
|x-3| < \delta &\Rightarrow -\varepsilon(4-\varepsilon) < x - 3 \Rightarrow (2-\varepsilon)^2 < x+1 \Rightarrow 2 - \varepsilon < \sqrt{x+1}, \\
|x-3| < \delta &\Rightarrow x - 3 < \varepsilon(4-\varepsilon) < \varepsilon(4+\varepsilon) \Rightarrow x+1 < (2+\varepsilon)^2 \\
&\overset{0<x+1}{\Rightarrow} \sqrt{x+1} < 2 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pentru $\varepsilon > 2$, alegem $\delta := 4 > 0$. Atunci

$$\begin{aligned}
|x-3| < \delta &\Rightarrow -4 < x - 3 \Rightarrow 0 < x+1 \Rightarrow 2 - \varepsilon < 0 < \sqrt{x+1}, \\
|x-3| < \delta &\Rightarrow x - 3 < 4 < \varepsilon(4+\varepsilon) \Rightarrow x+1 < (2+\varepsilon)^2 \\
&\overset{0<x+1}{\Rightarrow} \sqrt{x+1} < 2 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, pentru orice $\varepsilon > 0$, am găsit $\delta > 0$ astfel încât, dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, cu $|x - 3| < \delta$, avem $\left|\sqrt{x+1} - 2\right| < \varepsilon$. Folosind caracterizarea $\varepsilon - \delta$, rezultă afirmaţia dorită.

Exemplul 7.1.8 Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ are limita 0 în punctul $(0,0)$.

Vom considera $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu norma euclidiană, demonstraţia pentru altă normă făcându-se analog. Observăm mai întâi că $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ pentru orice $(x,y) \neq (0,0)$. Într-adevăr, pentru orice $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -(x^2+y^2) \leq 2xy \leq (x^2+y^2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 \geq 0 \\ (x+y)^2 \geq 0. \end{cases}$$

Deducem de aici că
$$0 \leq |f(x,y)| = |xy| \cdot \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|xy|}{2}.$$
Considerăm $\varepsilon > 0$ arbitrar şi definim $\delta := \sqrt{\varepsilon}$. Dacă $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ are proprietatea că $\|(x,y)-(0,0)\|_2 < \delta$, rezultă $\max\{|x|, |y|\} \leq \delta = \sqrt{\varepsilon}$, deci
$$|f(x,y) - 0| \leq \frac{|xy|}{2} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$
Folosind caracterizarea $\varepsilon - \delta$, rezultă concluzia.

Exemplul 7.1.9 Să se arate că nu există limita funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ în punctul 0.

Să considerăm şirurile $(x_n), (u_n)$ date prin $x_n := \dfrac{1}{n\pi}$, $u_n := \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi şă observăm că $x_n \to 0, u_n \to 0$. Însă $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$, iar $f(u_n) = \sin\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$. Aplicând Corolarul 7.1.6, obţinem că nu există limita funcţiei f în punctul 0.

Exemplul 7.1.10 Să se arate că nu există limita funcţiei $f : \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ în punctul $(0,0)$.

Considerăm şirurile $(u_n), (v_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$, ambele convergente la $(0,0)$, date prin $u_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $v_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci
$$f(u_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2},$$
$$f(v_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5} \to \frac{2}{5}.$$
Aplicăm Corolarul 7.1.6 şi deducem că nu există limita funcţiei f în punctul $(0,0)$.

Folosind unicitatea limitei unui şir de puncte dintr-un spaţiu metric şi caracterizarea cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct, se obţine imediat următorul rezultat.

Teorema 7.1.11 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'$. Dacă f are limită în punctul a, aceasta este unică.*

Demonstraţie. Într-adevăr, să presupunem prin reducere la absurd, că există $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}^p$ astfel încât $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1$ şi $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_2$, cu $\ell_1 \neq \ell_2$. Să considerăm acum un şir arbitrar $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ cu proprietatea că $x_n \to a$. Folosind Teorema 7.1.4, deducem că $f(x_n) \to \ell_1$ şi $f(x_n) \to \ell_2$. Folosind teorema privind unicitatea limitei unui şir de puncte din $\mathbb{R}^p$, obţinem contradicţia $\ell_1 = \ell_2$. Deci, presupunerea făcută este falsă şi teorema este complet demonstrată. $\square$

Să observăm în continuare că funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k \geq 1, p > 1$ poate fi gândită ca fiind echivalentă cu p funcţii cu valori reale. Într-adevăr, având date funcţia f şi $x \in A$, dacă notăm
$$f(x) = y = (y_1, y_2, ..., y_p) \in \mathbb{R}^p,$$
putem defini în punctul x funcţiile f_i, $i \in \overline{1,p}$, prin $f_i(x) := y_i$. Construim aşadar funcţiile $f_i : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,p}$ astfel încât
$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)), \quad \forall x \in A. \tag{7.4}$$

Invers, considerând un sistem format din p funcţii cu valori reale $f_i : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,p}$, putem defini funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ prin relaţia (7.4).

Dacă avem $k, p > 1$, funcţia f se numeşte **funcţie vectorială de argument vectorial**, iar funcţiile f_i sunt numite **funcţiile componente**, sau **funcţiile coordonate** ale funcţiei f, şi scriem $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$. În cazul $k = 1, p > 1$, funcţia f se numeşte **funcţie vectorială de argument real**, iar dacă $k > 1, p = 1$, funcţia f se numeşte **funcţie reală de argument vectorial**. Dacă $k = p = 1$, funcţia f se numeşte **funcţie reală de argument real**.

Exemplul 7.1.12 Fie $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 4$. Domeniul pe care este definită este tot planul xOy. Mulţimea punctelor din grafic este (x, y, z) cu $z = 2x^2 + 2y^2 - 4$. Pentru a intui graficul, intersectăm suprafaţa cu plane paralele cu planul xOy. Aceste plane au ecuaţia $z = h$. Curbele $2x^2 + 2y^2 - 4 = h$ se numesc curbe de nivel ale funcţiei f. Aceste curbe există dacă $h \geq -4$ şi sunt cercuri. Cercurile se sprijină pe parabole care se obţin prin intersecţia suprafeţei $z = 2x^2 + 2y^2 - 4$ cu planele xOz şi yOz.

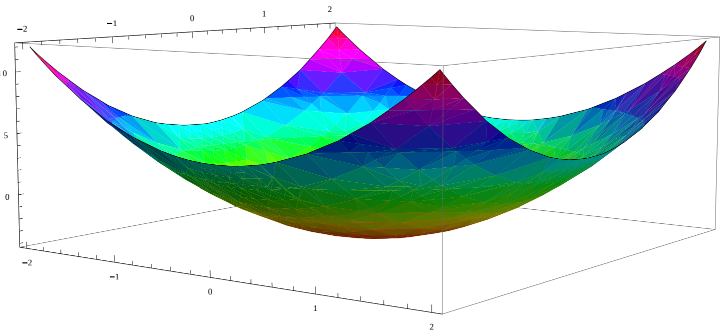

Figura 7.1: Graficul funcţiei $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 4$

Exemplul 7.1.13 Fie $f(x, y) = 12 - 3x - 4y$. Domeniul pe care este definită este tot planul xOy. Garficul funcţiei este un plan.

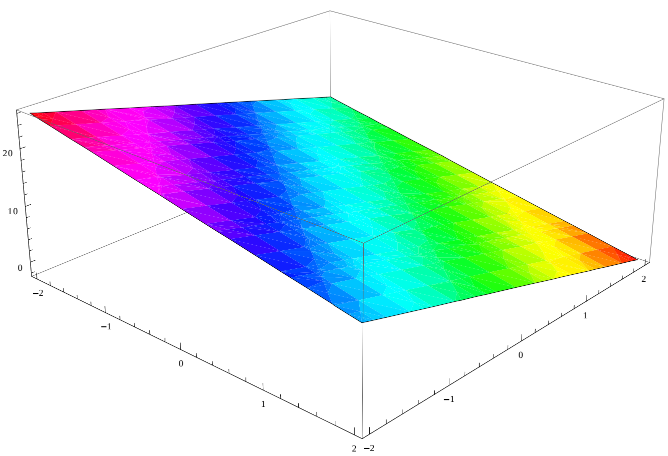

Figura 7.2: Graficul funcţiei $f(x, y) = 12 - 3x - 4y$

Exemplul 7.1.14 Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, x^2 - 10x + 7)$. Garficul este o parabolă situată în planul $x = y$.

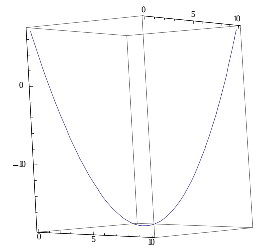

Figura 7.3: Graficul funcţiei $f(x) = (x, x^2 - 10x + 7)$

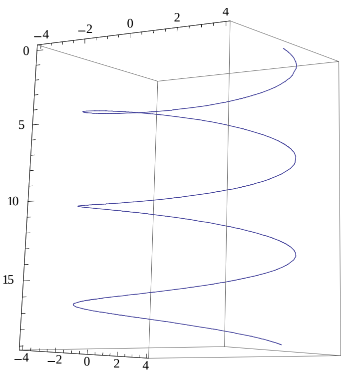

Figura 7.4: Graficul funcţiei $f(t) = (\cos t, \sin t)$

Exemplul 7.1.15 Fie $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Graficul este o spirală circulară.

Exemplul 7.1.16 O astfel de funcţie este de forma $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) = \left(\frac{\ln(1 + x^2y^2)}{x^2 + y^2}, \left(1 + \sin\left(x^2y^2\right)\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}, 1 + x^2y^2 \right).$$

Folosind teorema din cursul anterior, care asigură faptul că, pentru un şir de elemente din $\mathbb{R}^p$, convergenţa este echivalentă cu convergenţa pe coordonate, precum şi caracterizarea cu şiruri a existenţei limitei unei funcţii într-un punct, rezultă uşor următorul rezultat.

Teorema 7.1.17 *Fie funcţia $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'$. Atunci f are limita $\ell = (\ell_1, \ell_2, ..., \ell_p) \in \mathbb{R}^p$ în punctul a dacă şi numai dacă există simultan $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = \ell_i, i = \overline{1,p}$.*

Demonstraţie. Să presupunem că $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell = (\ell_1, \ell_2, ..., \ell_p) \in \mathbb{R}^p$. Atunci, folosind caracterizarea cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct, rezulta că pentru orice şir $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ cu proprietatea că $x_n \to a$, avem $f(x_n) \to \ell$. Ultima relaţie înseamnă de fapt că $(f_1(x_n), ..., f_p(x_n)) \to (\ell_1, ..., \ell_p)$. În baza teoremei privind convergenţa pe coordonate, aceasta este echivalentă cu faptul că $f_i(x_n) \to \ell_i \ \forall i \in \overline{1,p}$. Folosind din nou teorema privind echivalenţa convergenţei şirurilor din $\mathbb{R}^p$ cu convergenţa şirurilor de pe coordonate, deducem echivalenţa cu existenţa simultană a limitelor $\lim\limits_{x \to a} f_i(x)$ egale respectiv cu ℓ_i pentru orice $i \in \overline{1,p}$. $\square$

Teorema de mai sus permite reducerea studiului limitelor funcţiilor vectoriale de argument vectorial $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ la studiul limitelor funcţiilor componente $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

7.2 Limite laterale

În cazul în care ne referim la funcţii $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p, p \geq 1$, putem exploata structura de ordine a mulţimii $\mathbb{R}$, ajungând la noţiuni mai rafinate, cu ar fi cea de limită laterală.

Definiţia 7.2.1 *Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $A \subset \mathbb{R}$. Vom nota*

$$A_s = A \cap (-\infty, a], \quad A_d = A \cap [a, \infty).$$

*Punctul a se numeşte **punct de acumulare la stânga** (respectiv **dreapta**) pentru A dacă este punct de acumulare pentru mulţimea A_s (respectiv A_d). Vom nota mulţimea punctelor de acumulare la stânga (respectiv dreapta) cu A'_s (respectiv A'_d). Cu alte cuvinte,*

$$\begin{aligned} a \in A'_s &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(a), (V \cap A_s) \setminus \{a\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, (a - r, a + r) \cap A \cap (-\infty, a) \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, (a - r, a) \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Analog,

$$a \in A'_d \Leftrightarrow \forall r > 0, (a, a + r) \cap A \neq \emptyset.$$

Definiţia 7.2.2 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$.*

*(i) Dacă $a \in A'_s$, spunem că elementul $\ell_s \in \mathbb{R}^p$ este **limită la stânga** a funcţiei f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell_s)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in (U \cap A_s) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell_s$ sau $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \ell_s$.*

*(ii) Dacă $a \in A'_d$, spunem că elementul $\ell_d \in \mathbb{R}^p$ este **limită la dreapta** a funcţiei f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell_d)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in (U \cap A_d) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell_d$ sau $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \ell_d$.*

Se poate arăta uşor următorul rezultat.

Teorema 7.2.3 *(i) Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'_s$. Atunci f are limita la stânga în a egală cu ℓ_s dacă şi numai dacă*

$$\forall (x_n) \subset A_s \setminus \{a\} \text{ crescător, convergent la } a, \text{ avem că } f(x_n) \to \ell_s. \tag{7.5}$$

(ii) Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'_d$. Atunci f are limita la dreapta în a egală cu ℓ_d dacă şi numai dacă

$$\forall (x_n) \subset A_d \setminus \{a\} \text{ descrescător, convergent la } a, \text{ avem că } f(x_n) \to \ell_s. \tag{7.6}$$

Demonstraţie. (i) Să observăm mai întâi că putem arăta că $a \in A'_s \Leftrightarrow$ există un şir $(x_n) \subset A_s \setminus \{a\}$ crescător, convergent la a.

" $\Rightarrow$ " Fie acum un şir arbitrar $(x_n) \subset A \cap (-\infty, a)$ crescător, $x_n \to a$. Pentru o vecinătate arbitrară $V \in \mathcal{V}(\ell_s)$, folosind definiţia limitei la stânga, va exista $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in (U \cap A_s) \setminus \{a\} = U \cap A \cap (-\infty, a)$, să aibă loc $f(x) \in V$. Cum $(x_n) \subset A \cap (-\infty, a)$ este crescător cu limita a, rezultă că există n_U astfel încât, pentru orice $n \geq n_U$, să avem $x_n \in U \cap A \cap (-\infty, a)$. Atunci, cum U depinde de V, avem $n_U = n_V$, şi pentru orice $n \geq n_V$, $f(x_n) \in V$, deci $f(x_n) \to \ell_s$.

" $\Leftarrow$ " Raţionăm prin reducere la absurd. Să presupunem că există $V \in \mathcal{V}(\ell_s)$ astfel încât, pentru orice $U \in \mathcal{V}(a)$, există $x_U \in (U \cap A_s) \setminus \{a\}$ astfel încât $f(x) \notin V$. Să luăm, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, $U := \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$. Vom găsi aşadar $(x_n) \subset A \cap (-\infty, a)$ astfel încât

$x_n \to a$, iar $f(x_n) \notin V$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Considerând, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n := \max\{x_1, ..., x_n\}$, obţinem că $(y_n) \subset A \cap (-\infty, a)$, (y_n) este crescător şi $y_n \to a$, deoarece, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a - \frac{1}{n} < x_n \leq y_n < a.$$

De asemenea, $f(y_n) \notin V$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Folosind relaţia (7.5), rezultă că $f(y_n) \to \ell_s$, deci pentru n suficient de mare, $f(y_n) \in V$, contradicţie. Deci, presupunerea făcută este falsă, de unde rezultă că $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell_s$.

(ii) Se demonstrează asemănător. $\square$

De asemenea, are loc următoarea caracterizare a limitei unei funcţii prin intermediul limitelor laterale.

Teorema 7.2.4 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'_s \cap A'_d$. Atunci f are limită în punctul a dacă şi numai dacă există limitele la stânga şi la dreapta în punctul a şi sunt egale. În acest caz,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x).$$

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ atunci, folosind caracterizarea cu şiruri a limitei, pentru orice şir $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ convergent la a, avem $f(x_n) \to \ell$. Considerând pe rând şiruri crescătoare din $A_s \setminus \{a\}$, respectiv descrescătoare din $A_d \setminus \{a\}$, convergente la a, şi folosind caracterizarea cu şiruri a limitelor laterale dată de teorema anterioară, obţinem că există limitele laterale, ambele egale cu ℓ.

" $\Leftarrow$ " Să presupunem că există $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci, combinând definiţiile celor două limite laterale, ne va rezulta că, pentru orice $V \in \mathcal{V}(\ell)$, există $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât

$$\begin{aligned} &\forall x \in (U_1 \cap A_s) \setminus \{a\} = U \cap A \cap (-\infty, a), \text{ are loc } f(x) \in V, \\ &\forall x \in (U_2 \cap A_d) \setminus \{a\} = U \cap A \cap (a, +\infty), \text{ are loc } f(x) \in V. \end{aligned}$$

Aşadar, dacă notăm $U := U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(a)$ obţinem că, pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$, de unde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. $\square$

7.3 Limită după o direcţie. Limită parţială

Fie o funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $a = (a_1, a_2, ..., a_k)$, $v = (v_1, v_2, ..., v_k) \in \mathbb{R}^k$.

Definiţia 7.3.1 *Spunem că funcţia f **are limită în direcţia** v în punctul a dacă mulţimea $B := \{t \in \mathbb{R} \mid a + tv \in A\}$ este nevidă, $0 \in B'$ şi există $\ell \in \mathbb{R}^p$ astfel încât*

$$\lim_{t\to 0} f(a + tv) = \lim_{t\to 0} f(a_1 + tv_1, a_2 + tv_2, ..., a_k + tv_k) = \ell.$$

*În acest caz, elementul ℓ se numeşte **limita în direcţia** v a funcţiei f în punctul a.*
*În cazul particular $v := e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, vom spune că funcţia f **are limită parţială în raport cu variabila** x_i în punctul a, iar ℓ se numeşte **limita parţială în raport cu variabila** x_i a funcţiei f în punctul a. Aşadar,*

$$\lim_{t\to 0} f(a + te_i) = \lim_{t\to 0} f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, ..., a_k) = \ell.$$

Legătura între limita unei funcţii şi limita după o direcţie este dată în următoarea teoremă.

Teorema 7.3.2 *Dacă există* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$, *iar* $v \in \mathbb{R}^k$ *este un vector astfel încât mulţimea* $D = A \cap \{a + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ *este nevidă şi* $a \in D'$, *atunci există limita în direcţia* v *a funcţiei* f *în punctul* a *şi este egală cu* ℓ.

Demonstraţie. Fie un şir $(t_n) \subset \mathbb{R}$ astfel încât $t_n \to 0$ şi $a + t_n v \in A$ pentru orice n (care există deoarece $a \in D'$). Atunci $(x_n) \subset D \setminus \{a\}$ este convergent la a, unde $x_n = a + t_n v$. Concluzia urmează din caracterizarea cu şiruri a limitei. □

Observaţia 7.3.3 *Din teorema anterioară rezultă că, dacă obţinem pentru o direcţie* $v \in \mathbb{R}^k$ *că limita direcţională* $\lim\limits_{t\to 0} f(a + tv)$ *nu există, sau depinde de direcţia* v, *atunci nu va exista* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. *În ultimul caz, această metodă de a arăta că nu există limita se mai numeşte* ***metoda direcţiilor variabile.***

Reciproca teoremei anterioare nu are loc, după cum o arată următorul exemplu.

Exemplul 7.3.4 Fie $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ şi $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Atunci

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f((0,0) + t(\cos\alpha, \sin\alpha)) &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)\\ &= \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{t^2 \sin\alpha\cos\alpha}{t^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

Aşadar, funcţia f are limită în punctul $(0,0)$ în orice direcţie $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. De asemenea, pentru $\alpha = 0$ şi $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ne va rezulta că există limitele paţiale în raport cu x şi cu y în $(0,0)$, ambele egale cu 0. După cum am văzut însă în Exemplul 7.1.10, nu există limita funcţiei f în punctul $(0,0)$.

Limita direcţională poate oferi uneori informaţii suplimentare utile despre limita unei funcţii într-un punct, după cum se va vedea din exerciţiile următoare.

Exerciţiul 7.1 Să se arate funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \frac{x^3y^2\sin y + x^2y^3\sin x}{x^4+y^4}$$

are limita nulă în punctul $(0,0)$.

Să observăm că, pentru orice direcţie $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, avem

$$\lim_{t\to 0} f((0,0) + t(h_1,h_2)) = \lim_{t\to 0} t\frac{h_1^3h_2^2\sin(th_2) + h_1^2h_2^3\sin(th_1)}{h_1^4+h_2^4} = 0.$$

Rezultă că, dacă există, limita funcţiei în punctul $(0,0)$ va fi egală cu 0.

Folosind că

$$(x^2-y^2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^4+y^4 \geq 2x^2y^2,$$

obţinem

$$|f(x,y) - 0| \leq \frac{|x|^3 y^2 + x^2 |y|^3}{x^4+y^4} \leq \frac{1}{2}(|x| + |y|).$$

Cum limita în punctul $(0,0)$ a funcţiei din dreapta este 0 în mod evident, ne va rezulta (folosind, de exemplu, criteriul de tip $\varepsilon - \delta$, sau Teorema 7.5.6), concluzia.

Exerciţiul 7.2 Să se arate că nu există limita funcţiei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x \neq y\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \frac{y^2 - z^2}{x - y},$$

în punctul $(0,0,0)$.

Cum

$$\lim_{t\to 0} f((0,0,0) + t(h_1,h_2,h_3)) = \lim_{t\to 0} t\frac{h_2^2 - h_3^2}{h_1 - h_2} = 0,$$

rezultă că, dacă există, limita funcţiei în punctul $(0,0,0)$ va fi egală cu 0.

Considerând însă şirul

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

convergent la $(0,0,0)$ în $\mathbb{R}^3$, vom avea că

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0\right) = 1,$$

ceea ce arată că nu există limita funcţiei în punctul $(0,0,0)$.

7.4 Limite la $\pm\infty$. Limite infinite

Observăm că unele din noţiunile prezentate anterior se pot extinde dacă vom considera, în locul mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$, mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$. Acest lucru se poate realiza adaptând definiţiile cu vecinătăţi ale limitelor, prin înlocuirea vecinătăţilor numerelor reale, acolo unde este cazul, cu vecinătăţile punctelor $\pm\infty$. Reamintim că am arătat că $V \in \mathcal{V}(+\infty)$ dacă şi numai dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, +\infty] \subset V$. De asemenea, $V \in \mathcal{V}(-\infty)$ dacă şi numai dacă există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $[-\infty, b) \subset V$.

Pentru unitatea prezentării, vom face în cele ce urmează convenţia că, dacă pentru o mulţime $A \subset \mathbb{R}^k, k \geq 1$ notăm $a \in A'$, în cazul în care $k > 1$ vom considera de fapt puncte de acumulare din $\mathbb{R}^k$, iar în cazul $k = 1$ vom avea în vedere puncte din $\overline{\mathbb{R}}$.

Definiţia 7.4.1 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi $a \in A'$. Spunem că funcţia f **are limita** $+\infty$ (respectiv, $-\infty$) **în punctul** a, dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(+\infty)$ (respectiv $V \in \mathcal{V}(-\infty)$), există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (respectiv, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$).*

Are loc următoarea caracterizare a noţiunilor anterioare (pentru $k = 1$, în puncte de acumulare finite).

Teorema 7.4.2 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi $a \in A' \cap \mathbb{R}^k, k \geq 1$. Atunci:*

(i) există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \iff$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\| < \delta : f(x) > \varepsilon.$$

(i) există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \iff$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\| < \delta : f(x) < -\varepsilon.$$

Demonstraţie. Se arată asemănător cu cazul limitelor finite, utilizând caracterizarile vecinătăţilor punctelor $\pm\infty$ date mai sus. $\square$

În cazul $k = 1$, norma se înlocuieşte cu modulul în caracterizările de mai sus.

De asemenea, se poate da şi următoarea caracterizare cu şiruri, a cărei demonstraţie se realizează analog cazului limitelor finite.

Teorema 7.4.3 *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *şi* $a \in A', k \geq 1$. *Atunci:*

(i) există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \;\Leftrightarrow$

$$\forall (x_n) \in A \setminus \{a\}, x_n \to a : f(x_n) \to +\infty.$$

(i) există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \;\Leftrightarrow$

$$\forall (x_n) \in A \setminus \{a\}, x_n \to a : f(x_n) \to -\infty.$$

Să observăm că, pentru anumite mulţimi din $\mathbb{R}$, punctele $+\infty$ sau $-\infty$ pot fi puncte de acumulare. Să mai observăm că, dacă avem o mulţime $A \subset \mathbb{R}$ şi punctul $-\infty \in A'$, atunci $A_d(-\infty) = A \cap [-\infty, +\infty) = A$, însă nu putem vorbi de $A_s(-\infty)$. De asemenea, $-\infty \in A' \Leftrightarrow \forall r > 0, (-\infty, r) \cap A \neq \emptyset$. Cu alte cuvinte, atunci când vom vorbi de limita la $-\infty$ a unei funcţii, vom avea în vedere o noţiune asemănătoare limitei la dreapta într-un punct. Observaţii asemănătoare sunt valabile pentru punctul $+\infty$.

Definiţia 7.4.4 *Fie* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, *astfel încât* $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*) este punct de acumulare pentru A. Spunem că elementul* $\ell \in \mathbb{R}^p$ *este* ***limita funcţiei*** f ***în punctul*** $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*), dacă pentru orice* $V \in \mathcal{V}(\ell)$, *există* $U \in \mathcal{V}(+\infty)$ *(respectiv* $U \in \mathcal{V}(-\infty)$*) astfel încât pentru orice* $x \in U \cap A$, *are loc* $f(x) \in V$. *În acest caz vom scrie* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ *(respectiv* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$*).*

Putem formula şi în acest caz un rezultat de caracterizare.

Teorema 7.4.5 *Fie* $\ell \in \mathbb{R}^p$, $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p, p \geq 1$.

(i) Dacă $+\infty \in A'$, *atunci există* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x > \delta, x \in A : \|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

(ii) Dacă $-\infty \in A'$, *atunci există* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x < -\delta, x \in A : \|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

Din nou, în cazul $p = 1$, norma se înlocuieşte cu modulul în caracterizările de mai sus.

Să formulăm şi caracterizarea prin intermediul şirurilor.

Teorema 7.4.6 *Fie* $\ell \in \mathbb{R}^p$, $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p, p \geq 1$.

(i) Dacă $+\infty \in A'$, *atunci există* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$

$$\forall (x_n) \subset A, x_n \to +\infty : f(x_n) \to \ell.$$

(ii) Dacă $-\infty \in A'$, *atunci există* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$

$$\forall (x_n) \subset A, x_n \to -\infty : f(x_n) \to \ell.$$

În cazul funcţiilor reale, putem merge chiar mai departe, considerând funcţii cu limite infinite la $\pm\infty$.

Definiţia 7.4.7 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, astfel încât $+\infty$ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A.*

*(i) Spunem că **limita funcţiei** f **în punctul** $+\infty$ (respectiv $-\infty$) **este** $+\infty$, dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(+\infty)$, există $U \in \mathcal{V}(+\infty)$ (respectiv $U \in \mathcal{V}(-\infty)$) astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$).*

*(ii) Spunem că **limita funcţiei** f **în punctul** $+\infty$ (respectiv $-\infty$) **este** $-\infty$, dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(-\infty)$, există $U \in \mathcal{V}(+\infty)$ (respectiv $U \in \mathcal{V}(-\infty)$) astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$).*

Să dăm teoreme de caracterizare analitică şi prin intermediul şirurilor în acest caz.

Teorema 7.4.8 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă $+\infty \in A'$, atunci:*

(i) există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x > \delta, x \in A : f(x) > \varepsilon;$$

(ii) există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x > \delta, x \in A : f(x) < -\varepsilon.$$

Dacă $-\infty \in A'$, atunci:

(iii) există $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x < -\delta, x \in A : f(x) > \varepsilon.$$

(iv) există $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x < -\delta, x \in A : f(x) < -\varepsilon.$$

Teorema 7.4.9 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dacă $+\infty \in A'$, atunci:*

(i) există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall(x_n) \subset A, x_n \to +\infty : f(x_n) \to +\infty;$$

(ii) există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall(x_n) \subset A, x_n \to +\infty : f(x_n) \to -\infty;$$

Dacă $-\infty \in A'$, atunci:

(iii) există $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall(x_n) \subset A, x_n \to -\infty : f(x_n) \to +\infty;$$

(iv) există $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall(x_n) \subset A, x_n \to -\infty : f(x_n) \to -\infty.$$

Cum $\overline{\mathbb{R}}$ are proprietatea de separaţie Hausdorff ne rezultă unicitatea limitei unei funcţii în cazul în care aceasta este infinită.

Teorema 7.4.10 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi $a \in A'$. Dacă f are limită în punctul a, finită sau infinită, aceasta este unică.*

Să observăm acum că, în cazul $k = p = 1$, definiţia limitelor laterale ale unei funcţii se poate extinde permiţând acestora să aibă valori infinite, înlocuind vecinătatea V ce apare în Definiţia 7.2.2 cu vecinătăţi ale punctelor $\pm\infty$, după caz. Teorema 7.2.3 de caracterizare a limitelor laterale prin intermediul şirurilor se extinde uşor în această situaţie, formularea fiind identică dacă limitele laterale sunt infinite iar demonstraţia asemănătoare. Având în vedere cele precizate, putem discuta acum de limitele funcţiilor monotone.

Teorema 7.4.11 (Limitele funcţiilor monotone) *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotonă şi $a \in A' \cap \mathbb{R}$. Atunci există limitele laterale $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell_s$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell_d$, finite sau infinite.*

Demonstraţie. Să presupunem, fără a restrânge generalitatea, că f este crescătoare. Vom folosi caracterizarea dată de Teorema 7.2.3. Fie aşadar un şir crescător $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ astfel încât $x_n \to a$. Atunci, cum f este o funcţie crescătoare, ne rezultă că $(f(x_n))$ este crescător, deci există limita sa, finită sau infinită. Există aşadar $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât $f(x_n) \to \ell$. Pentru un alt şir crescător $(y_n) \subset A \setminus \{a\}$ astfel încât $y_n \to a$, vom arăta că limita şirului $(f(y_n))$ este tot ℓ. Ca mai înainte, avem că şirul $(f(y_n))$ este crescător, deci admite limită în $\overline{\mathbb{R}}$, pe care o notăm cu ℓ'. Construim şirul $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ în felul următor: $z_0 := x_0$, $z_{2m+1} := y_n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este primul număr natural pentru care $y_n > z_{2m}$, $z_{2m+2} := x_n$, unde $n \in \mathbb{N}$ este primul număr natural pentru care $x_n > z_{2m+1}$. Acest lucru se poate realiza deoarece şirurile (x_n) şi (y_n) sunt crescătoare din $A \setminus \{a\}$, cu limita finită a. Să observăm că, datorită modalităţii de construcţie, (z_m) este subşir pentru şirurile (x_n) şi (y_n). Mai mult, (z_m) este crescător, deci $(f(z_m))$ va fi crescător, de unde, ca mai sus, acesta va avea limită, pe care o notăm ℓ''. Cum $(f(z_m))$ este subşir al şirurilor cu limită $(f(x_n))$, $(f(y_n))$, ne va rezulta $\ell'' = \ell = \ell'$. Aşadar, există $\ell_s := \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât, pentru orice şir crescător $(a_n) \subset A \setminus \{a\}$ astfel încât $a_n \to a$ să avem $f(a_n) \to \ell_s$, de unde deducem că există $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \ell_s$. Pentru limita la dreapta, demonstraţia se face analog, considerând şiruri descrescătoare la a. $\square$

Observaţia 7.4.12 *Să observăm că dacă în cadrul teoremei anterioare avem că $a \in A$, atunci limitele laterale în a sunt finite. Acest lucru se întâmplă deoarece, dacă se consideră spre exemplu funcţia f crescătoare şi un şir crescător $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$ astfel încât $x_n \to a$, atunci şirul crescător $(f(x_n))$ are proprietatea că $f(x_n) \le f(a)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci limita acestuia, egală după cum am văzut cu ℓ_s, are proprietatea $\ell_s \le f(a) \in \mathbb{R}$. Cum şirul $(f(x_n))$ este crescător, el nu poate avea limita $-\infty$ în mod evident. Am arătat deci că $\ell_s \in \mathbb{R}$. Pentru $\ell_d \in \mathbb{R}$ demonstraţia este analoagă. În cazul în care f este descrescătoare, rezultatul se păstrează cu modificări evidente.*

7.5 Proprietăţi ale funcţiilor cu limită

Vom discuta în cele ce urmează diverse proprietăţi care apar în acest cadru al funcţiilor care au limită.

Definiţia 7.5.1 *Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ şi $B \subset A$. O funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ se numeşte* ***mărginită pe*** *B dacă mulţimea*

$$f(B) := \{y \in \mathbb{R}^p \mid \exists x \in B : f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in B\}$$

este mărginită. Cu alte cuvinte, f este mărginită pe B dacă există $r > 0$ astfel încât $f(B) \subset B(0, r)$ sau, echivalent, dacă există $r > 0$ astfel încât $\|f(x)\| < r$ pentru orice $x \in B$. Mulţimea $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$ se va nota uneori cu $\operatorname{Im} f$ şi se va numi ***imaginea*** *funcţiei f. În cazul în care o funcţie este mărginită pe întregul său domeniu de definiţie, se va numi simplu* ***mărginită***.

Exemplul 7.5.2 Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nu este mărginită deoarece, dacă am presupune că există $r > 0$ astfel încât $|f(x)| < r$ pentru orice $x \in (0, \infty)$ ar rezulta că $\dfrac{1}{r} < x$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. Luând $x := \dfrac{1}{r} \in (0, \infty)$, obţinem în mod evident o contradicţie.

Teorema 7.5.3 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ o funcţie şi $a \in A'$. Dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât f să fie mărginită pe $(U \cap A) \setminus \{a\}$.*

Demonstraţie. Folosind caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii într-un punct pentru $\varepsilon := 1$, ne rezultă existenţa lui $U = B(a, \delta) \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, să avem $\|f(x) - \ell\| < 1$, ceea ce implică $f(x) \in B(0, \|\ell\| + 1)$ pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, de unde concluzia. □

Teorema 7.5.4 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ şi $a \in A'$. Dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$, $\ell \neq 0$, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \neq 0$. În cazul $p = 1$, rezultatul rămâne valabil dacă $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Demonstraţie. Arătăm cazul general, situaţia $p = 1$ demonstrându-se analog.

Aplicăm caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a limitei cu $\varepsilon := \dfrac{\|\ell\|}{2} > 0$. Va exista atunci $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in (B(a, \delta) \cap A) \setminus \{a\}$, să avem

$$\begin{aligned} |\|f(x)\| - \|\ell\|| &\leq \|f(x) - \ell\| < \frac{\|\ell\|}{2}, \\ -\frac{\|\ell\|}{2} &< \|f(x)\| - \|\ell\| < \frac{\|\ell\|}{2}, \end{aligned}$$

de unde $\|f(x)\| > \dfrac{\|\ell\|}{2}$ pentru orice $x \in (B(a, \delta) \cap A) \setminus \{a\}$. Urmează concluzia. □

Dacă $p = 1$, rezultatul anterior se poate rafina astfel.

Corolarul 7.5.5 (Păstrarea semnului) *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, a \in A'$. Dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, $\ell > 0$ (respectiv $\ell < 0$), atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$).*

Demonstraţie. Se arată analog cu Teorema 7.5.4. □

Teorema 7.5.6 (Criteriul majorării) *Fie $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, k \geq 1$ şi $a \in A'$. Dacă există $\ell \in \mathbb{R}$ şi $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ şi $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, atunci există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.*

Demonstraţie. Să considerăm $(x_n) \subset A \setminus \{a\}, x_n \to a$. Cum $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ rezultă $g(x_n) \to 0$ şi deci, folosind faptul că

$$0 \leq |f(x_n) - \ell| \leq g(x_n),$$

rezultă din Criteriul cleştelui că $|f(x_n) - \ell| \to 0$. Aşadar, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, să avem

$$|f(x_n) - \ell| = ||f(x_n) - \ell| - 0| < \varepsilon.$$

Deci, $f(x_n) \to \ell$, de unde concluzia. □

Teorema 7.5.7 (Trecerea la limită în inegalităţi) *(i) Fie $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ astfel încât există $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $\lim_{x \to a} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ să avem $f(x) \leq g(x)$, atunci $\ell_1 \leq \ell_2$.*

(ii) Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $a \in A', \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ astfel încât există $\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ să avem $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ atunci $\alpha \leq \ell \leq \beta$.

Demonstraţie. (i) Considerăm $(x_n) \subset A \setminus \{a\}, x_n \to a$. Deoarece $\lim_{x \to a} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $\lim_{x \to a} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, vom avea că $f(x_n) \to \ell_1$ şi $g(x_n) \to \ell_2$. Cum $x_n \to a$, rezultă că, pentru orice n suficient de mare, vom avea $x_n \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ şi deci $f(x_n) \leq g(x_n)$. Concluzia urmează folosind teorema de trecere la limită în inegalităţi de la şiruri.

(ii) Se aplică punctul (i), considerând pe rând una dintre funcţii ca fiind funcţia constant egală cu α, apoi cu β. □

Corolarul 7.5.8 (Criteriul cleştelui) *Fie $f, g, h : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ astfel încât există $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Dacă există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ să avem $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, atunci există $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$.*

Are loc de asemenea următoarea rafinare a Teoremei 7.5.7 în cazul particular în care una dintre funcţii are limită infinită.

Teorema 7.5.9 (Criteriu de majorare/minorare) *Fie $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ şi există $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (respectiv $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$). Dacă există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$ să avem $f(x) \leq g(x)$, atunci există $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ (respectiv $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$).*

Demonstraţie. Se folosesc caracterizările date pentru fiecare situaţie în parte. Spre exemplu, să arătăm afirmaţia în cazul $a \in \mathbb{R}^k$ şi $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$. Atunci, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\| < \delta : f(x) > \varepsilon$. Să considerăm $\delta_0 > 0$ suficient de mic astfel încât $B(a, \delta_0) \subset B(a, \delta) \cap U$, unde U este vecinătatea care apare în enunţul teoremei. Atunci, pentru orice $x \in (B(a, \delta_0) \cap A) \setminus \{a\}$, vom avea că $g(x) \geq f(x) > \varepsilon$, de unde, folosind din nou caracterizarea $\varepsilon - \delta$, rezultă că $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Celelate cazuri se arată analog. □

Teorema 7.5.10 *Fie $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, a \in A'$. Dacă $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât g este mărginită pe U, atunci există $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = 0$.*

Demonstraţie. Fie $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Există aşadar $n_U \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_U$, să avem $x_n \in U$. Rezultă că există $r > 0$ astfel încât $|g(x_n)| < r$ pentru orice $n \geq n_U$. Cum $f(x_n) \to 0$, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, există $n_\varepsilon \geq n_U$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, $|f(x_n)| < \dfrac{\varepsilon}{r}$ şi $|g(x_n)| < r$. Deci, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, avem că $|f(x_n) \cdot g(x_n)| < \dfrac{\varepsilon}{r} \cdot r = \varepsilon$, de unde deducem că şirul $(f(x_n) \cdot g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ are limita 0. De aici, concluzia rezultă folosind caracterizarea cu şiruri a limitei. □

Rezultatul următor se referă la calculul limitelor în cazul compunerii de funcţii.

Teorema 7.5.11 *Fie $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}^p, a \in A', b \in B'$ şi funcţiile $f : B \to \mathbb{R}^m$, $g : A \to B \setminus \{b\}$. Dacă $\lim\limits_{y \to b} f(y) = \ell$ şi $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, atunci*

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \ell.$$

Demonstraţie. Să observăm că $f \circ g : A \to \mathbb{R}^m$ este bine definită şi că $a \in A'$, deci are sens să vorbim de limita funcţiei $f \circ g$ în a. Fie acum $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Cum $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, folosind Teorema 7.1.4, rezultă că $g(x_n) \to b$. Cum $g : A \to B \setminus \{b\}$, avem că şirul $(g(x_n)) \subset B \setminus \{b\}$ are proprietatea $g(x_n) \to b$. Utilizând acum $\lim\limits_{y \to b} f(y) = \ell$ şi Teorema 7.1.4, rezultă $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to \ell$. Obţinem aşadar concluzia, aplicând din nou caracterizarea cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct. □

Observaţia 7.5.12 *Ipoteza $g : A \to B \setminus \{b\}$ este esenţială în teorema de mai sus. Într-adevăr, să considerăm funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin*

$$f(y) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } y \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } y = 0 \end{cases} \quad \text{şi } g(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Să luăm $a = b = 0$. Avem $\lim\limits_{y \to 0} f(y) = 1$ şi $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. Funcţia $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este dată prin

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aşadar, $\lim\limits_{x \to 0} (f \circ g)(x) = 0 \neq 1 = \lim\limits_{y \to 0} f(y)$.

În cazul în care funcţiile considerate au valori reale, putem arăta rezultate referitoare la operaţii cu limite de funcţii. Demonstraţia se va realiza folosind, în fiecare situaţie în parte, caracterizările cu şiruri formulate anterior. Astfel, considerând $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, putem defini funcţiile $f + g$, αf, $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$, $\dfrac{f}{g} : A \setminus \{x \in A \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, $f^g : D \subset A \to \mathbb{R}$ prin

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x), \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha \cdot f(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x), \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)} \text{ şi} \\ (f^g)(x) &:= f(x)^{g(x)} \end{aligned} \tag{7.7}$$

pentru fiecare x din domeniul de definiţie al fiecărei funcţii.

Teorema 7.5.13 (Operaţii cu limite de funcţii) *Fie funcţiile $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $a \in A'$. Presupunem că există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(i) Dacă suma $\ell_1 + \ell_2$ a limitelor are sens, atunci funcţia $f+g$ are limită în a şi are loc relaţia:

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2 = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

(caz exceptat: una dintre limitele ℓ_1, ℓ_2 este egală cu $+\infty$, iar cealaltă cu $-\infty$).

(ii) Funcţia αf are limită în a şi au loc relaţiile:

$$\lim_{x\to a}(\alpha f)(x) = \alpha \cdot \ell_1 = \alpha \cdot \lim_{x\to a} f(x), \text{ dacă } \alpha \neq 0,$$
$$\lim_{x\to a}(\alpha f)(x) = 0, \text{ dacă } \alpha = 0.$$

(iii) Dacă produsul $\ell_1 \cdot \ell_2$ al limitelor are sens, atunci funcţia $f \cdot g$ are limită în a şi are loc relaţia:

$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2 = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

(cazuri exceptate: una dintre limitele ℓ_1, ℓ_2 este egală cu 0, iar cealaltă este $+\infty$ sau $-\infty$).

(iv) Dacă raportul $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ al limitelor are sens şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât funcţia $\dfrac{f}{g}$ este bine definită pe $(U \cap A) \setminus \{a\}$, atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ are limită în a şi are loc relaţia:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

(cazuri exceptate: $\ell_2 = 0$, sau ambele limite ℓ_1, ℓ_2 sunt infinite).

(v) Dacă $\ell_1^{\ell_2}$ are sens şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât funcţia f^g este bine definită pe $(U \cap A) \setminus \{a\}$, atunci funcţia f^g are limită în a şi are loc relaţia:

$$\lim_{x\to a}\left(f^g\right)(x) = \ell_1^{\ell_2} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

(cazuri exceptate: $(\ell_1, \ell_2) = (0,0)$, $(\ell_1, \ell_2) = (+\infty, 0)$, $(\ell_1, \ell_2) = (1, +\infty)$).

Demonstraţie. Fie $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Cum $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, folosind caracterizările cu şiruri ale limitei în fiecare caz în parte, rezultă că şirurile de numere reale $(f(x_n))$ şi $(g(x_n))$ au proprietatea că $f(x_n) \to \ell_1$ şi $g(x_n) \to \ell_2$. Folosind teorema de la operaţii cu şiruri convergente, rezultă că şirurile $(f(x_n) + g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\alpha \cdot f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(f(x_n)\cdot g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(f(x_n)^{g(x_n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt convergente respectiv la $\ell_1 + \ell_2$, $\alpha \cdot \ell_1$, $\ell_1 \cdot \ell_2$, $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, $\ell_1^{\ell_2}$ de unde rezultă concluzia. □

Teorema 7.5.14 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $a \in A'$ astfel încât există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ şi există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $\dfrac{1}{f}$ să fie bine definită pe $(U \cap A) \setminus \{a\}$.*

(i) Dacă $f(x) > 0$ pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, atunci există $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

(ii) Dacă $f(x) < 0$ pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, atunci există $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Demonstraţie. Rezultă folosind caracterizările cu şiruri. □

7.6 Asimptote

Cele prezentate anterior permit introducerea noţiunilor de asimptote la graficul unei funcţii. Intuitiv, asimptotele sunt drepte faţă de care graficul unei funcţii se "apropie" oricât de mult, dar nu le "atinge".

Definiţia 7.6.1 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $+\infty$ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A.*

(i) Spunem că dreapta $y = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, este ***asimptotă orizontală la*** *$+\infty$ (respectiv $-\infty$) pentru funcţia f dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$).*

(ii) Spunem că dreapta $y = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, este ***asimptotă oblică la*** *$+\infty$ (respectiv $-\infty$) pentru funcţia f, dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)-mx-n| = 0$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x)-mx-n| = 0$).*

Se pot arăta următoarele.

Teorema 7.6.2 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $+\infty$ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A.*

(i) Dreapta $y = mx + n, m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, este asimptotă oblică la $+\infty$ (respectiv $-\infty$) pentru funcţia f dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = n$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = n$).

(ii) Dacă f admite o asimptotă orizontală la $+\infty$ (respectiv $-\infty$), atunci nu admite asimptote oblice la $+\infty$ (respectiv $-\infty$).

Demonstraţie. (i) Să presupunem că există $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x) - mx - n| = 0$. Atunci funcţia $|f(x) - mx - n|$ este mărginită pe o vecinătate a lui $+\infty$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, ne rezultă folosind Teorema 7.5.10 că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|f(x) - mx - n|}{x} = 0$. Cum, folosind din nou Teorema 7.5.10, ştim că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{|n|}{x} = 0$, urmează că $\lim\limits_{x\to\infty} \left|\dfrac{f(x)}{x} - m\right| = 0$, de unde $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$. De asemenea, din $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x) - mx - n| = 0$ ne rezultă uşor că $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = n$. Cum reciproca afirmaţiei este evidentă, avem că (i) este complet rezolvat.

(ii) Să presupunem că există $y_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ şi deci, folosind (ii), avem că nu există asimptote oblice la $+\infty$. $\square$

Să trecem acum la cazul asimptotelor verticale.

Definiţia 7.6.3 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in \mathbb{R}$.*

(i) Dacă $a \in A'_s$, spunem că dreapta $x = a$ este ***asimptotă verticală la stânga*** *pentru funcţia f dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ sau $-\infty$.*

(ii) Dacă $a \in A'_d$, spunem că dreapta $x = a$ este ***asimptotă verticală la dreapta*** *pentru funcţia f dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ sau $-\infty$.*

(iii) Dacă $a \in A'$, spunem că dreapta $x = a$ este ***asimptotă verticală*** *pentru funcţia f dacă ea este asimptotă verticală la stânga sau asimptotă verticală la dreapta pentru f.*