3. Puncte ordinare. Puncte singulare. Funcţii elementare

1. Puncte ordinare. Puncte singulare. Punctul de la infinit

Punctul de la infinit.

Relaţia $z = 1/\zeta$ pune în corespondenţă punctele planului variabilei ζ cu punctele planului variabilei z. Exceptând punctele $z = 0$ şi $\zeta = 0$, între punctele celor două plane, există o corespondenţă biunivocă şi bicontinuă.

Punctului $\zeta = 0$ îi corespunde un singur punct prin aplicaţia $z = 1/\zeta$. El se notează $z = \infty$ şi este numit *punctul de la infinit* al planului variabilei z. Prin intermediul acestui punct, transformarea $z = 1/\zeta$ devine biunivocă şi bicontinuă în tot $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Mulţimea se numeşte *planul complex extins.*

Observaţia 1. O vecinătate $|\zeta| < r$ a punctului $\zeta = 0$ se transformă prin aplicaţia $z = 1/\zeta$ în $|z| > 1/r$, adică în exteriorul unui cerc de centru 0 si rază $R = 1/r$.

Definiţia 1. O mulţime de forma $\{z \in \mathbb{C},\ |z| > R\}$ se numeşte *vecinătate a punctului de la infinit.*

Puncte ordinare. Puncte singulare.

Definiţia 2. Fie E o mulţime deschisă în $\mathbb{C}$ şi $f : E \to \mathbb{C}$ o funcţie dată. Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte *punct ordinar pentru* f, dacă există un disc deschis centrat în z_0, $\Delta(z_0, \rho) = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ |z - z_0| < \rho\}$ pe care f este olomorfă.

Definiţia 3. Un punct $z_0 \in \mathbb{C}$ se numeşte *punct singular pentru* f dacă f nu are în z_0 un punct ordinar.

Observaţia 2. Punctul $z = \infty$ este punct ordinar (respectiv singular) pentru $f(z)$, dacă $\zeta = 0$ este punct ordinar (respectiv singular de aceeaşi natură) pentru funcţia $\varphi(\zeta) = f(1/\zeta)$.

Definiţia 4. Un punct singular z_0 al funcţiei f se numeşte *punct singular izolat pentru* f, dacă există un disc centrat în z_0 care nu mai conţine alte puncte singulare ale lui f, afară de z_0.

Vom introduce acum o primă clasă de puncte singulare, anume clasa polilor.

Definiţia 5. Un punct singular $z_0 \in \mathbb{C}$ al funcţiei $f : E \to \mathbb{C}$ (E deschis) se numeşte *pol al lui* f, dacă $(\exists) n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ şi o funcţie $\phi : E \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $\phi(z_0) \neq 0$, $\phi \in \mathcal{O}(V)$, unde V este o vecinătate a lui z_0, astfel încât

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n},\ (\forall) z \in V. \tag{1}$$

Numărul n se numeşte *ordinul polului* z_0.

Observaţia 3. Dacă $n = 1$, atunci z_0 se numeşte *pol simplu* sau *pol de ordin* 1. Dacă $n = 2$, atunci z_0 se numeşte *pol dublu sau pol de ordin* 2, iar dacă $n = 3$, atunci z_0 este *pol triplu sau de ordin* 3.

Se poate demonstra uşor următorul rezultat.

Teorema 1. *Polii unei funcţii* $f : D \to \mathbb{C}$ (D domeniu) *sunt puncte singulare izolate.*

Exerciţiul 1. Fie funcţia

$$f(z) = \frac{z^2(z-2)}{(z+1)(z^2+4)^2}.$$

Polii lui f sunt: -1 (simplu), $2i$ (dublu) şi $-2i$ (dublu). Toate celelalte numere complexe (diferite de -1, $2i$, $-2i$) situate la distanţă finită sunt puncte ordinare pentru f.

Teorema 2. *Fie $f : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfă, $z_0 \in D$. Punctul $z = z_0$ este pol al lui f dacă şi numai dacă $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.*

Teorema 3. *Funcţia $f : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfă are în $z = z_0$ un pol de ordin n dacă şi numai dacă $(\exists)\ \lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) \in \mathbb{C}^*$ (limita există şi este nenulă şi finită).*

Definim acum (cu ajutorul limitei) alte două clase de puncte singulare, anume puncte singulare esenţiale şi puncte singulare removabile.

Definiţia 6. Punctul singular izolat $z = z_0$ se numeşte *punct singular esenţial* pentru funcţia $f : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$, dacă nu $(\exists)\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Definiţia 7. Punctul singular izolat $z = z_0$ al lui f se numeşte *punct singular removabil sau eliminabil sau aparent* dacă există şi este finită limita $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Teorema 4 (Teorema lui Riemann). *Funcţia $f : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfă are în $z = z_0$ un punct singular removabil dacă şi numai dacă $(\exists)\ \lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$.*

Exerciţiul 2. Să se afle punctele singulare şi natura lor pentru funcţiile $f(z) = e^{1/(z-z_0)}$, $g(z) = \dfrac{\sin z}{z}$.

Rezolvare. Arătăm că z_0 este punct singular esenţial pentru f, anume că limita lui f în z_0 nu există. Pentru asta, luăm două şiruri cu limita z_0 :

$$z_n = z_0 + \frac{1}{2n\pi} \to z_0,\ z_n' = z_0 + \frac{1}{2n\pi i} \to z_0,$$

în care f să aibă limite diferite:

$$\begin{aligned} f(z_n) &= e^{1/(z_n - z_0)} = e^{2n\pi} \to \infty, \\ f(z_n') &= e^{1/(z_n' - z_0)} = e^{2n\pi i} = \cos 2n\pi + i \sin 2n\pi = 1 \to 1. \end{aligned}$$

Deci f nu are limită în z_0, de unde z_0 este punct singular esenţial.

Pentru g avem:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \text{ finită,}$$

deci $z = 0$ este punct singular removabil pentru g.

Definiţia 8. Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe domeniul D. Un punct ordinar $a \in D$ se numeşte *zero al funcţiei f* dacă există $\alpha \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ şi o funcţie $\psi \in \mathcal{O}(D)$, cu $\psi(a) \neq 0$ astfel încât

$$f(z) = (z-a)^\alpha \psi(z), (\forall) z \in D. \tag{2}$$

Numărul α se numeşte *ordinul de multiplicitate al zeroului a*.

Definiţia 9. Un zero a al funcţiei f se numeşte *zero izolat* dacă există un disc centrat în a , $\Delta(a,\rho)\subset D$ în care f să nu mai aibă alt zero în afară de a.

Teorema 5. *Zerourile unei funcţii olomorfe pe un domeniu D sunt puncte izolate.*

2. Funcţii elementare

a) Funcţia polinom

Definiţia 1. Se numeşte *funcţie polinom,* o funcţie f dată de

$$w=f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1z+a_0,$$

cu $a_i\in\mathbb{C}$, pentru $i=\overline{0,n}$ şi $a_n\neq 0$. Numărul n se numeşte *gradul polinomului.*

Teorema 1. *Funcţia polinom este olomorfă în orice domeniu mărginit. Ea nu are puncte singulare.*

b) Funcţia raţională

Definiţia 2. Se numeşte *funcţie raţională* în planul complex, un raport de două funcţii polinom,

$$R(z)=\frac{a_mz^m+a_{m-1}z^{m-1}+...+a_0}{b_pz^p+b_{p-1}z^{p-1}+...+b_0}, a_m, b_p\neq 0.$$

Notăm P, Q numărătorul , respectiv numitorul lui R. Presupunem că P, Q sunt relativ prime.

Teorema 2. *O funcţie raţională este olomorfă în orice domeniu mărginit care nu conţine rădăcini ale numitorului. Rădăcinile numitorului sunt poli de ordin egal cu ordinul de multiplicitate al rădăcinii respective a numitorului.*

Exerciţiul 1. Determinaţi punctele singulare ale funcţiei $f(z)=\dfrac{z^5+1}{z(z^2+1)^\alpha}$, $\alpha\in\mathbf{N}^*$.

Punctul $z=0$ este pol simplu pentru f, iar $z=i$, $z=-i$ sunt poli de ordin α.

c) Funcţia radical

Definiţia 3. Se numeşte *funcţie radical de ordin n din $z-a$* (unde $a\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$), o funcţie care face să corespundă numărului complex z, un alt număr complex w, dat prin

$$z=a+w^n(=g(w)). \tag{1}$$

Se scrie $w=\sqrt[n]{z-a}=f(z)$. Prin definiţie $\sqrt[n]{0}=0$.

Definiţia 4. Numim *funcţie multivocă definită pe mulţimea nevidă $A\subseteq\mathbb{C}$*, orice aplicaţie $f:A\to\mathcal{P}(\mathbb{C})=$ mulţimea părţilor lui $\mathbb{C}$, deci o aplicaţie care asociază oricărui $z\in A$, o mulţime de valori $f(z)\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$ (şi nu neapărat o singură valoare).

Exemplu. Aplicaţia $Arg:\mathbb{C}^*\to\mathcal{P}(\mathbb{C})$ definită în primul paragraf este o funcţie multivocă.

Următoarea teoremă stabileşte că funcţia radical este de asemenea multivocă.

Teorema 3. *Funcţia radical de ordin n este o funcţie multivocă cu n ramuri şi are numai singularităţile $z=a$ şi $z=\infty$, numite puncte critice algebrice (neizolate). Domeniul de olomorfie al unei ramuri se obţine scoţând din planul (z), punctele unei semidrepte ce uneşte a cu ∞ (numită tăietură).*

Ramurile lui f sunt date de

$$f_k(z) = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}),\ k=\overline{0,n-1}, \tag{2}$$

unde $z-a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Exerciţiul 2. Calculaţi $\sqrt[5]{-2-2i}$, luând pentru funcţia $f(z) = \sqrt[5]{z}$ ramura care satisface $f(-1) = -1$.

Pentru $n=5$, ramurile funcţiei f sunt:

$$f_k(z) = \sqrt[5]{r}\left(\cos\ \frac{\varphi+2k\pi}{5} + i\ \sin\ \frac{\varphi+2k\pi}{5}\right),\ k=\overline{0,4},$$

unde $z = r\left(\cos\ \varphi + i\ \sin\ \varphi\right)$, adică $r = |z|$, $\varphi = \arg_0 z$. Deoarece $-1 = \cos\ \pi\ +\ +i\ \sin\ \pi$ şi $1 = \cos\ 0 + i\ \sin\ 0$, ramura f_k a lui f care satisface $f_k(-1) = -1$ se găseşte din relaţia de mai sus pentru $r=1,\ \varphi=\pi$, adică $(\pi+2k\pi)/5 = \pi + 2p\pi,\ k=\overline{0,4},\ p\in\mathbb{Z}$. Acest lucru se poate realiza numai pentru $k=2$. Deci ramura cerută este cea corespunzătoare lui $k=2:$

$$f_2(z) = \sqrt[5]{r}\left(\cos\ \frac{\varphi+4\pi}{5} + i\ \sin\ \frac{\varphi+4\pi}{5}\right).$$

Să calculăm acum $f_2(-2-2i)$. Cum $r = |-2-2i| = 2\sqrt{2}$ şi argumentul este $\varphi = \arg_0(-2-2i) = 5\pi/4$, obţinem

$$f_2(-2-2i) = \sqrt[10]{8}\left(\cos\ \frac{21\pi}{20} + i\ \sin\ \frac{21\pi}{20}\right).$$

d) Funcţia exponenţială în planul complex (z)

Definiţia 5. Se numeşte *funcţie exponenţială* e^z, funcţia care asociază oricărui număr complex $z = x+iy$, un alt număr complex w, de modul e^x şi argument y, adică:

$$f(z) = e^z = e^x\left(\cos\ y + i\ \sin\ y\right). \tag{3}$$

Observaţia 1. Din definiţie avem $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $e^{-z} = 1/e^z$, $e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$, $(e^z)^m = e^{mz}$, $m\in\mathbb{Z}$, $z\in\mathbb{C}$.

Din $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ şi (3), găsim

$$e^{iy} = \cos\ y + i\ \sin\ y.$$

Deci orice număr complex $z = r(\cos\ \varphi + i\ \sin\ \varphi)$ se mai poate scrie sub formă exponenţială în forma

$$z = re^{i\varphi}.$$

Teorema 4. *a) Funcţia exponenţială este monogenă în orice punct z situat la distanţă finită şi $f'(z) = e^z$.*

b) Funcţia $f(z) = e^z$ este periodică de perioadă $2\pi i$.

Demonstraţie. b) Dacă $z = x+iy$ şi $\omega = \omega_1 + i\omega_2$, atunci condiţia de periodicitate pentru f, $f(z+\omega) = f(z)$ se scrie $e^{x+\omega_1}\left[\cos\ (y+\omega_2) + i\ \sin\ (y+\omega_2)\right] = e^x\left(\cos\ y + i\ \sin\ y\right),$

de unde avem $x + \omega_1 = x$ şi $y + \omega_2 = y + 2k\pi$. Deci perioadele funcţiei f sunt $\omega = 2k\pi i$; perioada principală este $2\pi i$.

e) Funcţia logaritmică în planul complex

Definiţia 6. Se numeşte *funcţie logaritmică în planul complex* funcţia care asociază unui număr complex $z \neq a$, un alt număr complex w astfel încât $e^w + a = z \, (= g(w))$. Vom nota $f(z) = w = Log\ (z - a)$.

Teorema 5. *Funcţia logaritmică este multivocă cu o infinitate de ramuri date de*

$$f_k(z) = w_k = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

unde $r = |z - a|$, *iar* $\varphi = \arg_0(z - a)$. *Altfel spus* $z - a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Singularităţile acestei funcţii sunt* $z = a$ *şi* $z = \infty$, *numite puncte critice logaritmice (neizolate). Domeniul de olomorfie al unei ramuri se obţine eliminând din planul complex punctele unei semidrepte* T *(numită tăietură) care uneşte cele două puncte singulare.*

Exerciţiul 3. Să se calculeze $Log\,(1+i)$ pe ramura funcţiei $f(z) = Log\, z$ care satisface $f_k(-3) = \ln 3 + 7\pi i$.

Folosind formula (3.38) pentru $z = -3$, avem $f_k(-3) = \ln 3 + i(2k+1)\pi$. Aceasta, împreună cu ipoteza, conduce la $k = 3$. Deci dacă $z = re^{i\varphi}$, atunci avem $f_k(z) = \ln r + i(\varphi + 6\pi)$.

Pentru $z = 1 + i$, avem $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$, de unde

$$[Log\,(1+i)]_{k=3} = \ln\sqrt{2} + i(25\pi/4).$$

f) Funcţia putere complexă a unui număr complex

Definiţia 7. Numim *funcţie putere complexă* z^α *a numărului complex* z nenul, funcţia care asociază lui $z \in \mathbb{C}^*$ un alt număr $w \in \mathbb{C}$, dat prin

$$w = f(z) \overset{not.}{=} z^\alpha = e^{\alpha\, Log\, z}.$$

Exerciţiul 4. Să se calculeze i^i. Deoarece $|i| = 1$ şi $\arg_0 i = \pi/2$, rezultă că $i^i = e^{i\,Log\,i} = e^{-(\pi/2) - 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

g) Funcţii trigonometrice şi funcţii hiperbolice

Definiţia 8. *Funcţiile trigonometrice* în $\mathbb{C}$ se definesc prin relaţiile:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Definiţia 9. *Funcţiile hiperbolice* se definesc prin relaţiile:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \ \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \ \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Teorema 6. *Funcţiile* $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ *sunt olomorfe în orice domeniu mărginit şi* $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$, $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$, $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.

Funcţiile $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ *sunt olomorfe în orice domeniu mărginit, cu excepţia punctelor în care se anulează numitorii, puncte care sunt poli simpli.*

Exerciţiul 5. $\cos(2+i) = \cos 2 \cos i - \sin 2 \sin i = \cos 2\operatorname{ch}1 - i \sin 2\operatorname{sh}1$, pentru că $\cos iz = \operatorname{ch} z$ şi $\sin iz = i\operatorname{sh} z$. Se poate calcula şi folosind Definiţia 8.