4. Integrala curbilinie în planul complex

1. Definiţia integralei în $\mathbb{C}$

Definiţia 1. Numim *curbă în* D o aplicaţie continuă $\gamma : [t_1, t_2] \to D$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ daţi, $t_1 < t_2$.

Definiţia 2. Numim *curbă simplă* o curbă $\gamma : [t_1, t_2] \to D$ injectivă pe $[t_1, t_2)$ (care nu se autointersectează).

Definiţia 3. Curba γ se numeşte *închisă* dacă $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.

Definiţia 4. Numim *domeniu simplu conex*, un domeniu D (mulţime deschisă şi conexă) cu proprietatea că orice curbă simplă închisă (contur) conţinută în D, delimitează un domeniu inclus în D.

Definiţia 5. Numim *domeniu multiplu conex de ordin de conexitate* $p+1$, un domeniu ce are frontiera formată din $p+1$ curbe închise: una C_0, în interiorul căreia sunt incluse celelalte, $C_1, C_2, \ldots, C_p$ şi astfel încât acestea din urmă sunt situate fiecare în exteriorul celeilalte.

Convenţie. Curbele se consideră orientate. Sensul direct pe o curbă se ia astfel încât parcurgerea să lase interiorul curbei la stânga.

Definiţia 6. Fie $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $f : D$ (domeniu) $\to \mathbb{C}$ continuă pe D şi γ curbă simplă, netedă (de clasă C^1) inclusă în D. *Integrala curbilinie din* f *pe curba* γ se defineşte prin

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx). \qquad (1)$$

Observaţia 1. Integrala (1) se poate calcula în două moduri:
(a) calculând cele două integrale curbilinii reale,
(b) transformând-o într-o integrală definită obişnuită

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\,z'(t)\,dt, \qquad (2)$$

unde $z = z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ este ecuaţia parametrică a curbei γ de clasă C^1. (γ este definită de $x = x(t)$, $y = y(t)$, cu $x, y \in C^1[t_1, t_2]$, deci $z = z(t)$, unde $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [t_1, t_2]$.)

Exerciţiul 1. Să se calculeze integrala $I = \int_\gamma \overline{z}\,dz$, unde γ este pătratul cu vârfurile $1+i,\ -1+i,\ -1-i,\ 1-i$.

Rezolvare. Notăm A, B, C, D imaginile în planul complex ale punctelor de mai sus, în ordinea dată în enunţ. Atunci,

$$I = \int_{[AB]} \overline{z}\,dz + \int_{[BC]} \overline{z}\,dz + \int_{[CD]} \overline{z}\,dz + \int_{[DA]} \overline{z}\,dz.$$

Pe segmentul $[AB]$, avem $y = 1$ (deci $dy = 0$) şi x ia valori de la 1 la -1, în această ordine. Atunci,

$$\int\limits_{[AB]} \overline{z}\, dz = \int_1^{-1} (x - i)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - ix \right) |_1^{-1} = 2i.$$

Analog, toate celelalte integrale sunt egale cu $2i$, deci $I = 8i$.

2. Teorema fundamentală a lui Cauchy

Teorema 1 (fundamentală Cauchy pentru domenii simplu conexe). *Dacă D este domeniu simplu conex, γ este curbă închisă, netedă (sau de clasă C^1) inclusă în D şi $f \in \mathcal{O}(D)$, $f' \in C^0(D)$ (*f' continuă*), atunci*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0. \tag{2}$$

Demonstraţie. Fie Δ domeniul mărginit de γ. Presupunem că γ este curbă simplă pentru început. Din definiţie, putem scrie $\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \int\limits_{\gamma} (udx - vdy) + i \int\limits_{\gamma} (vdx + udy)$. Forma diferenţială $\omega_1 = Pdx + Qdy$, cu $P = u$, $Q = -v$ este închisă, adică $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ conform celei de-a doua condiţii Cauchy-Riemann. Deci ω_1 este exactă, de unde

$$\int\limits_{\gamma} \omega_1 = \int\limits_{\gamma} udx - vdy = 0.$$

Analog şi a doua integrală de mai sus este 0:

$$\int\limits_{\gamma} \omega_2 = \int\limits_{\gamma} vdx + udy = 0.$$

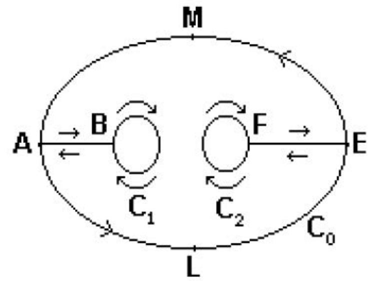
Deci, $\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0$.

Dacă γ ar avea un punct dublu, atunci integrala pe γ s-ar descompune în două integrale pe curbe închise, ambele nule.

Teorema 2 (Teorema fundamentală Cauchy pentru domenii multiplu conexe). *Fie D un domeniu multiplu conex de ordin de conexitate $p + 1$ şi $\Delta \subseteq D$ un domeniu multiplu conex de acelaşi ordin de conexitate, mărginit de curba C_0 - exterioară şi $C_1, \dots, C_p$ - interioare. Dacă $f \in \mathcal{O}(D)$, $f' \in C^0(D)$ (f' continuă pe D), atunci integrala lui f pe frontiera exterioară a lui Δ este egală cu suma integralelor lui f pe frontierele interioare ale lui Δ:*

$$\int\limits_{C_0} f(z)\, dz = \int\limits_{C_1} f(z)\, dz + \dots + \int\limits_{C_p} f(z)\, dz. \tag{3}$$

Demonstraţie. Pentru simplitate, considerăm un domeniu triplu conex. Fie A, B punctele în care o tăietură intersectează curbele C_0 şi C_1, iar E, F punctele în care a doua tăietură intersectează curbele C_0 şi C_2.



Domeniul delimitat de curba $(AB) \cup C_1 \cup \cup (BA) \cup (ALE) \cup (EF) \cup C_2 \cup (FE) \cup (EMA)$ este simplu conex, deci pe el putem aplica Teorema fundamentală a lui Cauchy:

$$\int_{\widehat{AB}} f(z)\,dz - \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{\widehat{BA}} f(z)\,dz + \int_{\widehat{ALE}} f(z)\,dz + \int_{\widehat{EF}} f(z)\,dz -$$

$$- \int_{C_2} f(z)\,dz + \int_{\widehat{FE}} f(z)\,dz + \int_{\widehat{EMA}} f(z)\,dz = 0$$

sau, echivalent,

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

3. Formula integrală a lui Cauchy

Teorema 3. (**Formula integrală a lui Cauchy pentru domenii simplu conexe**) *Dacă D este domeniu simplu conex, γ este curbă simplă, închisă, netedă, inclusă în D, care delimitează un domeniu mărginit Δ şi $f \in \mathcal{O}(D)$, atunci, pentru orice $a \in \Delta$,*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz. \tag{4}$$

(Deci, cunoscând valorile lui f pe curba γ, rezultă f cunoscută pe Δ).

4. Valoarea principală în sens Cauchy a unei integrale

Facem ipoteza:

(I)**:** Fie D un domeniu simplu conex, $f \in \mathcal{O}(D)$, $\Gamma \subseteq D$ o curbă simplă închisă, netedă (de clasă C^1) sau netedă pe porţiuni.

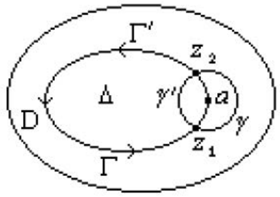
Notăm $I(a) = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$.

Fie $\Delta = Int\,\Gamma$. Distingem trei situaţii.

Dacă $a \in \Delta$, atunci $I(a) = 2\pi i f(a)$, conform formulei integrale Cauchy.

Dacă $a \notin \Delta \cup \Gamma$, atunci $I(a) = 0$, conform Teoremei fundamentale a lui Cauchy.

Ne ocupăm de cazul $a \in \Gamma$ (a este un punct singular pentru funcţia $\varphi(z) = f(z)/(z-a)$).



Vom ocoli punctul a astfel: descriem un cerc de centru a şi rază ρ, cu ρ suficient de mic astfel încât $\gamma \subset D$ ($\Delta(a, \rho)$ este discul de centru a şi rază ρ). Fie $\gamma \cap \Gamma = \{z_1, z_2\}$, $\gamma = C(a, \rho)$, $\gamma' = \gamma \cap \Delta$ (porţiunea din γ, inclusă în Δ) şi Γ' acea porţiune din Γ care nu este conţinută în discul

$\Delta(a,\rho)$. Deci, $\Gamma' \cup \gamma'$ este curbă simplă închisă, ce mărgineşte un domeniu simplu conex, pe care φ este olomorfă, deci

$$\int_{\Gamma' \cup \gamma'} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0,$$

de unde

$$\int_{\Gamma'} \frac{f(z)}{z-a} dz = -\int_{\gamma'} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Definiţia 6. În ipoteza (I), pentru $a \in \Gamma$, numim *valoare principală în sens Cauchy a integralei* $I(a) = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz$, numărul complex dat de

$$\text{v.p.} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \lim_{\rho \to 0} \int_{\Gamma'} \frac{f(z)}{z-a} dz. \tag{5}$$

Teorema 4. *În ipoteza (I), dacă $\pi - \delta$ este unghiul format de cele două semitangente în $a \in \Gamma$ la curba Γ, avem*

$$\text{v.p.} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = i(\pi - \delta) f(a). \tag{6}$$

Caz particular. *Dacă* în punctul $z = a$ *curba* Γ admite tangentă (adică cele două semitangente de mai sus sunt in prelungire), *în ipoteza* (I), *avem* $\pi - \delta = \pi$, de unde

$$\text{v.p.} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \pi i f(a), \tag{7}$$

numită **formula semireziduurilor**.

Concluzie. Reunind cazurile studiate, tragem concluzia că integrala $I(a)$ este dată de:

$$I(a) = \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = \begin{cases} 2\pi i f(a), \text{ dacă } a \in \Delta \text{ (formula integrală Cauchy)} \\ (\pi - \delta) i f(a), \text{ dacă } a \in \Gamma \text{ (valoarea principală)} \\ 0, \text{ dacă } a \notin \Delta \cup \Gamma \text{ (teorema fundam. Cauchy)} \end{cases}$$

Exerciţiul 2. Să se calculeze integrala $I = \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z^2 - \pi^2} dz$, pe următoarele curbe γ : a) $|z| = R < \pi$; b) $|z - \pi| = \pi/2$; c) $|z| = R > \pi$; d) $|z| = \pi$.

Rezolvare. a) Punctele singulare ale funcţiei de sub integrală (notată f) sunt $z_1 = \pi$, $z_2 = -\pi$ (poli simpli) şi sunt în exteriorul curbei de integrare γ. Atunci $f \in \mathcal{O}(D)$, unde D este un domeniu simplu conex care conţine cercul γ, dar nu conţine punctele z_1 şi z_2. Conform Teoremei fundamentale a lui Cauchy, avem $I = 0$.

b) Punctul z_1 este centrul cercului γ, iar z_2 este în exterior. Alegem D un domeniu simplu conex care conţine γ, dar nu conţine z_2 şi aplicăm Formula integrală a lui Cauchy pentru funcţia $g(z) = e^{iz}/(z+\pi)$, care este olomorfă pe D. Avem $I = 2\pi i\, g(\pi) = -i$.

c) Ambele puncte singulare ale lui f sunt în interiorul lui γ. Atunci descompunem $1/\left(z^2-\pi^2\right)$ în fracţii simple:

$$\frac{1}{z^2-\pi^2}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{z-\pi}-\frac{1}{z+\pi}\right),$$

deci

$$I=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z-\pi}dz-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z+\pi}\,dz.$$

Conform Formulei integrale a lui Cauchy pentru $g\left(z\right)=e^{iz}$ avem

$$I=ie^{i\pi}-ie^{-i\pi}=0.$$

d) Polii lui f sunt pe cercul γ,deci vom utiliza valoarea principală în sens Cauchy pentru aceeaşi descompunere ca la cazul c):

$$I=\frac{1}{2\pi}(i\pi g\left(\pi\right)-i\pi g\left(-\pi\right))=0.$$

5. Derivatele de ordin superior ale unei funcţii olomorfe

Fie γ o curbă simplă de lungime finită.

Teorema 5. *O funcţie f olomorfă într-un domeniu D, admite derivate de orice ordin. Derivata de ordin n se poate scrie*

$$f^{(n)}\left(z\right)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f\left(\zeta\right)}{\left(\zeta-z\right)^{n+1}}d\zeta, \tag{8}$$

unde γ este curbă simplă, închisă, netedă, inclusă în D, ce înconjoară punctul z.