Curs 8

Continuitate

8.1 Definiţie. Proprietăţi generale

Definiţia 8.1.1 *Spunem că funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ ***este continuă în punctul*** $a \in A$ *dacă pentru orice vecinătate* $V \in \mathcal{V}(f(a))$*, există o vecinătate* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât, pentru orice* x *din* $U \cap A$*, să avem* $f(x) \in V$*, sau, formalizat,*

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a) : f(U \cap A) \subset V. \tag{8.1}$$

Dacă funcţia f *nu este continuă în punctul* $a \in A$*, vom spune că* f *este* ***discontinuă în punctul*** a*, sau că* a *este un* ***punct de discontinuitate*** *pentru funcţia* f*.*

Vom spune că funcţia f *este* ***continuă pe o mulţime*** $B \subset A$ *dacă* f *este continuă în orice punct* $x \in B$*.*

Observaţia 8.1.2 *Remarcăm mai întâi faptul că noţiunea de continuitate, spre deosebire de cea de limită, nu are sens decât pentru punctele mulţimii* A*, domeniul de definiţie al funcţiei* f*.*

De asemenea, să observăm că, dacă a *este un punct izolat al mulţimii* A*, atunci funcţia* f *este continuă în* a*. Într-adevăr, în acest caz există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* $U \cap A = \{a\}$*. Atunci,* $f(U \cap A) = \{f(a)\} \subset V$*, pentru orice* $V \in \mathcal{V}(f(a))$*.*

Aşadar, problema continuităţii se va pune doar în punctele de acumulare ale mulţimii A. Examinând definiţia de mai sus, observăm similitudinea cu definiţia limitei unei funcţii într-un punct, ceea ce ne permite enunţarea următoarei teoreme de caracterizare, a cărei demonstraţie evidentă o omitem.

Teorema 8.1.3 (Caracterizare a continuităţii cu limita) *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A' \cap A$*. Atunci* f *este continuă în* a *dacă şi numai dacă există* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$*.*

Am observat, în cursul anterior, că noţiunea de limită admite unele caracterizări, analitice sau prin intermediul şirurilor. Acest lucru este valabil şi în cazul continuităţii, iar demonstraţiile se bazează pe teorema anterioară şi pe teoremele respective de caracterizare din cazul limitei.

Teorema 8.1.4 (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a continuităţii) *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A$*. Atunci* f *este continuă în punctul* a *dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_{\mathbb{R}^k} < \delta : \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \tag{8.2}$$

Teorema 8.1.5 (Caracterizarea cu şiruri a continuităţii) *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A$. Atunci f este continuă în punctul a dacă şi numai dacă*

$$\forall (x_n) \subset A, x_n \to a \text{ implică } f(x_n) \to f(a). \tag{8.3}$$

Observaţia 8.1.6 *Uneori, ca în cazul limitei, una din relaţiile (8.2), respectiv (8.3), se consideră a fi definiţia continuităţii funcţiei f în punctul a, numite şi* ***definiţia $\varepsilon - \delta$ a continuităţii unei funcţii într-un punct,*** *respectiv* ***definiţia cu şiruri a continuităţii unei funcţii într-un punct.***

Exerciţiul 8.1 Să se arate că funcţia:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}^2$.
Soluţie. În orice punct $(a,b) \neq (0,0)$, funcţia este continuă, aşa cum rezultă cu uşurinţă din definiţia cu şiruri.

Pentru a dovedi continuitatea în $(0,0)$, observăm că:

$$\left|x^3\right| \leq \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} \text{ şi } \left|y^3\right| \leq \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}},$$

de unde rezultă:

$$|f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Dacă $(x_n, y_n) \to (0,0)$, atunci $\sqrt{x_n^2 + y_n^2} \to 0$, deci:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Aşadar, f este continuă şi în $(0,0)$.

Teorema de caracterizare cu şiruri a continuităţii şi teorema ce dă legătura dintre limita unei funcţii vectoriale şi limitele funcţiilor coordonate ne permit caracterizarea continuităţii unei funcţii vectoriale de variabilă vectorială prin intermediul proprietăţii similare a funcţiilor componente.

Teorema 8.1.7 *Fie $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k \geq 1, p > 1$ şi $a \in A$. Atunci f este continuă în punctul a dacă şi numai dacă funcţiile $f_1, f_2, ..., f_p : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sunt continue în a.*

Teorema 8.1.8 *Dacă $f : A \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^p$, $A \subset \mathbb{R}^k$, $a \in A'$ şi există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$, atunci funcţia*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \setminus \{a\} \\ \ell, & x = a \end{cases}$$

este continuă în a ($\widetilde{f}$ se numeşte ***prelungirea prin continuitate*** *a funcţiei f).*

Demonstraţie. Se foloseşte caracterizarea continuităţii prin intermediul limitei. □

Exemplul 8.1.9 Funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ se poate prelungi prin continuitate în 0, deoarece $0 \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})'$ şi există $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R}$.

8.2 Continuitate laterală. Discontinuităţi

Asemănător cu cazul limitelor de funcţii, pentru a putea vorbi de continuitate laterală, avem nevoie de funcţii de variabilă reală.

Definiţia 8.2.1 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A$.*

(i) Spunem că f este ***continuă la stânga*** *în a dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât dacă $x \in U \cap A_s$, să avem $f(x) \in V$.*

(ii) Spunem că f este ***continuă la dreapta*** *în a dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât dacă $x \in U \cap A_d$, să avem $f(x) \in V$.*

Ţinând seama de definiţia de mai sus şi de definiţiile limitelor laterale, deducem uşor următoarea teoremă de caracterizare a continuităţii laterale.

Teorema 8.2.2 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A$.*

(i) Dacă $a \in A'_s$, atunci f este continuă la stânga în a dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$.

(ii) Dacă $a \in A'_d$, atunci f este continuă la dreapta în a dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$.

De asemenea, se poate formula o caracterizare a continuităţii laterale prin intermediul şirurilor.

Teorema 8.2.3 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A$.*

(i) Dacă $a \in A'_s$, atunci f este continuă la stânga în a dacă şi numai dacă

$$\forall (x_n) \subset A_s \text{ crescător, convergent la } a, \text{ avem că } f(x_n) \to f(a).$$

(ii) Dacă $a \in A'_d$, atunci f este continuă la dreapta în a dacă şi numai dacă

$$\forall (x_n) \subset A_d \text{ descrescător, convergent la } a, \text{ avem că } f(x_n) \to f(a).$$

Ţinând cont de caracterizarea limitei prin intermediul limitelor laterale, obţinem de asemenea următorul rezultat.

Teorema 8.2.4 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A \cap A'$. Atunci f este continuă în a dacă şi numai dacă f este continuă la stânga şi la dreapta în a.*

Noţiunile de limite laterale ne permit de asemenea, clasificarea punctelor de discontinuitate în mai multe categorii.

Definiţia 8.2.5 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A$ punct de discontinuitate pentru f. Punctul a se numeşte* ***punct de discontinuitate de specia I*** *dacă există limitele laterale în a şi sunt finite. În caz contrar vom spune că a este* ***punct de discontinuitate de specia a II-a.***

Teorema 8.2.6 *Dacă $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie monotonă, atunci f poate avea doar discontinuităţi de specia I.*

Demonstraţie. Fie $a \in A$. Dacă a este punct izolat, atunci am văzut mai sus că f este continuă în a. Dacă $a \in A'$, atunci aplicăm teorema ce dă limitele funcţiilor monotone şi obţinem că limitele laterale în punctul a sunt finite. În acest caz, dacă f nu este continuă în a, atunci va avea în a o discontinuitate de specia I. $\square$

8.3 Proprietăţi ale funcţiilor continue

Ne vom referi în această secţiune la diverse proprietăţi legate de continuitatea funcţiilor.

Teorema 8.3.1 (Compunerea funcţiilor continue) *Fie $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}^p$ şi funcţiile $f : A \to B,\ g : B \to \mathbb{R}^m, k, p, m \geq 1$.*

(i) Dacă f este continuă în $a \in A$, iar g este continuă în $f(a)$, atunci $g \circ f$ este continuă în a.

(ii) Dacă f este continuă pe A, iar g este continuă pe B, atunci $g \circ f$ este continuă pe A.

Demonstraţie. Vom arăta (i), de unde rezultă imediat (ii). Să considerăm un şir arbitrar $(x_n) \subset A, x_n \to a$. Atunci, cum f este continuă, avem că $f(x_n) \to f(a)$. Cum $(f(x_n)) \subset B$, iar f este continuă, rezultă $g(f(x_n)) \to g(f(a))$. Folosind încă o dată caracterizarea cu şiruri a continuităţii, deducem concluzia. □

Având date $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, considerăm următoarele funcţii: $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g) : A \to \mathbb{R}$ date prin

$$\begin{aligned} |f|(x) &:= |f(x)|, \\ \max(f,g)(x) &:= \max\{f(x), g(x)\}, \\ \min(f,g)(x) &:= \min\{f(x), g(x)\}, \ \forall x \in A. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Deducem acum un rezultat referitor la operaţii algebrice cu funcţii continue.

Teorema 8.3.2 (Operaţii cu funcţii continue) *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi funcţiile $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ continue pe A. Atunci:*

(i) $f + g$, λf sunt funcţii continue pe A;

(ii) $f \cdot g$ este continuă pe A;

(iii) $\dfrac{f}{g}$ este continuă pe mulţimea $A \setminus \{x \in A \mid g(x) = 0\}$;

(iv) $|f|, \min(f, g), \max(f, g)$ sunt funcţii continue pe A.

Demonstraţie. Pentru (i)-(iii), se utilizează caracterizarea cu şiruri a continuităţii şi operaţiile cu şiruri convergente. Cum funcţia $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă, folosim Teorema 8.3.1 pentru a arăta că $|f| = |\cdot| \circ f$ este continuă. În final, avem în vedere că $\min(f, g) = \dfrac{1}{2}(f + g - |f - g|)$, iar $\max(f, g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ şi folosim cele demonstrate anterior pentru a obţine concluzia. □

Ţinând seama de proprietăţile demonstrate în secţiunea anterioară şi de caracterizarea cu limită a continuităţii, putem deduce rezultate analoage în cazul funcţiilor continue, ale căror demonstraţii le omitem fiind foarte asemănătoare cu cele din cazul funcţiilor cu limită.

Teorema 8.3.3 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ o funcţie şi $a \in A$. Dacă f este continuă în a, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât f să fie mărginită pe $U \cap A$.*

Teorema 8.3.4 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ şi $a \in A$ astfel încât $f(a) \neq 0$. Dacă f este continuă în a, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) \neq 0$.*

Corolarul 8.3.5 (Păstrarea semnului) *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, a \in A$. Dacă f este continuă în a şi $f(a) > 0$ (respectiv, $f(a) < 0$), atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$).*

Teorema 8.3.6 (Funcţii continue pe mulţimi compacte) *Dacă $A \subset \mathbb{R}^k$ este o mulţime compactă şi $f : A \to \mathbb{R}^p$ este continuă, atunci $f(A)$ este compactă.*

Demonstraţie. Vom folosi caracterizarea cu şiruri a mulţimilor compacte. Fie un şir oarecare $(y_n) \subset f(A)$. Atunci, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, va exista $x_n \in A$ astfel încât $f(x_n) = y_n$. Fiindcă mulţimea A este compactă şi $(x_n) \subset A$, există (x_{n_p}) un subşir al şirului (x_n) convergent la $x \in A$. Folosind acum caracterizarea cu şiruri a continuităţii funcţiei f, deducem că $f(x_{n_p}) \to f(x) \in f(A)$. Cum $\left(y_{n_p}\right)$ este subşir al şirului (y_n), şi $y_{n_p} \to f(x) \in f(A)$, rezultă că mulţimea $f(A)$ este compactă. □

Urmează un rezultat central în teoria funcţiilor continue.

Teorema 8.3.7 (Weierstrass) *Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este continuă şi A este o mulţime compactă, atunci f este mărginită pe A şi îşi atinge marginile: există $a, b \in A$, astfel încât $\sup\limits_{x \in A} f(x) = f(a)$ şi $\inf\limits_{x \in A} f(x) = f(b)$.*

Demonstraţie. Conform teoremei precedente, $f(A)$ este compactă, deci mărginită. Prin urmare, funcţia f este mărginită pe A. Fie $\alpha = \sup f(A) \in \mathbb{R}$. Din teorema de caracterizare a marginii superioare, există un şir $(y_n) \subset f(A)$ astfel încât $y_n \to \alpha$. Cum $f(A)$ este închisă, $\alpha \in f(A)$, deci există $a \in A$ astfel încât $f(a) = \alpha$. Pentru marginea inferioara se procedează analog. □

8.4 Funcţii uniform continue

Să observăm acum că, dacă o funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este continuă pe o mulţime $B \subset A$, acest lucru se poate scrie echivalent:

$$\forall x \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0, \forall y \in A, \|y - x\| < \delta : \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon. \tag{8.5}$$

Cu alte cuvinte, δ ales depinde atât de ε ales, cât şi de fiecare punct x al mulţimii B. Vom introduce în continuare o altă noţiune de continuitate, în care δ poate fi ales acelaşi pentru toate punctele mulţimii B.

Definiţia 8.4.1 *O funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ se numeşte* ***uniform continuă*** *pe mulţimea $B \subset A$ dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in B, \forall y \in A, \|y - x\| < \delta : \|f(y) - f(x)\| < \varepsilon. \tag{8.6}$$

Din definiţie, rezultă imediat că dacă f este uniform continuă pe B şi $C \subset B$, atunci f este uniform continuă pe C. De asemenea, să remarcăm că noţiunea de uniformă continuitate se defineşte pe o mulţime, fiind în general o proprietate mai tare decât continuitatea: orice funcţie uniform continuă pe o mulţime este continuă pe acea mulţime. Reciproca nu este în general valabilă, după cum o arată următoarele exemple.

Exemplul 8.4.2 Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Evident, f este continuă pe $(0, \infty)$. Să presupunem acum că f ar fi uniform continuă pe $(0, \infty)$. Atunci, pentru $\varepsilon := 1$, ar exista $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ cu $|x - y| < \delta$, am avea $|f(x) - f(y)| = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right| < 1$.

Fie n suficient de mare astfel încât $\frac{1}{n(n+1)} < \delta$. Pentru $x := \frac{1}{n+1}$, $y := \frac{1}{n}$, vom avea $|x-y| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta$. De asemenea, $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = |(n+1)-n| = 1$, contradicţie. Aşadar, f nu este uniform continuă pe $(0,\infty)$.

Exemplul 8.4.3 Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$. Se observă cu uşurinţă că f este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Fie acum $\varepsilon := 1$. Pentru $\delta > 0$ arbitrar, să considerăm $x = y = \frac{\delta}{8} + \frac{1}{\delta}$, $u = v = -\frac{\delta}{8} + \frac{1}{\delta}$. Atunci $|x-u| = |y-v| = \frac{\delta}{4}$ şi $x^2 - u^2 = y^2 - v^2 = \frac{1}{2}$. Deci,

$$\begin{aligned}
&\|(x,y)-(u,v)\|_2 = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} \le |x-u| + |y-v| = \frac{\delta}{2} < \delta \text{ şi} \\
&|f(x,y) - f(u,v)| = \left|(x^2+y^2) - (u^2+v^2)\right| = 1.
\end{aligned}$$

Rezultă că f nu este uniform continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Discutăm în continuare despre unele clase de funcţii uniform continue.

Definiţia 8.4.4 *(i) O aplicaţie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ se numeşte **hölderiană,** sau **funcţie Hölder** pe A dacă există o constantă reală $L > 0$ şi $m \in (0,\infty)$ astfel încât $\|f(x) - f(y)\| \le L\|x-y\|^m$ pentru orice $x, y \in A$.*

*(ii) O aplicaţie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ se numeşte **lipschitziană,** sau **funcţie Lipschitz** pe A dacă există o constantă reală $L > 0$ astfel încât $\|f(x) - f(y)\| \le L\|x-y\|$ pentru orice $x, y \in A$.*

Cu alte cuvinte, o aplicaţie lipschitziană este o aplicaţie hölderiană cu $m = 1$. De asemenea, se observă că orice contracţie este aplicaţie lipschitziană.

Exemplul 8.4.5 Aplicaţia $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ este lipschitziană, deoarece

$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x-y\|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^k.$$

Exemplul 8.4.6 Aplicaţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ este hölderiană cu $m = \frac{1}{2}$. Într-adevăr, vom arăta că

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \le \sqrt{|x-y|}, \ \forall x, y \in [0,\infty).$$

Să observăm că este suficient să arătăm relaţia anterioară pentru $x > y$, celălalt caz rezultând simetric. Atunci

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \le \sqrt{|x-y|} \Leftrightarrow \sqrt{x} \le \sqrt{y} + \sqrt{x-y} \\
&\Leftrightarrow x \le y + x - y + 2\sqrt{y(x-y)} \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{y(x-y)}, \text{ adevărat.}
\end{aligned}$$

Teorema 8.4.7 *Orice funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ hölderiană pe A este uniform continuă pe A.*

Demonstraţie. Într-adevăr, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, alegem $\delta(\varepsilon) := \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{m}} > 0$. Atunci, pentru orice $x, y \in A$ cu $\|x-y\| < \delta$, ne va rezulta

$$\|f(x) - f(y)\| \le L\|x-y\|^m < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

de unde concluzia. □

Aşadar, funcţiile prezentate în cele două exemple anterioare sunt uniform continue pe domeniile lor de definiţie.

Arătăm acum că uniforma continuitate a funcţiilor cu valori vectoriale este echivalentă cu proprietatea similară a funcţiilor componente.

Teorema 8.4.8 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, p > 1$ şi $B \subset A$. Atunci f este uniform continuă pe B dacă şi numai dacă funcţiile componente $f_1, f_2, ..., f_p : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sunt uniform continue pe B.*

Demonstraţie. Fie $\|\cdot\|$ o normă pe $\mathbb{R}^p$ în raport cu care am considerat definiţia uniformei continuităţi a funcţiei f. Deoarece toate normele pe spaţiul $\mathbb{R}^p$ sunt echivalente, există $\alpha, \beta > 0$ astfel încât, pentru orice element $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$, să avem

$$\alpha \max_{i=\overline{1,p}} |x_i| \leq \|(x_1, x_2, ..., x_p)\| \leq \beta \sum_{i=1}^{p} |x_i| .$$

" $\Rightarrow$ " Dacă f este uniform continuă pe B, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, dacă notăm cu $\varepsilon' := \alpha\varepsilon$, obţinem existenţa lui $\delta = \delta(\varepsilon') = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in B$ şi orice $y \in A$ cu $\|y - x\| < \delta$, să avem

$$\max_{i=\overline{1,p}} |f_i(y) - f_i(x)| \leq \alpha^{-1} \|f(y) - f(x)\| < \alpha^{-1}\varepsilon' = \varepsilon,$$

de unde rezultă că f_i sunt uniform continue pe B pentru $i = \overline{1,p}$.

" $\Leftarrow$ " Dacă toate funcţiile componente sunt uniform continue pe B, pentru orice $\varepsilon > 0$, dacă notăm $\varepsilon' := p^{-1}\beta^{-1}\varepsilon$, vom găsi $\delta_i > 0$, $i = \overline{1,p}$, astfel încât, pentru orice $x \in B$ şi orice $y \in A$ cu $\|y - x\| < \delta_i$, să avem

$$|f_i(y) - f_i(x)| \leq \varepsilon'.$$

Atunci, notând $\delta := \min\{\delta_1, ..., \delta_p\} > 0$, vom avea că, pentru orice $x \in B$ şi orice $y \in A$ cu $\|y - x\| < \delta$,

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \beta \sum_{i=1}^{p} |f_i(y) - f_i(x)| < \beta p \varepsilon' = \varepsilon,$$

adică f este uniform continuă pe mulţimea B. □

În cazul funcţiilor continue pe mulţimi compacte, putem deduce că sunt uniform continue.

Teorema 8.4.9 (Cantor) *O funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ continuă pe mulţimea compactă $B \subset A$ este uniform continuă pe B.*

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că f nu este uniform continuă pe mulţimea B. Atunci

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in B, \exists y_\delta \in A, \|y_\delta - x_\delta\| < \delta : \|f(y_\delta) - f(x_\delta)\| \geq \varepsilon.$$

Aşadar, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $x_n \in B$ şi $y_n \in A$ cu $\|y_n - x_n\| < \dfrac{1}{n}$, astfel încât $\|f(y_n) - f(x_n)\| \geq \varepsilon$. Cum $(x_n) \subset B$ şi B este compactă, rezultă că există un subşir (x_{n_j}) al şirului (x_n), convergent la un element $x \in B$. Deoarece $x_{n_j} \to x$ pentru $j \to \infty$ şi $\left\|y_{n_j} - x_{n_j}\right\| < \dfrac{1}{n_j} \leq \dfrac{1}{j}$ pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $y_{n_p} \to x$. Folosind acum continuitatea funcţiei f (caracterizarea cu şiruri), obţinem că $f(x_{n_j}) \to f(x)$ şi $f(y_{n_j}) \to f(x)$ pentru $j \to \infty$. Ştim însă că $\left\|f(y_{n_j}) - f(x_{n_j})\right\| \geq \varepsilon$, $\forall p \in \mathbb{N}$. Trecând la limită pentru $j \to \infty$ în relaţia anterioară, obţinem contradicţia $0 \geq \varepsilon$. Atunci presupunerea făcută este falsă, deci f este uniform continuă pe mulţimea B. □

Teorema 8.4.10 *Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ mărginită şi $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ o funcţie continuă pe A. Atunci f este uniform continuă pe A dacă şi numai dacă f poate fi prelungită prin continuitate la $\overline{A}$.*

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Să presupunem că f este uniform continuă pe A. Considerăm $x \in \overline{A} \setminus A$ arbitrar şi arătăm că f poate fi prelungită prin continuitate în x.

Folosind uniforma continuitate a funcţiei f, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, găsim $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $u, v \in A$ cu $\|u - v\| < \delta$, să avem $\|f(u) - f(v)\| < \varepsilon$.

Cum $x \in \overline{A}$, există un şir $(x_n) \subset A$ convergent la $x \in \mathbb{R}^k$. Prin urmare, (x_n) este şir Cauchy, deci pentru $\delta > 0$ găsit mai sus, există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $m, n \geq n_0$, să avem $\|x_m - x_n\| < \delta$. Atunci, pentru orice $m, n \geq n_0$, avem că $\|f(x_m) - f(x_n)\| < \varepsilon$, deci $(f(x_n))$ este şir Cauchy în $f(A)$. Prin urmare, există $y \in \mathbb{R}^p$ astfel încât $f(x_n) \to y$.

Fie acum un alt şir $(u_n) \subset A$ convergent la x. Atunci, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar şi n suficient de mare, vom avea că $\|x_n - u_n\| < \delta$, unde δ este ales din definiţia uniformei continuităţi, şi prin urmare $\|f(x_n) - f(u_n)\| < \varepsilon$. Deducem $\|f(x_n) - f(u_n)\| \to 0$ pentru $n \to \infty$, şi cum $f(x_n) \to y$, vom avea că $f(u_n) \to y$. Aşadar, pentru orice şir $(u_n) \subset A \setminus \{x\}$, $u_n \to x$, am obţinut $f(u_n) \to y$. Acest lucru arată că există $\lim\limits_{u \to x} f(x) = y \in \mathbb{R}^p$, deci putem prelungi prin continuitate funcţia f în punctul x.

" $\Leftarrow$ " Presupunem acum că funcţia f poate fi prelungită prin continuitate la $\overline{A}$. Cum A este mărginită, ne va rezulta că $\overline{A}$ este mărginită şi închisă, deci compactă. Prin urmare, funcţia $\widetilde{f}$ este continuă pe mulţimea compactă $\overline{A}$, aşadar e uniform continuă pe $\overline{A}$ folosind Teorema lui Cantor. Deducem atunci că $\widetilde{f} = f$ este uniform continuă pe A. □

Exerciţiul 8.2 Să se arate că funcţia

$$f : (1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

nu este uniform continuă pe $(1, \infty)$.

Soluţie. Trebuie să arătăm că $\exists \varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\forall \delta > 0$, $\exists\, x'_\delta, x''_\delta \in (1, \infty)$ cu proprietatea că $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$ şi $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

Evident, $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x - 1}$, $x \in (1, \infty)$.

Fie $\varepsilon_0 = 1$, $\delta > 0$ oarecare şi $n_\delta \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\dfrac{1}{n_\delta(n_\delta + 1)} < \delta$. Alegem $x'_\delta = 1 + \dfrac{1}{n_\delta + 1}$ şi $x''_\delta = 1 + \dfrac{1}{n_\delta}$ şi observăm că $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$, iar

$$|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| = |x'_\delta - x''_\delta + 2| = 2 - \frac{1}{n_\delta(n_\delta + 1)} > 1 = \varepsilon_0,$$

deci f nu este uniform continuă pe $(1, \infty)$.

Exerciţiul 8.3 Să se arate că funcţia $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{x + 1}{y}$ nu este uniform continuă.

Soluţie. Considerăm şirurile $(x_n, y_n) = \left(1, \frac{1}{n}\right)$, $(x'_n, y'_n) = \left(1, \frac{2}{n}\right)$ şi evident avem

$$\|(x_n, y_n) - (x'_n, y'_n)\| = \frac{1}{n} \to 0, \text{ iar}$$
$$|f(x_n, y_n) - f(x'_n, y'_n)| = n \to \infty.$$

Folosind definiţia rezultă imediat că f nu este uniform continuă.

8.5 Proprietatea lui Darboux

Funcţiile continue pe un interval au proprietatea importantă că nu pot trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare, adică dacă iau două valori diferite atunci iau toate valorile cuprinse între ele. Această proprietate a funcţiilor continue se numeşte proprietatea lui Darboux.

Definiţia 8.5.1 *O funcţie f definită pe un interval I* ***are proprietatea lui Darboux*** *dacă, oricare ar fi punctele $a, b \in I$, $a < b$, şi oricare ar fi numărul λ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$, există un punct c_λ cuprins între a şi b astfel încât $f(c_\lambda) = \lambda$.*

Altfel spus, $f : E \to \mathbb{R}$ are proprietatea lui Darboux pe E dacă şi numai dacă imaginea oricărui interval $I \subset E$ prin funcţia f este un interval.

Teorema 8.5.2 *Fie $f : E \to \mathbb{R}$. Dacă f are proprietatea lui Darboux pe intervalul $I \subset E$, atunci $f(I)$ este un interval.*

Teorema 8.5.3 (Cauchy) *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continuă, astfel încât $f(a) \cdot f(b) < 0$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f(c) = 0$.*

Demonstraţie. Presupunem că $f(a) < 0$ şi $f(b) > 0$. Dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ atunci $c = \frac{a+b}{2}$ şi demonstraţia este terminată.

Dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ facem următoarele convenţii:

- dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, atunci notăm $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$;

- dacă $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ atunci notăm $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$.

Cu intervalul $[a_1, b_1]$ procedăm în mod analog, obţinând şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pentru care $f(a_n) < 0$ şi $f(b_n) > 0$. dacă există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = 0$ atunci $c = \frac{a_n+b_n}{2}$ şi demonstraţia este terminată.

Dacă nu, se observă că cele două şiruri sunt convergente către aceeaşi limită $c, c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, deoarece

1. $a_1 < a_2 < .... < a_2 < ... < b_n < ... < b_1$,
2. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$. Deci $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$, $c \in (a, b)$

Funcţia f fiind continuă, trecând la limită în inegalităţile $f(a_n) < 0$ şi $f(b_n) > 0$, obţinem $f(c) \leq 0$ şi $f(c) \geq 0$, adică $f(c) = 0$.

Analog se demonstrează dacă $f(a) > 0$ şi $f(b) < 0$. □

Teorema 8.5.4 (Cauchy-Weierstass-Bolzano) *Orice funcţie continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux.*

Demonstraţie. Dacă f este constantă, demonstraţia este încheiată. În caz contrar, fie $a \neq b \in I$ cu $f(a) \neq f(b)$. Presupunem că $f(a) < f(b)$ şi $f(a) < \lambda < f(b)$. Fie funcţia $g(x) = f(x) - \lambda, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, funcţie continuă. g are semne contrare în a şi b. Conform teoremei 8.5.3 rezultă existenţa punctului $c_\lambda \in (a, b)$. □

Teorema 8.5.5 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$. Dacă f are proprietatea lui Darboux, atunci f poate avea numai discontinuităţi de specia a II-a.*

Ca o consecinţă a acestei teoreme avem următoarea proprietate: dacă o funcţie este continuă pe un interval şi nu se anulează pe acel interval, atunci păstrează acelaşi semn pe interval. Această proprietate este un instrument puternic în rezolvarea unor inecuaţii.

Condiţia ca funcţia să fie definită pe un interval este esenţială. Dacă funcţia este definită pe o mulţime care este o reuniune de intervale disjuncte, este posibil ca funcţia să ia valori diferite, dar să nu aibă nici o valoare intermediară.

Exemplul 8.5.6 Funcţia $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x < 0, \\ 1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$ este continuă pe domeniul ei de definiţie, ia numai valorile -1 şi 1 şi nu mai ia nicio valoare intermediară.

Proprietatea lui Darboux nu este caracteristică numai funcţiilor continue.

Darboux a dat un exemplu de funcţie care are această proprietate şi care nu este continuă în nici un punct. Dăm un exemplu simplu de funcţie discontinuă într-un punct şi care are proprietatea lui Darboux:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0, \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

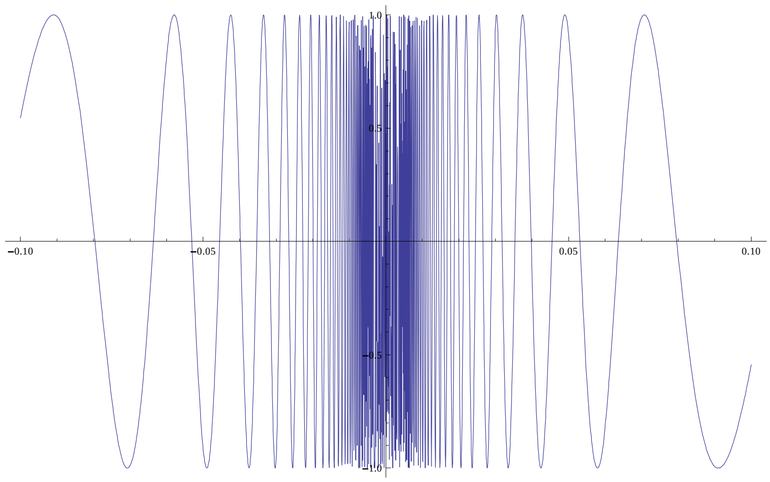

Figura 8.1: Graficul funcţiei f

Teorema 8.5.7 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este injectivă şi continuă, atunci f este strict monotonă pe I.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că funcţia nu este monotonă, deci există $x_1, x_2, x_3 \in I$ astfel încât $x_1 < x_2 < x_3$ şi $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. Fie

$$a := \min(f(x_1), f(x_3)) \text{ şi } b := \frac{a + f(x_2)}{2}.$$

Observăm că $b \in (f(x_2), f(x_1))$ şi $b \in (f(x_2), f(x_3))$. Prin urmare există $c_1 \in (x_1, x_2)$ şi $c_2 \in (x_2, x_3)$ astfel încât $f(c_1) = f(c_2) = b$. Cum $c_1 \neq c_2$, egalitatea precedentă contrazice injectivitatea lui f. Prin urmare, f este strict monotonă pe I. $\square$

Teorema 8.5.8 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $J = f(I)$. Atunci f este bijectivă de la I la J dacă şi numai dacă este strict monotonă. În acest caz, $f^{-1} : J \to I$ este strict monotonă şi continuă.*

Demonstraţie. Dacă f este bijectivă rezultă că este injectivă, deci strict monotonă.

Invers, dacă f este strict monotonă, rezultă că f este injectivă şi cum $f : I \to J$ este surjectivă ($f(I) = J$), deducem că f este bijectivă.

Să arătăm că f^{-1} este continuă. Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că f este strict crescătoare. Fie $b \in J$ şi $a = f^{-1}(b) \in I$. Demonstrăm continuitatea laterală. Presupunem că b nu este extremitatea stângă a lui J şi demonstrăm că f^{-1} este continuă la stânga în b. Fie $\varepsilon > 0$ şi $\delta = b - f(a-\varepsilon) = f(a) - f(a-\varepsilon) > 0$. Fie $y \in J$ astfel încât $y \in (b-\delta, b) = (f(a-\varepsilon), f(a))$. Cum f are proprietatea lui Darboux fiind continuă, există $x \in (a-\varepsilon, a)$ astfel încât $f(x) = y$. Deducem că $f^{-1}(y) \in (a-\varepsilon, a) = (f^{-1}(b) - \varepsilon, f^{-1}(b))$.

Aşadar, pentru orice $\varepsilon > 0$, am găsit $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $y \in (b-\delta, b)$, avem $f^{-1}(y) \in (f^{-1}(b) - \varepsilon, f^{-1}(b))$. În concluzie, f^{-1} este continuă la stânga în b. Analog se arată continuitatea la dreapta în b. Deci, $f^{-1} : J \to I$ este continuă şi evident bijectivă. Folosind prima parte, rezultă că f^{-1} este strict monotonă. $\square$

Observaţia 8.5.9 *Prin intermediul teoremei anterioare, putem arăta continuitatea inverselor principalelor funcţii elementare. Spre exemplu, deoarece funcţia* $\mathrm{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ *este bijectivă şi continuă, putem deduce că inversa sa,* $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *este strict crescătoare şi continuă.*