Curs 9

Derivabilitate şi diferenţiabilitate pentru funcţii reale

9.1 Derivata şi diferenţiala unei funcţii reale. Proprietăţi generale

Definiţia 9.1.1 *(i) Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $a \in A' \cap A$. Spunem că f* ***are derivată în punctul*** *a dacă există în $\overline{\mathbb{R}}$ limita*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{9.1}$$

Vom nota această limită cu $f'(a)$ şi o vom numi ***derivata funcţiei*** *f* ***în punctul*** *a. Dacă $f'(a) \in \mathbb{R}$, spunem că f* ***este derivabilă în punctul*** *a.*

(ii) Spunem că funcţia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este ***derivabilă pe mulţimea*** *$D \subset A$, dacă f este derivabilă în fiecare punct din D. Funcţia notată f', $f' : D \to \mathbb{R}$, care asociază fiecărui punct $x \in D$ derivata $f'(x)$ se numeşte* ***derivata*** *funcţiei f pe mulţimea D.*

Definiţia 9.1.2 *(i) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f : I \to \mathbb{R}$. Spunem că f este* ***diferenţiabilă în*** *$a \in I$ dacă există $A \in \mathbb{R}$ şi $\alpha : I \to \mathbb{R}$, cu $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$, astfel încât*

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \alpha(x)(x - a), \tag{9.2}$$

pentru orice $x \in I$. În acest caz, aplicaţia liniară $\mathbb{R} \ni h \mapsto A \cdot h \in \mathbb{R}$ se notează cu $df(a)$ şi se numeşte ***diferenţiala funcţiei*** *f* ***în punctul*** *a.*

(ii) Spunem că f este ***diferenţiabilă pe*** *I dacă f este diferenţiabilă în orice punct $a \in I$.*

Observaţia 9.1.3 *Analizând definiţia anterioară, observăm că, în cazul unei funcţii f diferenţiabile în a, diferenţa*

$$f(x) - f(a)$$

este aproximată local de funcţia liniară $A(x - a)$

Să observăm acum că, în cazul funcţiilor reale, noţiunile de derivată şi de diferenţială sunt echivalente.

Teorema 9.1.4 *Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis, atunci $f : I \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în $a \in I$ dacă şi numai dacă f este derivabilă în a. În acest caz,*

$$df(a)(h) = f'(a) \cdot h, \quad \forall h \in \mathbb{R}. \tag{9.3}$$

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Presupunem că f este diferenţiabilă în punctul $a \in I$. Atunci există $A \in \mathbb{R}$ şi $\alpha : I \to \mathbb{R}$ cu $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$, astfel încât

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \alpha(x)(x-a),$$

pentru orice $x \in I$. Luând $x \in I \setminus \{a\}$ şi împărţind prin $x - a$ avem

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A + \alpha(x).$$

Obţinem existenţa limitei

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A \in \mathbb{R},$$

adică f este derivabilă în a.

" $\Leftarrow$ " Invers, să presupunem că f este derivabilă în a, deci există $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \in \mathbb{R}$. Fie funcţia

$$\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & \text{dacă } x \in I \setminus \{a\} \\ 0, & \text{dacă } x = a. \end{cases}$$

Observăm că $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$ şi din definiţia lui α avem pentru $x \in I \setminus \{a\}$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \alpha(x)(x-a).$$

Evident, egalitatea de mai sus are loc şi pentru $x = a$, ceea ce înseamnă că f este diferenţiabilă în a şi $df(a)(h) = f'(a) \cdot h$. $\square$

Observaţia 9.1.5 *Să observăm că, în cazul funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, obţinem din teorema anterioară că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$,*

$$dx(h) = dg(x)(h) = g'(x) \cdot h = h, \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Folosind această relaţie şi (9.3), vom scrie

$$df(a) = f'(a) \cdot dx \tag{9.4}$$

ca egalitate de funcţii. De asemenea, având în vedere egalitatea anterioară, uneori derivata unei funcţii mai este notată şi

$$f' = \frac{df}{dx}. \tag{9.5}$$

Interpretarea geometrică a derivatei şi diferenţialei

Pentru o funcţie derivabilă într-un punct a, graficul funcţiei admite tangentă în punctul $(a, f(a))$, iar valoarea $f'(a)$ reprezintă panta tangentei la graficul lui f în punctul $(a, f(a))$.

Astfel, tangenta respectivă are următoarea ecuaţie:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

De asemenea, avem că

$$df(a)(x-a) = f'(a)(x-a).$$

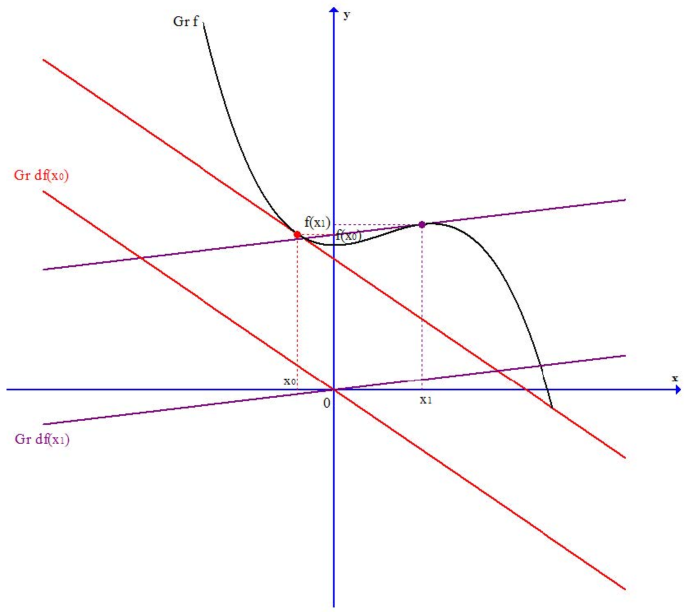

Figura 9.1: Interpretarea geometrică a derivatei şi diferenţialei

Cu alte cuvinte, graficul diferenţialei $df(a)$ este translaţia tangentei la graficul funcţiei f în origine. Desigur, pentru puncte diferite din domeniul funcţiei f în care aceasta este derivabilă, tangentele pot avea pante diferite, şi implicit translaţiile lor în origine. În acest fel, putem observa că diferenţiala unei funcţii f defineşte, pentru fiecare punct în care există, câte o aplicaţie liniară, al cărei grafic este translaţia tangentei duse în punctul corespunzător la graficul funcţiei în origine.

Următoarea propoziţie ne dă o condiţie necesară pentru derivabilitate.

Propoziţia 9.1.6 *Dacă funcţia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $a \in A' \cap A$, atunci f este continuă în a.*

Demonstraţie. Pentru $x \in A$, $x \neq a$ are loc egalitatea

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a).$$

Trecând la limită cu $x \to a$ şi ţinând cont de operaţiile cu limite de funcţii, obţinem existenţa limitei $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ şi în plus

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

Obţinem deci că f este continuă în a. □

Observaţia 9.1.7 *Reciproca propoziţiei anterioare nu este adevărată. Astfel, funcţia f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ este continuă în punctul $x = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct.*

Introducem acum conceptele de derivată şi derivabilitate laterală.

Definiţia 9.1.8 *(i) Spunem că funcţia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$* ***are derivată la stânga în punctul*** *$a \in A'_s \cap A$ dacă există în $\overline{\mathbb{R}}$ limita*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{9.6}$$

Vom nota această limită cu $f'_s(a)$ şi o vom numi ***derivata la stânga*** *a funcţiei f în punctul a. Dacă $f'_s(a) \in \mathbb{R}$, vom spune că f este* ***derivabilă la stânga în*** *a.*

(ii) Spunem că funcţia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***are derivată la dreapta în punctul*** *$a \in A'_d \cap A$ dacă există în $\overline{\mathbb{R}}$ limita*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{9.7}$$

Vom nota această limită cu $f'_d(a)$ şi o vom numi ***derivata la dreapta*** *a funcţiei f în punctul a. Dacă $f'_d(a) \in \mathbb{R}$, vom spune că f este* ***derivabilă la dreapta în*** *a.*

Folosind caracterizarea limitei prin intermediul limitelor laterale, putem deduce următoarele.

Teorema 9.1.9 *Funcţia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $a \in A'_s \cap A'_d \cap A$ dacă şi numai dacă f este derivabilă la stânga şi la dreapta în a şi $f'_s(a) = f'_d(a)$. În acest caz derivatele laterale sunt egale şi cu $f'(a)$.*

Formulăm în continuare rezultate referitoare la operaţii şi reguli de calcul cu funcţii derivabile.

Propoziţia 9.1.10 (Reguli de calcul pentru derivate) *Fie $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ şi $a \in A \cap A'$. Dacă f şi g sunt derivabile în a, atunci funcţiile $f + g$, αf, $f \cdot g$ sunt derivabile în a şi*

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a);\\
(\alpha f)'(a) &= \alpha f'(a);\\
(f \cdot g)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).
\end{aligned}$$

Dacă, în plus, $g(a) \neq 0$, atunci funcţia $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă în a şi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Demonstraţie. Vom demonstra afirmaţia doar în cazul raportului, celelalte rezultând analog, cu demonstraţii chiar mai simple.

Dacă $g(a) \neq 0$, iar g fiind derivabilă este continuă în a, rezultă că $g(x) \neq 0$ pentru orice x dintr-o vecinătate U a lui a. Atunci, pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, vom avea

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x - a} &= \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(a) \cdot (x - a)}\\
&= \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}{g(x) \cdot g(a)}.
\end{aligned}$$

Cum $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a) \in \mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a) \neq 0$ din continuitatea funcţiei g, ne rezultă că există

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(a)}{x - a} = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} \in \mathbb{R},$$

deci $\dfrac{f}{g}$ este derivabilă în a şi are loc formula enunţată mai sus. □

Teorema 9.1.11 (Derivabilitatea funcţiilor compuse) *Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale. Dacă funcţia $f : I \to J$, este derivabilă în $a \in I$, iar funcţia $g : J \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $b := f(a) \in J$, atunci compusa lor $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a şi*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Demonstraţie. Fie funcţia $h : J \to \mathbb{R}$, definită prin

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b}, & y \in J \setminus \{b\} \\ g'(b), & \text{dacă } y = b. \end{cases}$$

Cum g este derivabilă în b, există $\lim\limits_{y \to b} h(y) = g'(b) = h(b)$. Prin urmare, h este continuă în b. Este clar că pentru orice $y \in J$,

$$g(y) - g(b) = h(y) \cdot (y - b)$$

de unde,

$$g(f(x)) - g(f(a)) = h(f(x)) \cdot (f(x) - f(a))$$

pentru orice $x \in I$. Pentru $x \in I \setminus \{a\}$ putem scrie

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Deoarece compunerea $h \circ f$ este continuă în a (din teorema de continuitate a compunerii), prin trecere la limita $x \to a$ obţinem că există $(g \circ f)'(a) = h(f(a)) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.□

Teorema 9.1.12 (Derivabilitatea funcţiei inverse) *Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale şi funcţia $f : I \to J$, continuă şi bijectivă. Dacă f este derivabilă în $a \in I$ şi $f'(a) \neq 0$, atunci funcţia inversă $g = f^{-1}$ este derivabilă în $b = f(a) \in J$ şi*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Demonstraţie. Deoarece f este continuă şi bijectivă rezultă că este strict monotonă iar $g = f^{-1}$ este monotonă şi continuă. Pentru $y \in J \setminus \{b\}$ luăm $x \in I \setminus \{a\}$ astfel încât $f(x) = y$. Avem

$$\frac{g(y) - g(b)}{y - b} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}.$$

Când $y \to b$ avem $g(y) \to g(b)$, deci $x \to b$. Prin trecere la limită în egalitatea de mai sus obţinem $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$. □

Desigur, în virtutea Teoremei 9.1.4 şi a formulei (9.3) putem deduce reguli de calcul pentru diferenţialele funcţiilor reale.

Propoziţia 9.1.13 (Reguli de calcul pentru diferenţiale) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis şi $f, g : I \to \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ şi $a \in A \cap A'$. Dacă f şi g sunt diferenţiabile în a, atunci funcţiile $f + g$, αf, $f \cdot g$ sunt diferenţiabile în a şi*

$$\begin{aligned} d(f + g)(a) &= df(a) + dg(a); \\ d(\alpha f)(a) &= \alpha df(a); \\ d(f \cdot g)(a) &= df(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot dg(a). \end{aligned}$$

Dacă, în plus, $g(a) \neq 0$, atunci funcţia $\frac{f}{g}$ este diferenţiabilă în a şi

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{df(a)g(a) - f(a)dg(a)}{g^2(a)}.$$

Teorema 9.1.14 (Diferenţiala funcţiilor compuse) *Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale. Dacă funcţia $f : I \to J$, este diferenţiabilă în $a \in I$, iar funcţia $g : J \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în punctul $b := f(a) \in J$, atunci compusa lor $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă în a şi*

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a). \tag{9.8}$$

Demonstraţie. Ştim din Teorema 9.1.11 că $g \circ f$ este derivabilă, deci diferenţiabilă în a. Să arătăm (9.8). Avem, pentru orice $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} dg(b)(u) &= g'(b) \cdot u, \\ dg(f(a))(u) &= g'(f(a)) \cdot u, \end{aligned}$$

deci pentru orice $h \in \mathbb{R}$ vom avea

$$\begin{aligned} [dg(f(a)) \circ df(a)](h) &= dg(f(a))(df(a)(h)) = dg(f(a))(f'(a) \cdot h) \\ &= g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot h = (g \circ f)'(a) \cdot h = d(g \circ f)(a)(h), \end{aligned}$$

de unde rezultă relaţia ce trebuia arătată. □

9.2 Teoremele fundamentale ale calculului diferenţial real

Această secţiune conţine unele proprietăţi importante ale funcţiilor derivabile, precum şi aplicaţii ale acestora în studiul a diverse aspecte legate de comportamentul acestora, cum ar fi monotonia, aproximarea, punctele de extrem etc. Pentru aceasta, introducem mai întâi noţiunea de punct de extrem.

Definiţia 9.2.1 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Spunem că $a \in A$ este:*

(i) ***punct de minim local*** *pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;*

(ii) ***punct de maxim local*** *pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \geq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;*

(iii) ***punct de extrem local*** *pentru f dacă e punct de minim sau de maxim local;*

(iv) ***punct de minim global*** *pentru f dacă $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in A$;*

(v) ***punct de maxim global*** *pentru f dacă $f(a) \geq f(x)$, pentru orice $x \in A$;*

(vi) ***punct de extrem global*** *pentru f dacă e punct de minim sau de maxim global.*

Observăm imediat că orice punct de minim (respectiv, maxim) global este punct de minim (respectiv, maxim) local, dar reciproca nu este adevărată.

Teorema 9.2.2 (Fermat) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $a \in \overset{\circ}{I}$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a, iar a este punct de extrem local pentru f, atunci $f'(a) = 0$.*

Demonstraţie. Să presupunem că a este punct de minim local. Există o vecinătate V a lui a astfel încât pentru orice $x \in V \cap A$ să aibă loc $f(a) \leq f(x)$. Cum $a \in \overset{\circ}{I}$, putem presupune ca $V \subset A$. Deci dacă $x \in V$, $x < a$, fracţia $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ este pozitivă, iar dacă $x \in V$, $x < a$, fracţia este negativă. Prin trecere la limită în fiecare caz în parte, obţinem $f'_s(a) \leq 0$ şi $f'_d(a) \geq 0$. Cum f este derivabilă în a, cele două derivate laterale sunt egale, deci sunt egale cu 0. □

Observaţia 9.2.3 *1. Reciproca teoremei lui Fermat nu este adevarată: de exemplu derivata funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ se anulează în 0 fără ca acest punct să fie punct de extrem.*

2. Condiţia ca a să fie interior intervalului I este esentială, adică în lipsa acestei ipoteze concluzia nu se mai păstrează: de exemplu $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x$ are în $a = 0$ un punct de minim în care derivata nu se anulează.

3. Teorema lui Fermat precizează condiţii necesare pentru ca un punct să fie de extrem local. Aşa cum am văzut mai sus, aceste condiţii nu sunt şi suficiente. Deci, în aplicaţii, rezolvând ecuaţia $f'(x) = 0$ obţinem aşa-numitele ***puncte critice,*** *care sunt candidaţii pentru punctele de extrem. Pentru a decide dacă un punct critic este şi punct de extrem trebuie studiată variaţia funcţiei în jurul respectivului punct (a se vedea consecinţele Teoremei lui Lagrange de mai jos).*

Teorema 9.2.4 (Rolle) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.*

Demonstraţie. Dacă f este constantă pe $[a, b]$, atunci $f'(c) = 0$ pentru orice $c \in (a, b)$, deci are loc concluzia. Presupunem că f nu este constantă. Cum f este continuă pe mulţimea compactă $[a, b]$, este mărginită şi îşi atinge marginile conform Teoremei lui Weierstrass. Fie $\alpha, \beta \in [a, b]$ astfel încât

$$f(\alpha) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \text{ şi}$$
$$f(\beta) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Este clar că $f(\alpha) < f(\beta)$ şi deci că nu putem avea simultan $\alpha = a$ şi $\beta = b$ (prin ipoteză, $f(a) = f(b)$). Există aşadar un punct de extrem local (chiar global) în interiorul intervalului $[a, b]$ şi f este derivabilă în acel punct. Utilizând Teorema lui Fermat, rezultă concluzia. □

O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile că este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b) se mai numeşte **funcţie Rolle**.

Trecem la un rezultat, foarte important în special datorită consecinţelor sale.

Teorema 9.2.5 (Lagrange) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b). Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia auxiliară $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de forma

$$g(x) = f(x) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a} x.$$

Funcţia g satisface ipotezele Teoremei lui Rolle şi deci există $c \in (a, b)$ astfel încât $g'(c) = 0$. Obţinem

$$f'(c) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a} = 0,$$

de unde concluzia. □

Observaţia 9.2.6 *Dacă adăugăm condiţia $f(a) = f(b)$, obţinem din Teorema lui Lagrange concluzia Teoremei lui Rolle. Aşadar, cum demonstraţia Teoremei lui Lagrange s-a bazat pe Teorema lui Rolle, deducem că aceste două rezultate sunt, de fapt, echivalente.*

Observaţia 9.2.7 *Interpretatea geometrică a Teoremei lui Lagrange este următoarea: dacă f satisface condiţiile precizate, atunci există cel puţin un punct c interior intervalului $[a, b]$ pentru care tangenta la graficul funcţiei în $(c, f(c))$ este paralelă (sau coincide) cu dreapta determinată de punctele $(a, f(a))$ şi $(b, f(b))$.*

O generalizare a Teoremei lui Lagrange este următoarea.

Teorema 9.2.8 (Cauchy) *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) astfel încât $g'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in (a, b)$. Atunci $g(b)-g(a) \neq 0$ şi există $c \in (a, b)$ astfel încât*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demonstraţie. Dacă $g(b) = g(a)$, din Terorema lui Rolle obţinem că g' se anulează într-un punct din (a, b), în contradicţie cu ipoteza. În continuare procedăm ca în cazul Teoremei lui Lagrange, considerând funcţia auxiliară $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ de forma

$$h(x) = f(x) + \frac{f(a) - f(b)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x).$$

Funcţia h satisface ipotezele Teoremei lui Rolle şi deci există $c \in (a, b)$ astfel încât $h'(c) = 0$. Obţinem

$$f'(c) + \frac{f(a) - f(b)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0,$$

de unde concluzia. □

Observaţia 9.2.9 *Teorema lui Lagrange se poate obţine din Teorema lui Cauchy pentru $g(x) = x$. De asemenea, cum demonstraţia Teoremei lui Cauchy se bazează tot pe Teorema lui Rolle, deducem că, de fapt, toate cele trei teoreme sunt echivalente.*

Următoarele consecinţe ale Teoremei lui Lagrange sunt importante, deschizând calea studiului monotoniei funcţiilor prin intermediul derivatelor.

Propoziţia 9.2.10 *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$, derivabilă pe I.*
(i) Dacă $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este constantă pe I.
(ii) Dacă $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I.
(iii) Dacă $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este crescătoare pe I.
(iv) Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I.
(v) Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este strict descrescătoare.

Demonstraţie. (i) Fixăm $a \in I$ şi luăm $x \in I$ arbitrar. Aplicând Teorema lui Lagrange pe intervalul de capete a şi x deducem că există c astfel încât $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$. Cum $f'(c) = 0$, vom avea că $f(x) = f(a)$ şi deci f este constantă pe I.

(ii) Fie $x_1, x_2 \in I$ cu $x_1 < x_2$. Conform Teoremei lui Lagrange, există $c \in (x_1, x_2)$ astfel încât $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Cum $f'(c) > 0$ şi $x_2 > x_1$, deducem că $f(x_2) > f(x_1)$. Rezultă f strict crescătoare pe I.

Celelalte cazuri se demonstrează similar. □

Observaţia 9.2.11 *Evident reciproca afirmaţiei de la (i) este adevarată.*

În celelalte cazuri sunt adevărate reciprocele doar pentru monotonie nestrictă (şi inegalitati nestricte). Stricta monotonie nu implică în general stricta pozitivitate a derivatei din cauza faptului că, prin trecere la limită, inegalităţile stricte nu se păstrează între limite.

De exemplu funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, dar derivata sa se anulează în 0.

Următoarea consecinţă a Teoremei lui Lagrange poate fi utilă uneori în studiul derivabilităţii funcţiilor.

Propoziţia 9.2.12 *Fie $I \subset \mathbb{R}$, un interval, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, f continuă. Dacă f este derivabilă pe $I \setminus \{a\}$ şi există $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ (finită sau infinită), atunci există derivata funcţiei f în a, $f'(a)$, şi*

$$f'(a) = \lim_{x\to a} f'(x).$$

Demonstraţie. Fie $(x_n) \subset I \setminus \{a\}$ un şir descrescător cu limita a. Aplicăm Teorema lui Lagrange pe intervalul $[a, x_n]$. Există atunci $c_n \in (a, x_n)$ astfel încât

$$f'(c_n) = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$

Cum $x_n \to a$, va rezulta că $c_n \to a$. Deoarece există limita $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, va rezulta folosind caracterizarea cu şiruri a limitei că $f'(c_n) \to \ell$. Rezultă, folosind caracterizarea cu şiruri a limitei la stânga, că există

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_s(a) = \ell.$$

Analog se arată că există $f'_d(a) = \ell$. Propoziţia este demonstrată. □

Exemplul 9.2.13 Să aplicăm propoziţia anterioară la studiul derivabilităţii funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{dacă } x < 0 \\ x^3, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Observăm că f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ca funcţie elementară şi că

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{dacă } x < 0 \\ 3x^2, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

De asemenea, există $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f'(x) = 0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x)$, deci $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$. Rezultă conform propoziţiei precedente că există $f'(0) = 0$, deci f este derivabilă în 0, deci pe $\mathbb{R}$.

Observaţia 9.2.14 *Conform rezultatului precedent, dacă există şi este finită $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$, atunci f este derivabilă în a şi funcţia derivată este continuă în a.*

Propoziţia de mai sus precizează conditii suficiente, dar nu şi necesare pentru existenţa derivatei în a. De exemplu, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \textit{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \textit{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă conform definitiei în $x = 0$. Într-adevăr,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Calculând derivata funcţiei f pentru $x \neq 0$, avem

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

deci nu există $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Aşadar, nu putem aplica Propoziţia 9.2.12 pentru a deduce derivabilitatea funcţiei f în 0.

Propoziţia 9.2.15 *Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă cu derivata mărginită, atunci f este lipschitziană pe I.*

Demonstraţie. Să presupunem că există $M > 0$ astfel încât $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in I$.

Fie $x_1, x_2 \in I$, arbitrari. Dacă $x_1 \neq x_2$, aplicăm Teorema lui Lagrange pe intervalul de capete x_1, x_2 şi deducem că există c astfel încât

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)| \cdot |x_1 - x_2| \leq M \cdot |x_1 - x_2|.$$

Cum dacă $x_1 = x_2$ relaţia anterioară este în mod evident satisfăcută, deducem că f este o funcţie Lipschitz pe I, iar constanta Lipschitz este constanta de mărginire a lui f'. □

Teorema 9.2.16 (Darboux) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe I, atunci derivata sa are proprietatea lui Darboux.*

Demonstraţie. Fie $a, b \in I$ cu $a < b$. Presupunem că $f'(a) < f'(b)$ şi alegem $\lambda \in (f'(a), f'(b))$. Arătăm că există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = \lambda$.

Fie funcţia $g : I \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \lambda x$. Funcţia g este continuă pe $[a, b]$, deci este mărginită şi îşi atinge marginile conform Teoremei lui Weierstrass. Fie $c \in [a, b]$ punctul de minim al lui g pe $[a, b]$. Arătăm că $c \neq a$. Evident $g'(a) = f'(a) - \lambda < 0$, deci, aplicând Teorema **??**, există $\varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in (a, a + \varepsilon)$,

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} < 0,$$

de unde obţinem $g(x) < g(a)$ pentru orice $x \in (a, a + \varepsilon)$. Prin urmare, a nu este punct de minim pentru f, deci $c \neq a$. Analog se arată că avem $c \neq b$. Prin urmare, $c \in (a, b)$ şi din teorema lui Fermat aplicată funcţiei g obţinem $g'(c) = 0$, adică $f'(c) = \lambda$. □

Observaţia 9.2.17 *În general, derivata unei funcţii derivabile nu este continuă. De exemplu, am arătat mai sus că funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

este derivabilă pe $\mathbb{R}$, dar

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, x \neq 0, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

nu este continuă în 0.

Teorema 9.2.18 (Cauchy) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, care verifică ipotezele:*

(i) $f(a) = g(a) = 0$;

(ii) f, g sunt derivabile în a;

(iii) $g'(a) \neq 0$.

Atunci există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $g(x) \neq 0$, pentru orice $x \in V \setminus \{a\}$ şi

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Demonstraţie. Cum $g'(a) \neq 0$, există o vecinătate V a lui a astfel încât, pentru orice $x \in V \setminus \{a\}$,

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \neq 0,$$

de unde $g(x) \neq g(a) = 0$ pentru orice $x \in V \setminus \{a\}$. Fie $x \in V \setminus \{a\}$. Atunci

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \left[\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right]^{-1}.$$

În ipotezele noaste deducem ca există $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$. □

Teorema 9.2.19 (Regula lui L'Hôpital) *Fie $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, unde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dacă:*

(i) f, g sunt derivabile pe (a, b) cu $g' \neq 0$ pe (a, b);

(ii) există $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$;

(iii) $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = 0$ sau

(iii)' $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = \infty$,

atunci există

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{9.9}$$

Demonstraţie. Să observăm că, pentru a arăta (9.9), este suficient să demonstrăm că, dacă $-\infty \leq L < \infty$ şi $L_1 > L$, există $\delta_1 > a$ astfel încât

$$\frac{f(x)}{g(x)} < L_1, \quad \forall x \in (a, \delta_1), \tag{9.10}$$

iar dacă $-\infty < L \leq \infty$ şi $L < L_2$, că există $\delta_2 > a$ astfel încât

$$\frac{f(x)}{g(x)} > L_2, \quad \forall x \in (a, \delta_2). \tag{9.11}$$

Într-adevăr, dacă $L \in \mathbb{R}$, pentru orice $\varepsilon > 0$, vom găsi $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > a$ astfel încât, folosind cele două relaţii anterioare cu $L_1 := L + \varepsilon$ şi $L_2 := L - \varepsilon$, vom avea că, pentru orice $x \in (a, \delta)$,

$$L - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < L + \varepsilon,$$

deci $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$.

Să arătăm că are loc (9.10). Alegem $\beta\in(L,L_1)$ arbitrar. Conform ipotezei (ii), găsim $\gamma>a$ astfel încât

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}<\beta,\quad \forall x\in(a,\gamma).$$

Fie acum x,y astfel încât $a<x<y<\gamma$. Putem aplica Teorema lui Cauchy pe intervalul $[x,y]\subset(a,\gamma)$, şi găsim $c\in(x,y)$ astfel încât

$$\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}<\beta. \tag{9.12}$$

Dacă este satisfăcută ipoteza (iii), ţinem y fixat şi facem $x\searrow a$ în (9.12) pentru a ajunge la

$$\lim_{\substack{x\to a\\x<a}}\frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}=\frac{f(y)}{g(y)}\le\beta<L_1,\quad \forall y\in(a,\alpha),$$

adică (9.10) este satisfăcută.
Să presupunem acum că (iii)' este îndeplinită. Din $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}g(x)=\infty$ ne rezultă existenţa unui $\gamma_1>a$ astfel încât,

$$g(x)>0 \text{ şi } g(x)>g(y),\quad \forall x\in(a,\gamma_1),\forall y>\gamma_1.$$

Înmulţind (9.12) cu $\dfrac{g(x)-g(y)}{g(x)}$, vom obţine, pentru orice $x\in(a,\gamma_1)$, $y>\gamma_1$,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)}&<\beta\cdot\frac{g(x)-g(y)}{g(x)},\\ \frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(y)}{g(x)}&<\beta-\beta\cdot\frac{g(y)}{g(x)},\\ \frac{f(x)}{g(x)}&<\beta-\frac{f(y)-\beta\cdot g(y)}{g(x)}.\end{aligned}$$

Având în vedere că, pentru y fixat, vom avea că $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\dfrac{f(y)-\beta\cdot g(y)}{g(x)}=0$, va exista $\gamma_2>a$ astfel încât

$$\frac{f(y)-\beta\cdot g(y)}{g(x)}<L_1-\beta,\quad \forall x\in(a,\gamma_2).$$

Luând $\delta_1:=\min\{\gamma,\gamma_1,\gamma_2\}$, vom avea

$$\frac{f(x)}{g(x)}<L_1,\quad \forall x\in(a,\delta_1),$$

(9.10) este satisfăcută şi în această situaţie.

Cum (9.11) se arată la fel, teorema este demonstrată. □

Observaţia 9.2.20 *Teorema anterioară se poate reformula, având demonstraţii foarte asemănătoare, considerând* $\lim\limits_{\substack{x\to b\\x>b}}$ *în loc de* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}$, *sau punând în loc de (iii)', una din ipotezele*

(iii)'' $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}g(x)=-\infty$, *respectiv*

(iii)''' $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} g(x) = -\infty$.

Dacă, în plus, punctul a considerat în Teorema lui L'Hôpital este punct de acumulare pentru domeniile funcţiilor f, g (şi nu doar punct de acumulare la dreapta), combinând teorema în forma prezentată şi observaţia anterioară pentru $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}$, are loc Regula lui L'Hôpital pentru $\lim\limits_{x\to a}$.

Exerciţiul 9.1 Calculaţi limita:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{\sin(\sin x)}.$$

Observăm că sunt îndeplinite condiţiile Teoremei lui L'Hôpital. Calculăm

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x\cos x-1)'}{(\sin(\sin x))'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x}{\cos(\sin x)\cdot\cos x}=\frac{1\cdot 1-1\cdot 0}{1\cdot 1}=1.$$

Rezultă că limita căutată are valoarea 1.

Limite fundamentale. Eliminarea nedeterminărilor

Să remarcăm faptul că Teorema lui L'Hôpital oferă un instrument puternic de eliminare a nedeterminărilor în cazul calculului limitelor de funcţii, i.e. a cazurilor exceptate în Teorema **??**. Următoarele limite sunt considerate fundamentale:

(i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$;

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

(iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$, $a>0$;

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$;

(vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;

(vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1$;

(viii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$;

(ix) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$;

(x) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{a^x} = 0$, $n\in N$, $a>1$.

(xi) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x = -\infty$;

(xii) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$;

(xiii) $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}\operatorname{tg} x = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}}\operatorname{tg} x = -\infty$.

Eliminarea nedeterminărilor se face, de obicei, astfel:

(i) Cazurile $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ se elimină fie folosind limitele fundamentale, fie cu Regula lui L'Hôpital.

(ii) Cazurile $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$ se reduc la cazurile $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ astfel: fie $f, g : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, astfel încât există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty(-\infty)$ şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, $\forall x \in U \setminus \{a\}$; putem scrie $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ şi astfel nedeterminarea dată se reduce la o nedeterminare $\dfrac{0}{0}$ sau $f(x) \cdot g(x) = \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ şi vom obtine o nedeterminare de tip $\dfrac{\infty}{\infty}$.

(iii) Cazul $\infty - \infty$ se reduce, de obicei, la cazul $0 \cdot \infty$ astfel: fie $f, g : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, astfel încât există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) \neq 0, \forall x \in U \setminus \{a\}$; putem scrie $(f(x) - g(x)) = f(x)\left(1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}\right)$. Dacă $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, atunci nedeterminarea dată se reduce la o nedeterminare $0 \cdot \infty$; dacă $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} > 1(< 1)$, atunci $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = -\infty \ (+\infty)$.

(iv) Cazurile $0^0, \infty^0$ se reduc la cazul $0 \cdot \infty$ astfel: fie $f, g : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, astfel încât există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \ (+\infty)$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ şi e-xistă $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) > 0$, $\forall x \in U \cap A \setminus \{a\}$. Putem scrie $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ şi limita de la exponent este o nedeterminare de tip $0 \cdot (-\infty)$ (respectiv $0 \cdot \infty$).

(v) Cazul 1^∞ se reduce tot la cazul $0 \cdot \infty$ fie prin metoda de la punctul iv), fie astfel: dacă $f, g : A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, astfel încât există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(x) \neq 1$, $\forall x \in U \setminus \{a\}$, atunci vom scrie $f(x)^{g(x)} = \{[1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\}^{g(x)(f(x)-1)}$. Avem $\lim\limits_{x \to a} [1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x)-1}} = e$, iar $\lim\limits_{x \to a} g(x)(f(x) - 1)$ este o nedeterminare de tip $0 \cdot \infty$.

9.3 Derivate şi diferenţiale de ordin superior. Formula lui Taylor

După cum am văzut în secţiunea anterioară, în cazul unei funcţii reale f, derivabilă (sau, echivalent, diferenţiabilă) într-un punct a, valorile funcţiei într-o vecinătate a lui a pot fi aproximate prin $f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$. Pe parcursul acestei secţiuni vom arăta că acest tip de aproximare se poate rafina în cazul funcţiilor derivabile de ordin mai mare decât unu. În acest scop, să dăm pentru început câteva definiţii.

Definiţia 9.3.1 *Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulţime deschisă.*

(i) Spunem că funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este ***derivabilă de două ori în punctul*** *$a \in A$ (respectiv pe A) dacă f este derivabilă într-o vecinătate a punctului a şi funcţia derivată f' este derivabilă în a (respectiv pe A). În acest caz, derivata lui f' în a se numeşte* ***derivata a doua a lui f în*** *a şi se notează $f''(a)$, sau $f^{(2)}(a)$.*

(ii) Spunem că funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ este ***diferenţiabilă de ordinul al doilea în punctul*** *$a \in A$, dacă f este derivabilă într-o vecinătate a punctului a şi funcţia derivată f' este diferenţiabilă în a. În acest caz, funcţia $d^2 f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin*

$$d^2 f(a) = f''(a)(dx)^2 = f''(a)dx^2$$

sau, echivalent, prin

$$d^2 f(a)(h) = f''(a) \cdot h^2, \ \forall h \in \mathbb{R}$$

se numeşte ***diferenţiala a doua a lui f în*** *a.*

Să observăm că, potrivit Teoremei 9.1.4 aplicată funcţiei f', o funcţie este de două ori derivabilă în punctul a (respectiv pe A) dacă şi numai dacă este diferenţiabilă de ordinul al doilea în a (respectiv pe A).

Definiţia 9.3.2 *Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulţime deschisă, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.*

*(i) Spunem că f este **de n ori derivabilă în** $a \in A$ (respectiv pe A) dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă într-o vecinătate a punctului a şi funcţia derivată $f^{(n-1)}$ este derivabilă în a. În acest caz, derivata lui $f^{(n-1)}$ în a se numeşte **derivata de ordin n a lui f în** a şi se notează $f^{(n)}(a)$.*

*(ii) Spunem că f este **de n ori diferenţiabilă în** $a \in A$ (respectiv pe A) dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă într-o vecinătate a punctului a şi funcţia derivată $f^{(n-1)}$ este diferenţiabilă în a (respectiv pe A). În acest caz, funcţia $d^n f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin*

$$d^n f(a) = f^{(n)}(a)(dx)^n = f^{(n)}(a)dx^n$$

sau, echivalent, prin

$$d^n f(a)(h) = f^{(n)}(a) \cdot h^n, \ \forall h \in \mathbb{R}$$

*se numeşte **diferenţiala de ordinul n a lui f în** a.*

Definiţia 9.3.3 *Fie $D \subset \mathbb{R}$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem că f este **de clasă $\mathcal{C}^n$ pe** D ($n \in \mathbb{N}^*$) dacă f este de n ori derivabilă pe D, iar derivata de ordin n, $f^{(n)}$, este continuă pe D. Notăm*

$$\mathcal{C}^n(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ este de clasă } \mathcal{C}^n \text{ pe } A\}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

şi, prin conventie,

$$\mathcal{C}^0(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă pe } A\}.$$

De asemenea, vom nota prin convenţie $f^{(0)} = f$.

Spunem că f este de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe D dacă f este derivabilă de orice ordin pe D. Vom nota

$$\mathcal{C}^\infty(A) = \{f : A \to \mathbb{R}, \ f \text{ este de clasă } \mathcal{C}^\infty \text{ pe } A\}.$$

Teorema 9.3.4 (Formula lui Leibniz) *Fie $f, g : A \to \mathbb{R}$ de n ori derivabile în $a \in A$. Atunci $f \cdot g$ este de n ori derivabilă în a şi are loc formula*

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)}(a) g^{(n-i)}(a). \tag{9.13}$$

Demonstraţie. Vom face demonstraţia prin inducţie.

Pentru $n = 1$, rezultatul este arătat în Teorema 9.1.10. Să presupunem rezultatul adevărat pentru $n = k - 1$. Ştim aşadar că $f \cdot g$ este de $k - 1$ ori derivabilă în a şi

$$(f \cdot g)^{(k-1)}(a) = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i f^{(i)}(a) g^{(k-1-i)}(a).$$

Cum toţi membrii sumei sunt funcţii derivabile (folosind ipoteza), ne rezultă că $(f \cdot g)^{(k-1)}(a)$ este derivabilă în a. Există aşadar $(f \cdot g)^{(k)}(a)$ şi are loc

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(k)}(a) &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i} f^{(i)}(a) g^{(k-1-i)}(a) \right)' \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i} \left(f^{(i+1)}(a) g^{(k-1-i)}(a) + f^{(i)}(a) g^{(k-i)}(a) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} C_{k-1}^{i-1} f^{(i)}(a) g^{(k-i)}(a) + \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i} f^{(i)}(a) g^{(k-i)}(a) \\
&= f^{(k)}(a) + g^{(k)}(a) + \sum_{i=1}^{k-1} (C_{k-1}^{i-1} + C_{k-1}^{i}) f^{(i)}(a) g^{(k-i)}(a) \\
&= \sum_{i=0}^{k} C_{k}^{i} f^{(i)}(a) g^{(k-i)}(a).
\end{aligned}
$$

Am folosit mai sus identitatea

$$C_k^i = C_{k-1}^{i-1} + C_{k-1}^{i}.$$

Am arătat aşadar că rezultatul este adevărat pentru $n = k$. Conform procedeului inducţiei matematice, ne rezultă concluzia. □

Formula lui Taylor

Fie

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

un polinom de grad n cu coeficienti reali ($a_n \neq 0$ şi $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$). Dorim pentru început să arătăm că putem scrie polinomul de mai sus în mod unic în forma

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + ... + A_n(x-a)^n$$

pentru un $a \in \mathbb{R}$ fixat. Un mod de a arăta acest lucru este următorul. Este clar că termenul liber A_0 este egal cu $P(a)$. Mai departe, prin derivare, obţinem

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + ... + A_n(x-a)^{n-1},$$

de unde $A_1 = P'(a)$. În mod analog, derivând în continuare, obţinem

$$A_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a), \text{ pentru } k = \overline{1,n}.$$

Asadar,

$$P(x) = P(a) + \frac{1}{1!} P'(a)(x-a) + ... + \frac{1}{n!} P^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Dorim acum să extindem formula precedentă la situaţia mai generală când în locul polinomului P avem o funcţie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis. Vom numi polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

polinomul Taylor de ordin n asociat funcţiei f în punctul a.

Problema care se pune este în ce măsură acest polinom aproximează funcţia f. Am văzut că în cazul în care f este un polinom de grad mai mic sau egal cu n, atunci $T_n = f$. Să notăm

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

pentru orice $x \in I$. Tocmai comportarea lui R_n măsoara gradul de aproximare al funcţiei f prin polinomul Taylor.

Teorema 9.3.5 (Formula lui Taylor cu restul lui Peano) *Fie $I \subset \mathbb{R}$, un interval deschis şi $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de n ori derivabilă în $a \in I$, atunci există o funcţie $\alpha : I \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\lim_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$, astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \alpha(x)\frac{(x-a)^n}{n!}, \end{aligned}$$

pentru orice $x \in I$.

Demonstraţie. Fie T_n polinomul Taylor de ordin n asociat funcţiei f în a. Definim următoarea funcţie: $\alpha : I \to R$ dată prin

$$\alpha(x) = \begin{cases} n! \cdot \dfrac{f(x) - T_n(x)}{(x-a)^n}, & \text{dacă } x \in I \setminus \{a\} \\ 0 & \text{dacă } x = a. \end{cases}$$

Evident, pentru orice $x \in I$,

$$f(x) = T_n(x) + \alpha(x)\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Este suficient sa arătăm continuitatea lui α în 0. Fie funcţiile $F, G : I \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - T_n(x) \text{ şi} \\ G(x) &= (x-a)^n. \end{aligned}$$

Se observă imediat că F şi G sunt de n ori derivabile în a şi

$$\begin{aligned} F^{(k)}(a) &= 0 \text{ pentru } k = \overline{1, n} \text{ şi} \\ G^{(k)}(a) &= 0 \text{ pentru } k = \overline{1, n-1}. \end{aligned}$$

În plus,

$$G^{(n)}(a) = n! \neq 0.$$

Aplicând Teorema lui Cauchy (forma generalizată, i.e. Teorema **??**), obţinem că există

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = n! \cdot \frac{0}{n!} = 0.$$

Rezultă concluzia. □

Teorema 9.3.6 (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ şi $n \in \mathbb{N}$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de $(n+1)$ ori derivabilă pe I, atunci pentru orice $x \in I$, $x \neq a$ există $c \in (x, a)$ sau $c \in (a, x)$ astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Să căutam restul de forma

$$R_n(x) = A(x-a)^{n+1},\ x \in I.$$

Fie funcţia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dată prin

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n + A \cdot (x-t)^{n+1}.$$

Funcţia φ este derivabilă pe I şi $\varphi(x) = f(x)$ iar $\varphi(a) = T_n(x) + R_n(x) = f(x)$. Suntem în condiţiile teoremei lui Rolle pe $[a, x]$ sau $[x, a]$ şi deci există $c \in (a, x)$ sau $c \in (x, a)$ astfel încât $\varphi'(c) = 0$. Dar

$$\varphi'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n - A(n+1)(x-t)^n$$

pentru orice $t \in I$. Cum $c \neq x$, obţinem

$$A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

de unde rezultă concluzia. □

Particularizând $a = 0$ se obtine formula lui MacLaurin.

Propoziţia 9.3.7 (Formula lui MacLaurin) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $0 \in I$ şi $n \in \mathbb{N}$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de $(n+1)$ ori derivabilă pe I, atunci pentru orice $x \in I, x \neq 0$ există $c \in (x, 0)$ sau $c \in (0, x)$ astfel încât*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}.$$

Exemplul 9.3.8 În formula lui MacLaurin, cum $c \in (x, 0)$ sau $c \in (0, x)$ putem să luăm c de forma $c = \theta x$ unde $\theta \in (0, 1)$. Astfel se obţin dezvoltările de mai jos.

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Această funcţie este de clasă C^∞ şi scriind formula lui MacLaurin cu restul de ordin n obţinem că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $\theta \in (0, 1)$ astfel încât

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}.$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Această funcţie este de clasă C^∞ şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc $f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. Scriind formula MacLaurin de ordin $2n+1$ avem pentru orice $x \in \mathbb{R}$ un $\theta \in (0, 1)$ astfel încât

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sin \theta x.$$

Analog, pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ obţinem pentru orice $x \in \mathbb{R}$ un $\theta \in (0, 1)$ astfel încât

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x.$$

3. Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$. Are loc dezvoltarea

$$\ln(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

pentru orice $x \in (-1, \infty)$, unde $\theta \in (0, 1)$.

Formulele de mai sus pot fi folosite pentru determinarea unor limite. Exemplificăm cu următorul exerciţiu.

Exerciţiul 9.2 Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ există, este finită şi nenulă limita

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\sin x^3 + x^3(x^6-6)}{x^n}?$$

Conform teoriei de mai sus, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $\theta_x \in (0,1)$ astfel încât

$$\sin x^3 = x^3 - \frac{x^9}{6} + \frac{x^{15}}{120} - \frac{x^{18}}{720}\sin\theta_x x.$$

Înlocuind în limita de mai sus obţinem $n = 15$ şi valoarea limitei $\dfrac{1}{20}$.

De asemenea, derivatele de ordin superior pot fi utile în determinarea punctelor de extrem.

Teorema 9.3.9 (Puncte de extrem) *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de n ori derivabilă în $a \in I$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$, astfel încât*

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, ..., f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0. \tag{9.14}$$

(i) Dacă n este par, atunci a este punct de extrem, mai exact: punct de maxim local dacă $f^{(n)}(a) < 0$ şi punct de minim local dacă $f^{(n)}(a) > 0$.

(ii) Dacă n este impar, atunci a nu este punct de extrem.

Demonstraţie. Cum f este de n ori derivabilă în a, putem scrie formula lui Taylor cu restul lui Peano, adică, pentru orice $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \alpha(x)\frac{(x-a)^n}{n!},$$

unde $\alpha : I \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to a}\alpha(x) = \alpha(a) = 0$. Folosind (9.14), obţinem

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!}[f^{(n)}(a) + \alpha(x)].$$

Dar $\lim_{x\to a}[f^{(n)}(a)+\alpha(x)] = f^{(n)}(a)$. Dacă $f^{(n)}(a) > 0$, există o vecinătate V a lui a astfel încât $f^{(n)}(a) + \alpha(x) > 0$ pentru orice $x \in V$, iar dacă $f^{(n)}(a) < 0$, există o vecinătate V a lui a astfel încât $f^{(n)}(a) + \alpha(x) < 0$, pentru orice $x \in V$.

(i) Dacă n este par şi $f^{(n)}(a) > 0$, atunci, cum $\dfrac{(x-a)^n}{n!} \geq 0$ pentru orice x, avem că

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!}[f^{(n)}(a) + \alpha(x)] \geq 0, \ \forall x \in V.$$

Cazul n par şi $f^{(n)}(a) < 0$ rezultă analog.

(ii) Dacă n este impar şi $f^{(n)}(a) > 0$, alegem $\varepsilon > 0$ suficient de mic astfel încât $(a-\varepsilon, a-\varepsilon) \subset V$. Atunci $\dfrac{(x-a)^n}{n!} < 0$ pentru orice $x \in (a-\varepsilon, a)$ şi $\dfrac{(x-a)^n}{n!} > 0$ pentru orice $x \in (a, a+\varepsilon)$, de unde

$$f(x) - f(a) < 0, \ \forall x \in (a-\varepsilon, a) \text{ şi } f(x) - f(a) > 0, \ \forall x \in (a, a+\varepsilon).$$

Aşadar, a nu este punct de extrem. Cazul celălalt rezultă analog. $\square$