1. Primitive

Definiţia 1. O funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ se numeşte *primitivă pe intervalul I a funcţiei* $f : I \to \mathbb{R}$ dacă F este funcţie derivabilă pe I şi $F'(x) = f(x)$, $(\forall)\, x \in I$. În acest caz, spunem că *funcţia f admite primitive pe I*.

Propoziţia 1. *Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe I şi F este o primitivă, atunci toate primitivele lui f sunt de forma $F + C$, unde C este o constantă.*

Definiţia 2. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ admite o primitivă F pe I, atunci mulţimea tuturor primitivelor funcţiei f se numeşte *integrala nedefinită a funcţiei f pe I* şi se notează $\int f(x)\, dx$.

Convenim să folosim notaţia clasică $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, $x \in I$, $C \in \mathbb{R}$, care este o scriere echivalentă a egalităţii $F'(x) = f(x)$, $x \in I$.

Să observăm că dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă pe I, atunci ea este o primitivă pe I a funcţiei f' şi deci $\int f'(x)\, dx = f(x) + C$, $x \in I$, unde C este o constantă reală arbitrară.

Primitivele funcţiilor elementare

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$, $x > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$.
3. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, $x \in I$, unde I este un interval fie din $(0, \infty)$, fie din $(-\infty, 0)$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{1}{\ln a} a^x + C$, $x \in \mathbb{R}$, unde $a > 0$, $a \neq 1$.
5. $\int \dfrac{1}{x^2 + a^2} dx = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$, $x \in \mathbb{R}$, pentru $a \neq 0$.
6. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + C$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
7. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$, $x \in I$, $a > 0$, unde I este un interval din $(-\infty, -a)$ sau din (a, ∞).
8. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$, $x \in (-a, a)$, $a > 0$.
9. $\int \sin x dx = -\cos x + C$, $x \in \mathbb{R}$.
10. $\int \cos x dx = \sin x + C$, $x \in \mathbb{R}$.
11. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$, $x \in (\dfrac{(2k-1)\pi}{2}, \dfrac{(2k+1)\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$.
12. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$, $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Vom da în continuare câteva proprietăţi ale primitivelor şi metode de calcul, atunci când ele există.

Teorema 1 (liniaritatea integralei nedefinite). *Dacă funcţiile $f, g : I \to \mathbb{R}$ admit primitive pe I şi λ este o constantă reală, atunci funcţiile $f+g$ şi λf admit primitive pe I şi*

$$\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

$$\int (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx.$$

Teorema 2 (a integrării prin părţi). *Dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile pe I şi funcţia fg' admite primitive pe I, atunci şi funcţia $f'g$ admite primitive pe I şi are loc formula de calcul*

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx,\ x \in I, \tag{1}$$

numită formula integrării prin părţi.

Teorema 3 (teorema întâi de schimbare de variabilă). *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ şi $g : J \to \mathbb{R}$ două funcţii date (I, J intervale din $\mathbb{R}$), astfel încât g admite o primitivă G pe J. Fie $\varphi : I \to J$ derivabilă pe I, cu proprietatea că $f = (g \circ \varphi)\,\varphi'$ pe I. Atunci funcţia $G \circ \varphi$ este o primitivă pe I a lui f, adică*

$$\int f(x)\,dx = G(\varphi(x)) + C,\ x \in I. \tag{2}$$

Teorema 4 (teorema a doua de schimbare de variabilă). *Fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie dată. Presupunem că există o funcţie $g : J \to \mathbb{R}$ care admite primitive pe J (fie G o astfel de primitivă) şi o funcţie $\varphi : J \to I$ bijectivă şi derivabilă pe J astfel încât $\varphi' \neq 0$ pe J şi $g = (f \circ \varphi)\,\varphi'$ pe J. Atunci funcţia $G \circ \varphi^{-1}$ este o primitivă pe I a funcţiei f, adică*

$$\int f(x)\,dx = G\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C,\ x \in I. \tag{3}$$

Vom prezenta acum câteva clase de integrale nedefinite. Începem cu clasa funcţiilor raţionale. Se numesc *fracţii simple* funcţiile raţionale de forma $A/(x-a)^n$, $x \neq a$ şi $(Ax+B)/(ax^2+bx+c)^n$, cu $b^2-4ac<0$, în ambele cazuri n fiind un număr natural.

Exerciţiul 1. Reamintim integralele fracţiilor simple de mai sus. Calculul se face pe intervale pe care funcţiile sunt definite.

$I_1 = \int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + C$, $x \in I$, I interval inclus în (a,∞) sau $(-\infty,a)$.

$I_2 = \int \frac{1}{(x-a)^n}dx = \int (x-a)^{-n}\,dx = \frac{1}{-n+1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$, $x > a$.

$I_3 = \int \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx +$

$+ (A\alpha+B)\int \frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx$, de unde

$$I_3 = \frac{A}{2}\ln\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right] + \frac{A\alpha+B}{\beta}arctg\frac{x-\alpha}{\beta} + C.$$

$J_n = \int \frac{Ax+B}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}dx$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$. Vom stabili o formulă de recurenţă pentru calculul integralelor nedefinite J_n. Scriem J_n sub forma

$$J_n = \frac{A}{2}\int \frac{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]'}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}dx + (A\alpha+B)\, I_n, \tag{4}$$

unde $I_n = \int \frac{1}{(u^2+\beta^2)^n}du$, $u = x-\alpha$. Pentru a obţine o formulă de recurenţă pentru calculul lui I_n, observăm că

$$I_n = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{1}{(u^2+\beta^2)^{n-1}}du - \frac{1}{2\beta^2}\int \frac{2u^2}{(u^2+\beta^2)^n}du$$

sau

$$I_n = \frac{1}{\beta^2}I_{n-1} - \frac{1}{2\beta^2}\int u\left[\frac{1}{-n+1}\left(u^2+\beta^2\right)^{-n+1}\right]' du.$$

Integrând prin părţi, se găseşte

$$I_n = \frac{1}{\beta^2}I_{n-1} - \frac{1}{2\beta^2}\left[\frac{1}{-n+1}\frac{u}{(u^2+\beta^2)^{n-1}} - \frac{1}{-n+1}\int \frac{1}{(u^2+\beta^2)^{n-1}}du\right].$$

Am ajuns astfel din nou la I_{n-1}. Aşadar,

$$I_n = \frac{1}{\beta^2}\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} + \frac{1}{\beta^2}\frac{1}{2n-2}\frac{u}{(u^2+\beta^2)^{n-1}}. \tag{5}$$

Din această formulă de recurenţă se poate deduce orice I_n şi, prin intermediul formulei (4), orice J_n.

Exerciţiul 2. Să se calculeze integrala nedefinită

$$I = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2(x-2)(x^2+1)}dx$$

pe un interval ce nu conţine punctele -1 şi 2.

Rezolvare. Facem descompunerea în fracţii simple

$$f(x) = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

După un calcul simplu se obţin valorile constantelor: $A = 1/6$, $B = -1/9$, $C = 1/9$, $D = 0$, $E = -1/2$. Integrând fiecare fracţie în parte, se obţine

$$I = \frac{-1}{6(x+1)} - \frac{1}{9}\ln|x+1| + \frac{1}{9}\ln|x-2| - \frac{1}{2}arctg\ x + C,\ x \in J,$$

unde J este intervalul de definiţie al funcţiei f.

Analizăm acum câteva clase de integrale reductibile la integrale din funcţii raţionale.

a) Integrale din funcţii raţionale dependente de funcţii trigonometrice: $\mathcal{I} = \int R(\sin x, \cos x)\, dx,\ x \in I$, unde R este o funcţie raţională de două variabile $u = \sin x$, $v = \cos x$, definite pe un interval deschis I.

Prin intermediul schimbării de variabilă $tg(x/2) = t$, $x \in J$ (J fiind un interval pe care $\cos(x/2) \neq 0$, $I \cap J =$ interval cu interior nevid) şi ţinând cont de formulele trigonometrice

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\ \ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},$$

integrala $\mathcal{I}$ se transformă într-una dintr-o funcţie raţională. În adevăr, $x(t) = 2arctg\ t$, $x'(t) = 2/\left(1+t^2\right)$ şi deci $\mathcal{I}$ se reduce la calculul integralei

$$2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt,$$

care este o integrală dintr-o funcţie raţională.

Dacă $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)\,,\ x \in I$, atunci calculul integralei se poate simplifica făcând schimbarea de variabilă $tgx = t$, cu $x \in J$, unde J este un interval pe care $\cos x \neq 0$ şi astfel ca $I \cap J$ să fie un interval cu interior nevid. Atunci $x(t) = arctg\ t$, $x'(t) = 1/\left(1+t^2\right).$ Cum $1/\cos^2 x = tg^2x + 1 = t^2 + 1$, rezultă că $\mathcal{I}$ devine

$$\int R\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)\frac{1}{1+t^2}dt.$$

Dacă $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)\,,\ x \in I$ (funcţie impară în variabila sin), atunci poate fi mai convenabilă schimbarea de variabilă $t = \cos x$.

Dacă $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)\,,\ x \in I$ (funcţie impară în variabila cos), atunci se poate utiliza schimbarea de variabilă $t = \sin x$.

Exerciţiul 3. Să se calculeze integrala $\mathcal{I} = \int \dfrac{1}{5+4\sin x}dx,\ x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Observăm că $5 + 4\sin x \neq 0,\ (\forall)\, x \in \mathbb{R}$. Facem schimbarea de varaibilă $t = tg\ (x/2)$, pentru $x \neq k\pi + \pi/2$ ($k \in \mathbb{Z}$) şi, conform celor prezentate mai sus în cazul general, $\mathcal{I}$ devine

$$\widetilde{\mathcal{I}} = 2\int \frac{1}{5t^2+8t+5}dt = \frac{2}{5}\int \frac{1}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}}dt.$$

Utilizând primitivele funcţiilor elementare şi revenind la variabila x, ajungem la

$$\mathcal{I} = \frac{2}{3}arctg\frac{5tg\,(x/2)+4}{3} + C.$$

Exerciţiul 4. Calculaţi $\mathcal{I} = \int \dfrac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx,\ x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Deoarece $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, facem schimbarea de variabilă $tgx = t$. Împărţind şi numărătorul şi numitorul la $\cos^2 x$, scriem integrala $\mathcal{I}$ sub forma

$$\mathcal{I} = \int \frac{tg^2 x}{\dfrac{1}{\cos^2 x} + tg^2 x} dx,$$

sau, folosind formula $\cos^2 x = 1/(t^2+1)$, ajungem la integrala dintr-o funcţie raţională $\widetilde{\mathcal{I}} = \int \dfrac{t^2}{(2t^2+1)(t^2+1)} dt$. Descompunem în fracţii simple şi integrăm:

$$\widetilde{\mathcal{I}} = \int \frac{1}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{2t^2+1} dt = arctgt - \frac{\sqrt{2}}{2} arctg\left(\sqrt{2}t\right) + C.$$

Revenind la variabila x, se ajunge la

$$\mathcal{I} = x - \frac{\sqrt{2}}{2} arctg\left(\sqrt{2} tg\ x\right) + C.$$

Exerciţiul 5. Să se determine primitivele funcţiei
$f(x) = 1/\sin^3 x \cos^2 x$, $x \in (0, \pi/2)$.

Rezolvare. Observăm că $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, deci putem face schimbarea de variabilă $\cos x = t$. Funcţia f devine $\widetilde{f}(t) = 1/t^2(1-t^2)^{3/2}$, iar $x'(t) = -1/\sqrt{1-t^2}$. Integrala devine

$$\widetilde{\mathcal{I}} = -\int \frac{1}{t^2(1-t^2)^2} dt.$$

Am ajuns astfel la o integrală dintr-o funcţie raţională. Descompunem funcţia de sub integrală în fracţii simple:

$$\frac{1}{t^2(1-t^2)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} + \frac{E}{t-1} + \frac{F}{(t-1)^2}.$$

Se determină coeficienţii A,...,F şi se integrează fiecare fracţie.

b) Integrale de tip Euler: $\mathcal{I} = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$, $x \in I$, $a \neq 0$, unde R este o funcţie raţională de două variabile $u = x$, $v = \sqrt{ax^2+bx+c}$, definite pe un interval deschis I pe care $ax^2+bx+c > 0$. Vom indica metode de calcul pentru integrala $\mathcal{I}$ în următoarele trei cazuri particulare.

a) Dacă $a > 0$, se face una dintre schimbările de variabilă
$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$ sau $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x - t$ sau
$\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x + t$ sau $\sqrt{ax^2+bx+c} = -\sqrt{a}x - t$.

b) Dacă trinomul ax^2+bx+c are rădăcini reale x_1, x_2, atunci putem scrie $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Vom face schimbarea de variabilă $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$, $x \in I$ sau $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_2)$, $x \in I$, unde I este un interval ce nu conţine pe x_1 (în primul caz), respesctiv x_2 (în al doilea caz).

c) Dacă $c > 0$, se face una dintre schimbările de variabilă
$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$ sau $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm tx + \sqrt{c}$.

Exerciţiul 6. Calculaţi $\mathcal{I} = \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}dx$, cu $x \in I$, I fiind un interval ce nu conţine pe -1.

Rezolvare. Suntem deopotrivă în cazurile $a)$ şi $c)$. Vom lucra de exemplu cu schimbarea de variabilă $\sqrt{x^2+x+1} = x + t$ corespunzătoare cazului $a)$. Ridicând la pătrat, avem $x^2+x+1 = x^2+2tx+t^2$, de unde $x(t) = \frac{t^2-1}{1-2t}$. Deci $x'(t) = -2\frac{t^2-t+1}{(2t-1)^2}$, $1+x = \frac{t^2-2t}{1-2t}$, iar $\sqrt{x^2+x+1} = x+t = \frac{-t^2+t-1}{1-2t}$. Folosind schimbarea de variabilă în integrală, obţinem $\widetilde{\mathcal{I}} = 2\int \frac{1}{t^2-2t}dt$. Descompunând în fracţii simple $\frac{1}{t^2-2t} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t-2}\right)$, integrând şi apoi revenind la variabila x, rezultă că

$$\mathcal{I} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x-2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\right| + C.$$

Exerciţiul 7. Să se determine valoarea integralei

$$\mathcal{I} = \int \frac{1}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}dx, x \in I,$$

unde I este un interval inclus în $(0,4)$ care nu conţine pe $3/2$.

Rezolvare. Suntem în cazul $b)$ cu $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Vom face de exemplu schimbarea de variabilă $\sqrt{4x-x^2} = tx$. De aici deducem pe rând $x(t) = \frac{4}{t^2+1}$, $x'(t) = \frac{-8t}{(t^2+1)^2}$, $2x-3 = \frac{5-3t^2}{t^2+1}$, $\sqrt{4x-x^2} = \frac{4t}{t^2+1}$. Atunci integrala devine $\widetilde{\mathcal{I}} = 2\int \frac{1}{3t^2-5}dt$. Un calcul simplu ne conduce la

$$\mathcal{I} = \sqrt{\frac{5}{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(4-x)}-\sqrt{5x}}{\sqrt{3(4-x)}+\sqrt{5x}}\right| + C.$$

Exerciţiul 8. Să se calculeze primitivele funcţiei

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}},\ x \in D,$$

D fiind intervalul pe care funcţia este definită.

Rezolvare. Suntem în cazul $c)$ de la integrale de tip Euler. Vom face de exemplu substituţia $\sqrt{1-2x-x^2} = tx-1$. Un simplu calcul ne conduce la

$$x(t) = \frac{2(t-1)}{t^2+1},\ x'(t) = 2\frac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2},\ 1+\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{2t^2-2t}{t^2+1}.$$

Atunci

$$\widetilde{\mathcal{I}} = \int \frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}dt = \int\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{2}{t^2+1}\right)dt.$$

Integrând şi revenind apoi la substituţia făcută, se ajunge la

$$\mathcal{I} = \ln\left|1 - \frac{x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right| + 2arctg\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x} + C.$$

2. Integrala Riemann (integrala definită)

2.1. Definiţia integralei definite (Riemann)

Fie $[a,b]$ $(a<b)$ un interval compact în $\mathbb{R}$. O succesiune de puncte $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ se numeşte o *diviziune* sau *partiţie a intervalului* $[a,b]$. Notăm cu $\mathcal{D}[a,b]$ mulţimea diviziunilor intervalului $[a,b]$. Numim *normă a diviziunii* Δ, numărul real pozitiv $||\Delta|| = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$.

În fiecare subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, alegem câte un punct intermediar $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i=\overline{1,n}$. Un sistem de puncte $\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ din intervalul $[a,b]$, cu $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i=\overline{1,n}$, se numeşte *sistem de puncte intermediare*. Convenim să notăm cu $\mathcal{P}(\Delta)$ mulţimea sistemelor de puncte intermediare ale diviziunii Δ.

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcţie dată. Vom defini ce înseamnă că f este integrabilă Riemann pe intervalul $[a,b]$. Pentru aceasta, introducem mai întâi noţiunea de sumă Riemann asociată lui f, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare ξ.

Definiţia 1. Numim *sumă Riemann asociată funcţiei f, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare* $\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}}$ ale intervalului $[a,b]$, suma

$$S(f,\Delta,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{1}$$

Definiţia 2. Spunem că funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este *integrabilă Riemann pe* $[a,b]$ dacă există un număr real $I(f)$ cu proprietatea că

$(\forall)\,\varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta=\delta(\varepsilon)>0$, astfel încât $(\forall)\,\Delta\in\mathcal{D}[a,b]$ cu $||\Delta||<\delta$ şi $(\forall)\,\xi\in\mathcal{P}(\Delta)$, să avem

$$|S(f,\Delta,\xi) - I(f)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Notăm cu $\mathcal{R}[a,b]$ mulţimea funcţiilor integrabile Riemann pe $[a,b]$.

Observaţia 1. Numărul $I(f)$, dacă există, este unic. Într-adevăr, dacă $I_1(f)$ şi $I_2(f)$ ar fi două numere reale cu proprietatea din Definiţia 2, atunci $|I_1(f) - I_2(f)| < 2\varepsilon$ şi deci, cum $\varepsilon>0$ este arbitrar de mic, $I_1(f) = I_2(f)$.

Definiţia 3. Numărul real unic determinat $I(f)$ care satisface condiţia din Definiţia 2 se numeşte *integrala Riemann a funcţiei f pe* $[a,b]$. Se notează $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Remarcăm că dacă f este integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci

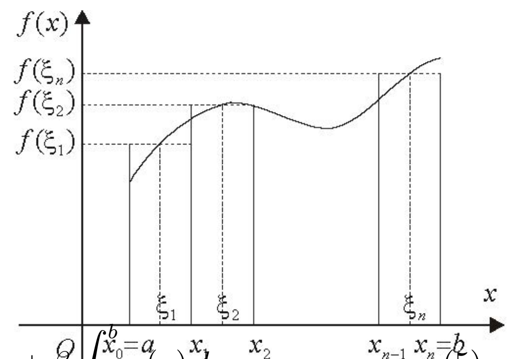
$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{||\Delta||\to 0} S(f,\Delta,\xi) = \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \tag{3}$$

independent de alegerea punctelor intermediare ξ.

Observaţia 2. Din caracterizarea limitei cu şiruri rezultă că $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ dacă şi numai dacă oricare ar fi şirul de diviziuni $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n, ...$ ale intervalului $[a,b]$, cu şirul normelor $||\Delta_n|| \to 0$ (pentru $n \to \infty$) şi oricare ar fi şirul de puncte intermediare (ξ^n), avem

$$\lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n, \xi^n) = I(f). \tag{4}$$

Observaţia 3. Sumele parţiale aproximează aria subgraficului lui f. Reamintim că subgraficul unei funcţii f este suprafaţa plană mărginită de graficul lui f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = a$, $x = b$.



2.2. Proprietăţi ale integralei definite

Teorema 1 (liniaritatea). *Dacă* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *atunci* $\alpha f + \beta g \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi*

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5}$$

Teorema 2 (de conservare a inegalităţilor). *Dacă* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $f(x) \leq g(x)$, $(\forall)\, x \in [a,b]$, *atunci* $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Corolarul 1. *Dacă* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $f(x) \geq 0$, $(\forall)\, x \in [a,b]$, *atunci* $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Teorema 3 (de mărginire a funcţiilor integrabile). *Dacă* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *atunci* f *este mărginită pe* $[a,b]$.

Corolarul 2. *Dacă* $f \in \mathcal{R}[a,b]$, *atunci* $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Corolarul 3. (Teorema întâi de medie) *Dacă* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *şi* $m \leq f(x) \leq M$, $(\forall)\, x \in [a,b]$, *atunci*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Observaţia 4. Ca o consecinţă directă a teoremei de mai sus, putem afirma că dacă o funcţie reală este nemărginită pe un interval compact, atunci ea nu este integrabilă Riemann pe acel compact.

Observaţia 5. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată, adică există funcţii mărginite pe un interval $[a,b]$ care nu sunt integrabile Riemann pe $[a,b]$. Un contraexemplu este următorul.

Exerciţiul 1. Funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

este mărginită pe $[a,b]$ de 0 şi de 1, dar nu este integrabilă Riemann pe $[a,b]$. Ea se numeşte funcţia lui Dirichlet. Într-adevăr, fie $\Delta \in \mathcal{D}[a,b]$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ conţine atât numere raţionale cât şi numere iraţionale. Fie $\xi = (\xi_i)_{i=\overline{1,n}} \in \mathcal{P}(\Delta)$.

Dacă prin reducere la absurd f ar fi integrabilă pe $[a,b]$, atunci suma Riemann ar trebui să aibă aceeaşi limită, indiferent cum alegem punctele intermediare ξ_i. Dacă alegem $\xi_i \in$

$[x_{i-1}, x_i] \setminus \mathbb{Q}$, atunci $f(\xi_i) = 0$ şi deci $S(f, \Delta, \xi) = 0$. Dacă $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q}$, atunci $f(\xi_i) = 1$ şi deci $S(f, \Delta, \xi) = b - a$. Am ajuns astfel la o contradicţie, deci afirmaţia de mai sus este justificată.

O condiţie necesară şi suficientă de integrabilitate se obţine din caracterizarea limitei prin condiţia lui Cauchy. Enunţăm mai jos, fără demonstraţie, acest rezultat.

Teorema 4 (de caracterizare de tip Cauchy). *Funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ dacă şi numai dacă*

$$(\forall)\, \varepsilon > 0,\ \ (\exists)\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \textit{a.î.}\ \ (\forall)\, \Delta \ \textit{diviziune a intervalului}\ \ [a, b]$$

$$\textit{cu}\ \ ||\Delta|| < \delta(\varepsilon)\ \ \textit{şi}\ \ (\forall)\,(\xi'),\ \ (\xi'')\ \ \textit{sisteme de puncte intermediare,}$$

$$\textit{să avem}\ \ |S(f, \Delta, \xi') - S(f, \Delta, \xi'')| < \varepsilon. \tag{6}$$

Propoziţia 1. *Dacă $f \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[c, d]$, oricare ar fi subintervalul $[c, d] \subset [a, b]$.*

Teorema 5 (de aditivitate a integralei în raport cu intervalul $[a, b]$). *Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ şi $c \in (a, b)$ dat. Dacă $f \in \mathcal{R}[a, c]$ şi $f \in \mathcal{R}[c, b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$ şi*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{7}$$

Exerciţiul 2. Fie $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [1, 2] \\ 2x + 1, & x \in [2, 3]. \end{cases}$ Să se arate că $f \in \mathcal{R}[1, 3]$ şi să se calculeze $\int_1^3 f(x)\, dx$.

Rezolvare. Notăm $f_1(x) = e^x$, $x \in [1, 2]$ şi $f_2(x) = 2x + 1$, $x \in [2, 3]$. Deoarece $f_1 \in \mathcal{R}[1, 2]$ şi $f_2 \in \mathcal{R}[2, 3]$, rezultă că $f \in \mathcal{R}[1, 3]$ şi

$$\int_1^3 f(x)\, dx = \int_1^2 e^x dx + \int_2^3 (2x + 1) dx = e^2 - e + 6.$$

Încheiem paragraful cu două proprietăţi referitoare la integrabilitatea produsului, respectiv a câtului a două funcţii integrabile. Vom vedea că proprietatea de integrabilitate se menţine atât pentru produs, cât şi pentru raport, dar valoarea integralei nu se poate calcula după o regulă prestabilită, ca în cazul sumei sau produsului cu un scalar.

Teorema 6. (inegalitatea lui Schwarz-Cauchy-Buniakowski pentru integrala Riemann). *Dacă $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, atunci*

$$\left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right).$$

2.3. Clase de funcţii integrabile

Teorema 7 (de integrabilitate a funcţiilor continue). *Dacă f este o funcţie continuă pe $[a, b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Teorema 8 (de integrabilitate a funcţiilor monotone) *Presupunem că $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie monotonă pe $[a, b]$. Atunci $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Definiţia 4. Funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte *monotonă pe porţiuni pe* $[a,b]$ dacă intervalul $[a,b]$ se poate scrie ca o reuniune finită de intervale $[a,c_1]$, $[c_1,c_2]$, ...,$[c_p,b]$ astfel încât, pe fiecare dintre ele f este monotonă (nu neapărat de acelaşi fel).

Teorema 9 (de integrabilitate a funcţiilor monotone pe porţiuni). *Dacă* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie monotonă pe porţiuni pe* $[a,b]$, *atunci* $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Observaţia 6. Am văzut că o funcţie continuă este integrabilă Riemann. Reciproca nu este adevărată. De exemplu, funcţia $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dată de $f(x) = x$ pentru $x \in [-1,0]$ şi $f(x) = 2x+1$ pentru $x \in (0,1]$ nu este continuă, dar este integrabilă Riemann pe $[-1,1]$ conform Teoremei 5.

Ne punem atunci întrebarea: câte puncte de discontinuitate poate avea o funcţie integrabilă? Introducem câteva noţiuni auxiliare.

Definiţia 5. O mulţime $E \subset \mathbb{R}$ *are măsura Lebesgue nulă* dacă $(\forall)\,\varepsilon > 0$ există o familie finită sau numărabilă de intervale (a_i,b_i), astfel încât $E \subset \cup_i (a_i,b_i)$ şi $\sum\limits_i (b_i - a_i) < \varepsilon$.

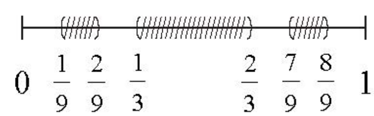
Dăm câteva exemple de mulţimi de măsură Lebesgue nulă:

1) orice mulţime finită;

2) orice mulţime numărabilă (care se poate pune în corespondenţă bijectivă cu $\mathbb{N}$);

3) *mulţimea lui Cantor* (care are măsura Lebesgue zero, dar este o mulţime nenumărabilă)*:*

Împărţim intervalul $[0,1]$ în trei părţi egale şi înlăturăm intervalul din mijloc, $[1/3,2/3]$. Cele două intervale rămase, $[0,1/3]$ şi $[2/3,1]$, se împart fiecare în câte trei subintervale egale, după care eliminăm din nou intervalele din mijloc, adică $[1/9,2/9]$, respectiv $[7/9,8/9]$. Continuăm această operaţie, adică înlăturăm mereu intervalele din mijloc după ce am împărţit fiecare interval rămas în trei părţi egale. Lungimea reuniunii intervalelor eliminate este



$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + ... = 1.$$

De aici rezultă că mulţimea C (numită mulţimea lui Cantor), care rămâne după înlăturarea tuturor acestor intervale, este de măsură Lebesgue nulă.

Definiţia 6. Funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte *funcţie continuă aproape peste tot* (şi scriem "continuă a.p.t".) dacă mulţimea D a punctelor sale de discontinuitate are măsura Legesgue zero.

Teorema 10. (Teorema lui Lebesgue). *O funcţie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *este integrabilă Riemann pe* $[a,b]$ *dacă şi numai dacă* f *este mărginită şi continuă aproape peste tot.*

Vom ilustra importanţa acestei teoreme prin câteva exemple remarcabile.

Exerciţiul 3 (Funcţia lui Riemann). Funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, \text{ dacă } x = p/q \in \mathbb{Q} \cap (0,1] \\ 0, \text{ în rest (în 0 şi în } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

este evident mărginită. Vom demonstra că ea este continuă în punctele iraţionale ale intervalului $[0,1]$. Într-adevăr, fie $x_0 \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ fixat şi (x_n) un şir din $[0,1]$ convergent la x_0. Dacă (x_n) este şir de numere iraţionale, atunci $f(x_n) = 0$ este evident convergent la $f(x_0) = 0$.

Dacă (x_n) este şir de numere raţionale $x_n = p_n/q_n$, atunci arătăm că $q_n \to \infty$. Presupunem prin reducere la absurd că şirul de numere naturale (q_n) nu tinde la ∞. Atunci el are un subşir mărginit (q_{n_k}). Dar acest lucru nu este posibil decât dacă (q_{n_k}) are la rândul lui un subşir constant $\left(q_{n_{k_l}}\right)$. Atunci acest subşir are limita un număr natural q. Subşirul corespunzător $\left(p_{n_{k_l}}\right)$ fie tinde la $+\infty$, fie are un subşir mărginit. În primul caz $x_{n_{k_l}} = p_{n_{k_l}}/q_{n_{k_l}} \to \infty$, ceea ce contrazice ipoteza $x_n \to x_0$. În cel de-al doilea caz, făcând un raţionament pentru $p_{n_{k_l}}$ similar cu cel pentru q_n, se ajunge la concluzia că şirul $\left(p_{n_{k_l}}\right)$ admite un subşir convergent la un număr natural p. Atunci subşirul corespunzător al lui (x_n) converge la $p/q \in \mathbb{Q}$, acest lucru fiind din nou în contradicţie cu ipoteza $x_n \to x_0 \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Aşadar am dovedit că şirul $q_n \to \infty$. Atunci $f(x_n) = 1/q_n \to 0$. Cum $f(x_0) = 0$, obţinem continuitatea funcţiei f în orice punct x_0 iraţional din $[0,1]$. Deci mulţimea D a punctelor de discontinuitate ale lui f este inclusă în $\mathbb{Q}$, adică este cel mult numărabilă. Aşadar D este de măsură Lebesgue zero. Conform Teoremei lui Lebesgue, rezultă că f este integrabilă Riemann pe $[0,1]$.

Exerciţiul 4 (Funcţia lui Cantor). Fie C mulţimea lui Cantor definită mai sus. Construim funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ astfel: pe fiecare subinterval din mijloc pe care l-am înlăturat îi dăm lui f o valoare constantă. De exemplu pe intervalul $[1/3, 2/3]$ luăm $f(x) = 1/2$; pe $[1/9, 2/9]$ definim $f(x) = 1/4$ şi pe $[7/9, 8/9]$ luăm $f(x) = 3/4$ etc. Pe fiecare astfel de subinterval f este constantă, deci continuă. Doar în punctele de schimbare a formei (adică pe mulţimea C de măsură Lebesgue zero), funcţia f poate fi discontinuă. Fiind şi mărginită, f este integrabilă Riemann pe $[0,1]$.