5. Serii Taylor. Serii Laurent. Dezvoltări în serii de puteri ale funcţiilor complexe

1. Formula lui Taylor şi seria Taylor în planul complex

Teorema 1. *Dacă D este un domeniu simplu conex, $a \in D$ şi $f \in \mathcal{O}(D)$, atunci pentru orice cerc $\Gamma = C(a,\rho) \subset D$ şi pentru orice $z \in \Delta = \Delta(a,\rho)$ (discul de centru a şi rază ρ), avem:*

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + R_n(z), \tag{1}$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a), \tag{2}$$

iar $R_n(z)$ este un rest, $R_n(z) \to 0$ pentru $z \to a$.

Formula (1) se numeşte *formula lui Taylor pentru f şi punctul a* şi se mai scrie

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + R_n(z). \tag{3}$$

De asemenea, are loc dezvoltarea lui f în serie de puteri ale lui $z-a$ (numită **seria Taylor**):

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots. \tag{4}$$

Observaţia 1. 1) Orice serie Taylor este uniform convergentă în interiorul domeniului de convergenţă şi raza de convergenţă este $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$ sau $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, dacă aceste limite există. Dacă limitele de mai sus nu există, atunci ele se înlocuiesc cu limitele superioare (care există totdeauna). Seria Taylor se poate deriva şi integra termen cu termen.

2) Dacă f se reprezintă printr-o serie de puteri ca în (4), spunem că f este dezvoltată în serie de puteri în jurul lui a sau după puterile lui $z-a$.

3) Seria Taylor a unei funcţii întregi (olomorfă în tot planul complex) are raza de convergenţă $R = \infty$.

Exerciţiul 1. Să se dezvolte în serie Taylor funcţia $f(z) = e^z$ în interiorul unui cerc cu centrul în $a = 0$ şi să se deducă dezvoltările în serie în jurul originii pentru $\sin z$, $\cos z$, $sh\, z$, $ch\, z$.

Cum $f(z) = e^z$ este olomorfă în tot planul complex la distanţă finită şi $f^{(n)}(0) = 1$, avem conform formulei seriei Taylor

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ...$$

Ţinând cont de formulele de definiţie ale funcţiilor $\sin z$ şi $\cos z$ în $\mathbb{C}$, anume

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \ \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

deducem

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left[\left(1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...\right) - \left(1 - \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} + \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...\right)\right],$$

deci

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., (\forall)\, z \in \mathbb{C}.$$

Analog se obţine

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ...,\ (\forall)\, z \in \mathbb{C}.$$

Exerciţiul 2. Să se dezvolte în serie Taylor în vecinătatea originii funcţia dată de $f(z) = (1+z)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, unde pentru f am luat ramura pentru care $f(0) = 1$. Să se deducă de aici dezvoltările în serie Taylor pentru $\frac{1}{1+z}$, $\frac{1}{1-z}$, $Log\,(1-z)$.

Ştim că f este o funcţie multivocă (putere complexă a unui număr complex). Derivatele lui f sunt date de

$$f'(z) = \alpha(1+z)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+z} f(z),$$

$$f''(z) = \alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{(1+z)^2} f(z), ...$$

$$f^{(n)}(z) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{(1+z)^n} f(z).$$

Cum $f(0) = 1$, rezultă

$$f'(0) = \alpha,\ f''(0) = \alpha(\alpha-1), ..., f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)$$

şi deci

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1!} z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} z^n + ...$$

Această serie se numeşte *seria binomială* şi are raza de convergenţă $R = 1$:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(\alpha-n)} \right| = \\ = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1.$$

Deci dezvoltarea în serie de mai sus este valabilă pentru $|z| < 1$.

În particular, pentru $\alpha = -1$, avem

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots,\ \ |z| < 1,$$

numită *seria geometrică cu semn alternant.* Trecând pe z în $-z$, se obţine

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots,\ \text{pentru}\ \ |z| < 1.$$

Această serie se numeşte *seria geometrică* şi este des utilizată în aplicaţii.

Integrând termen cu termen seria geometrică (avem voie pe motive de uniformă convergenţă), obţinem

$$Log\,(1-z) = c - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - ... - \frac{z^{n+1}}{n+1} - ..., \ |z| < 1.$$

Pentru $z = 0$ avem $c = Log\,1 = 2k\pi i$. Aşadar,

$$Log\,(1-z) = 2k\pi i - z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - ... - \frac{z^{n+1}}{n+1} - ..., \ |z| < 1.$$

Următoarele două rezultate sunt consecinţe ale Teoremei lui Taylor.

Exerciţiul 3. Să se dezvolte în serie Taylor în vecinătatea originii, funcţia $f\,(z) = th\,z$.

Rezolvare. Funcţiile $sh\,z$ şi $ch\,z$ au dezvoltările în serie

$$sh\,z = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$

respectiv

$$ch\,z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Funcţia $th\,z$, fiind impară, are o dezvoltare în serie de forma

$$th\,z = c_1 + c_3 z^3 + c_5 z^5 + ... + c_{2n+1} z^{2n+1} + ...$$

Scriind $sh\,z = th\,z \cdot ch\,z$ şi înlocuind cele trei serii de mai sus, găsim coeficienţii dezvoltării în serie pentru $th\,z$: $c_1 = 1, \ c_3 = -1/3, \ c_5 = 2/15, ...$

Exerciţiul 4. Să se dezvolte în serie Taylor după puterile lui z, funcţia $f\,(z) = \sin^3 z$.

Rezolvare. Folosim formula trigonometrică

$$\sin 3z = 3\sin z - 4\sin^3 z,$$

de unde

$$\sin^3 z = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(3 - 3^{2n+1}\right) \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

2. Funcţii analitice. Principiul prelungirii analitice

Definiţia 1. Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ (D - domeniu din $\mathbb{C}$) se numeşte *analitică în* D, dacă $(\forall) z_0 \in D$, $(\exists) V_{z_0} \subseteq D$, V_{z_0} - vecinătate a lui z_0, astfel încât să existe o serie de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$, pentru care

$$f\,(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n, \ (\forall) z \in V_{z_0}.$$

(cu alte cuvinte, în vecinătatea oricărui punct $z_0 \in D$, f coincide cu suma unei serii de puteri ale lui $z - z_0$).

Teorema 2. *Orice funcţie analitică $f : D \to \mathbb{C}$ (D fiind domeniu) este olomorfă pe D şi reciproc, dacă $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe D, atunci f este analitică pe D,*

Teorema 3. (**Principiul prelungirii analitice**) *Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu, $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă şi $(z_n)_n$ un şir din D, având un punct de acumulare $z_0 \in D$ (există măcar un subşir z_{n_k} al lui z_n, convergent la z_0). Presupunem că $f(z_n) = 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$. Atunci f e identic nulă în D.*

Aplicaţie. Principiul prelungirii analitice se poate folosi pentru a extinde la $\mathbb{C}$, unele identităţi valabile în $\mathbb{R}$.

Exerciţiul 5. Arătaţi că în $\mathbb{C}$ are loc identitatea

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z. \tag{5}$$

Considerăm $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \cos 2z - \cos^2 z + \sin^2 z$. Funcţia f este olomorfă pe domeniul $\mathbb{C}$. Luăm şirul $z_n = x_n \in \mathbb{R}, (\forall) n \in \mathbb{N}$ un şir de numere reale, având un punct de acumulare $x \in \mathbb{R}$. Evident, $f(x_n) = 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$ (în $\mathbb{R}$ avem $\cos 2x_n = \cos^2 x_n - \sin^2 x_n$). Conform Teoremei 3, $f \equiv 0$ pe $\mathbb{C}$, deci egalitatea (5) are loc şi în $\mathbb{C}$.

Observaţia 2. Toate formulele trigonometrice sunt valabile şi în $\mathbb{C}$ (conform Principiului prelungirii funcţiilor analitice); la fel şi formulele pentru funcţiile hiperbolice.

5. Serii Taylor. Serii Laurent.

3. Dezvoltarea în serie Laurent a unei funcţii complexe

Teorema 1. *Fie cercurile concentrice $\Gamma_1 : |z - a| = \rho_1$; $\Gamma_2 : |z - a| = \rho_2$, cu $\rho_1 < \rho_2$; Δ - coroana circulară cuprinsă între ele, $\Delta : \rho_1 < |z - a| < \rho_2$. Fie D un domeniu multiplu conex astfel încât $\Delta \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subseteq D$, $f \in \mathcal{O}(D)$. Atunci, în orice $z \in \Delta$, f admite dezvoltarea*

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1 (z-a) + \cdots +$$

$$+ c_n (z-a)^n + \cdots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{1}$$

numită seria Laurent a funcţiei f pe coroana Δ.

Observaţia 1.

1) Coeficienţii c_k nu pot fi exprimaţi prin $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, pentru că f nu este olomorfă în interiorul cercului Γ_1; s-ar putea ca f să nu fie definită în a.

2) O serie Laurent este uniform convergentă pe orice coroană circulară $r_1 \leq |z - a| \leq r_2$ inclusă în Δ. În această coroană circulară, seria Laurent poate fi derivată şi integrată termen cu termen.

3) O serie Laurent este suma a două serii de puteri:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k = c_0 + c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \cdots, \tag{2}$$

convergentă pentru $|z-a|<\rho_2$, numită *partea tayloriană* şi

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k = \cdots + c_{-2}(z-a)^{-2} + c_{-1}(z-a)^{-1} = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a}, \qquad (3)$$

convergentă pentru $|z-a|>\rho_1$, numită *partea principală.* Ea este tot o serie de puteri, anume ale variabilei $\zeta = 1/(z-a)$.

4) Dezvoltarea în serie Laurent a unei funcţii f într-o coroană circulară este unică.

5) Dacă dezvoltarea în serie Laurent a lui f are loc într-o coroană circulară $\Delta = \{z \in \mathbb{C},\ \varepsilon < |z-a| < \rho_2\}$, cu ε oricât de mic (>0), atunci se spune că f este *dezvoltată în serie Laurent în jurul punctului "a".* În acest caz, dezvoltarea în serie Laurent e valabilă pe domeniul $\Delta_0 = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z-a| < \rho_2\}$. Această situaţie are loc dacă şi numai dacă în interiorul discului $\Delta(a, \rho_2)$, f are numai punctul singular "a".

Consecinţe ale dezvoltării în serie Laurent

Vom da caracterizări ale polilor, punctelor singulare esenţiale şi punctelor singulare removabile (punctelor singulare izolate) cu ajutorul seriilor Laurent.

Teorema 2. *a) Fie $f: D\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ olomorfă, $a \in D$. Punctul $z=a$ este pol de ordin p al lui f dacă şi numai dacă dezvoltarea lui f în serie Laurent în jurul lui $z=a$ este de forma:*

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots, \text{cu } c_{-p} \neq 0, \qquad (4)$$

adică partea principală a dezvoltării lui f în serie Laurent în jurul lui $z=a$ are p termeni.

b) Fie $f: D\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ olomorfă, $a \in D$. Punctul $z=a$ este punct singular esenţial al lui f dacă şi numai dacă partea principală a dezvoltării lui f în serie Laurent în jurul lui $z=a$ (adică pe o coroană circulară $\varepsilon < |z-a| < r$, $\varepsilon > 0$ oricât de mic), are o infinitate de termeni ($\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k$ are o infinitate de termeni).

c) Fie $f: D\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ olomorfă, $a \in D$ punct singular pentru f. Punctul $z=a$ este punct singular removabil al lui f dacă şi numai dacă partea principală a dezvoltării lui f în serie Laurent în jurul lui $z=a$ este nulă (altfel spus, toţi coeficienţii c_k pentru $k<0$ sunt nuli).

Concluzii. (i) Dacă partea principală a seriei Laurent a lui f în jurul lui $z=a$ este nulă, atunci $z=a$ este fie un punct ordinar pentru f (seria este serie Taylor), fie un punct singular removabil.

(ii) Dacă partea principală are o infinitate de termeni, atunci $z=a$ este punct singular esenţial pentru funcţia f.

(iii) Dacă partea principală are $c_k = 0$, pentru $k < -p$ şi $c_{-p} \neq 0$, atunci $z=a$ este pol de ordin p.

Exerciţiul 1. $f(z) = e^{1/(z-a)}$ are în $z=a$ o singularitate esenţială pentru că poate fi dezvoltată în serie Laurent în coroana circulară $\varepsilon < |z-a| < R$, cu ε arbitrar de mic şi R arbitrar de mare:

$$e^{1/(z-a)} = 1 + \underbrace{\frac{1}{1!}\frac{1}{z-a} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{(z-a)^n} + \cdots}_{=\text{ partea principală}}$$

(partea principală are o infinitate de termeni , deci a este punct singular esenţial).

Exerciţiul 2. Funcţia $f(z) = (\sin z)/z$ are în punctul $z = 0$ un punct singular removabil deoarece $\lim_{z \to 0} f(z) = 1$ (finită) sau pentru că

$$f(z) = \frac{1}{1!} - \frac{z^2}{3!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + ...,$$

adică partea principală a seriei Laurent în jurul originii este zero.

Exerciţiul 3. Fie funcţia

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}.$$

Dezvoltaţi f în serie Laurent în vecinătatea lui $z = 0$ pe domeniile:

a) $0 < |z| < 1$; b) $1 < |z| < 2$; c) $|z| > 2$

şi în jurul lui $z = 1$, pe coroana circulară d) $0 < |z-1| < 1$. Specificaţi punctele singulare

ale lui f şi natura lor.

Rezolvare. Descompunem f în fracţii simple :

$$f(z) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-2)}.$$

a) Prima funcţie este deja o putere a lui z şi are sens pentru $|z| > 0$. A doua se dezvoltă ca serie geometrică,

$$-\frac{1}{z-1} = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ..., \ |z| < 1.$$

A treia funcţie are dezvoltarea

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + ... + \frac{z^n}{2^n} + ...), \ |z| < 2.$$

Deci f are dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \frac{1}{2z} + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) z + ... + \left(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n + ..., \ 0 < |z| < 1.$$

Deoarece partea principală a seriei Laurent are un singur termen (anume $1/2z$), reiese că $z = 0$ este un pol simplu pentru f, ceea ce se observa de la bun început, conform definiţiei polului.

b) Pentru a obţine dezvoltarea lui f pe domeniul $1 < |z| < 2$, trebuie să modificăm a doua serie astfel:

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - ... - \frac{1}{z^{n+1}} - ..., \ |z| > 1.$$

Deci,

$$f(z) = ... - \frac{1}{z^{n+1}} - ... - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{2^2} - \frac{z}{2^3} - ... - \frac{z^n}{2^{n+2}} - ..., \; 1 < |z| < 2.$$

c) Modificăm faţă de cazul b) doar a treia serie:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + ... + \frac{2^n}{z^{n+1}} + ..., \; |z| > 2.$$

Atunci seria Laurent ataşată lui f este

$$f(z) = ... + \left(2^{n-1} - 1\right) \frac{1}{z^{n+1}} + ... + \frac{1}{z^3} \, , \; |z| > 2.$$

d) Pe coroana circulară $0 < |z-1| < 1$, avem

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z-1)} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 + ... + (-1)^n (z-1)^n + ..., \; |z-1| < 1,$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -1 - (z-1) - (z-1)^2 - ... - (z-1)^n - ..., \; |z-1| < 1.$$

Seria Laurent este

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - (z-1) - (z-1)^3 - ... - (z-1)^{2k+1} - ..., \; 0 < |z-1| < 1.$$

Deoarece partea principală a seriei Laurent în jurul lui $z = 1$ are un singur termen, rezultă că $z = 1$ este pol simplu. Acest lucru se observă şi sdirect din expresia lui f, conform definiţiei polului. De asemenea, $z = 2$ este pol simplu pentru f.