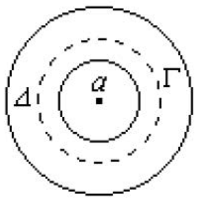
6. Reziduuri şi aplicaţii

6.1. Definiţia reziduului. Metode de calcul. Teorema reziduurilor

Definiţia 1. Fie $z = a$ un punct singular izolat al funcţiei f. Fie Δ o coroană circulară $\varepsilon < |z - a| < R$ (cu $\varepsilon > 0$ arbitrar de mic), pe care f este olomorfă şi $\Gamma = C(a, \rho)$ cercul de centru a şi rază ρ, cu $\rho \in (\varepsilon, R)$,



adică $\Gamma \subseteq \Delta$. (Ştim că dacă $f \in \mathcal{O}(\Delta)$, atunci integrala lui f pe orice curbă simplă închisă inclusă în Δ ce înconjoară punctul $z = a$, este aceeaşi, conform Teoremei fundamentale Cauchy pe domenii dublu conexe). Numim *reziduul funcţiei f în punctul a*, numărul complex

$$\operatorname{rez} f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z)\, dz. \tag{1}$$

Teorema 1. *Reziduul unei funcţii f în punctul $z = a$ se calculează astfel:*

1°) $\operatorname{rez} f(a) = c_{-1}$ - *coeficientul lui* $\dfrac{1}{z-a}$ *din dezvoltarea Laurent a lui f în jurul lui $z = a$;*

2°) $\operatorname{rez} f(a) = \dfrac{1}{(p-1)!} \left[(z-a)^p f(z)\right]^{(p-1)} \Big|_{z=a}$, *dacă a este pol de ordin p pentru f;*

Caz particular $p = 1 : \operatorname{rez} f(a) = \left[(z-a) f(z)\right]_{z=a}$.

Exerciţiul 1. Determinaţi reziduurile funcţiilor de mai jos în punctele lor singulare:

$$a) f(z) = \frac{1}{z} e^{1/(z-1)}; \;\; b) f(z) = \frac{z^2 \sin^2(1/z)}{(z-1)(z-2)}.$$

Rezolvare. a) Punctele singulare ale lui f sunt $z_1 = 0$ (pol simplu) şi $z_2 = 1$, despre care vom arăta că este punct singular esenţial. Într-adevăr,

$$e^{1/(z-1)} = 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!\,(z-1)^2} + ... + \frac{1}{n!\,(z-1)^n} + ..., \; |z-1| > 0,$$

iar

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z-1)} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - ... + (-1)^n (z-1)^n + ..., \; |z-1| < 1.$$

Atunci f, care este produsul acestor două serii, are în partea sa principală o infinitate de termeni, deci $z = 1$ este punct singular esenţial pentru f. În plus,

$$rez\, f(1) = c_{-1} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} + ... = 1 - e^{-1}.$$

Pentru polul simplu $z_1 = 0$, avem

$$rez\, f(0) = e^{-1}.$$

b) Punctele singulare ale lui f sunt $z_1 = 1,\ z_2 = 2$ (poli simpli) şi $z_3 = 0$ (punct singular esenţial). Avem

$$rez\, f\,(1) = -\sin^2 1,\ rez\, f\,(2) = 4\sin^2\frac{1}{2}\,\cdot$$

Pentru a demonstra că $z_3 = 0$ este punct singular esenţial şi pentru a determina reziduul lui f în 0, dezvoltăm f în serie de puteri ale lui z.

$$\sin^2\frac{1}{z} = \frac{1-\cos\left(2/z\right)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(... - \frac{2^6}{6!z^6} + \frac{2^4}{4!z^4} - \frac{2^2}{2!z^2} + 1\right), |z| > 0,$$

de unde

$$z^2\sin^2\frac{1}{z} = ... + (-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!z^{2n}} + ... + \frac{2^5}{6!z^4} - \frac{2^3}{4!z^2} + 1,\ |z| > 0.$$

Apoi,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n,\ |z| < 1.$$

Observăm că partea principală a seriei produs are o infinitate de termeni, deci $z_3 = 0$ este un punct singular esenţial pentru f şi

$$rez\, f\,(0) = -\frac{2^3}{4!}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{2^5}{6!}\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) - \frac{2^7}{8!}\left(1 - \frac{1}{2^6}\right) + ... =$$

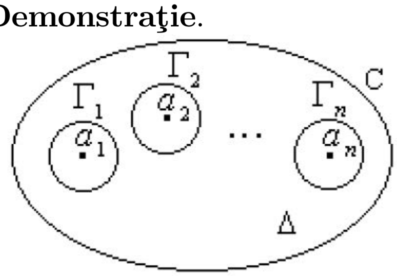
$$= 2\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - ...\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{2^4}{4!} + \frac{2^6}{6!} - \frac{2^8}{8!} + ...\right) =$$

$$= 2\left(\cos 1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos 2 = 2\cos 1 - \frac{1}{2}\cos 2 - 1\,.$$

Teorema 2 (Teorema reziduurilor). *Fie D un domeniu simplu conex din $\mathbb{C}$, γ o curbă simplă închisă conţinută în D, iar f o funcţie care are în domeniul Δ mărginit de γ, un număr finit de puncte singulare izolate, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $f \in \mathcal{O}\left(D \backslash \{a_1, ..., a_n\}\right)$. Atunci,*

$$\int_{\gamma} f\,(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \mathrm{rez}\, f\,(a_k)\,. \tag{2}$$

Demonstraţie.



Cum a_k, $k = \overline{1,n}$ sunt puncte singulare izolate din Δ, există n cercuri $\Gamma_k = C\,(a_k, \rho)\,,$ $k = \overline{1,n}$, cu $\rho > 0$ suficient de mic, astfel încât $\Gamma_k \subset \Delta$, $k = \overline{1,n}$, $\Gamma_k \cap \Gamma_j = \emptyset$, pentru $k \neq j$, unde $k, j \in \{1, \ldots, n\}\,,$

S-a format astfel un domeniu multiplu conex, de ordin de conexitate $n+1$, anume $\Delta\setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \left(\Delta\left(a_k,\rho_k\right)\right)$. Pe acest domeniu, f este olomorfă conform ipotezei. Deci, Teorema fundamentală a lui Cauchy pe domenii multiplu conexe şi formula (1) ne dau

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Gamma_k} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{rez} f(a_k).$$

Teorema 3 (Teorema semireziduurilor). *Fie γ o curbă simplă închisă inclusă în D, unde D este domeniu simplu conex, $f \in O(D\setminus\{a_{1,\ldots,}a_n, b_{1,\ldots}b_m\})$. Dacă $a_1,\ldots,a_n$ sunt puncte singulare izolate din interiorul lui γ şi dacă $b_1,\ldots,b_m$ sunt poli de ordin 1 ai lui f situaţi pe γ, atunci,*

$$v.p.\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{rez} f(a_k) + i\cdot \sum_{l=1}^{m} (\pi-\delta_l)\operatorname{rez} f(b_l), \tag{3}$$

unde $\pi-\delta_l$ este unghiul dintre semitangentele in b_l la curba γ.

Dacă γ admite tangentă în toate punctele b_l la γ, atunci $\pi-\delta_l=\pi$, deci

$$v.p.\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{rez} f(a_k) + \pi i\cdot \sum_{l=1}^{m} \operatorname{rez} f(b_l). \tag{4}$$

Această relaţie se numeşte **formula semireziduurilor**.

Exerciţiul 2. Calculaţi integrala $I=\int\limits_{\gamma}\dfrac{dz}{z\left(z^2+a^2\right)^2}$, unde $\gamma: |z|=R$, cu $R>a>0\cdot$

Rezolvare. Punctele singulare ale lui f sunt $z_1=0$ (care este un pol simplu) şi $z_2 = ai$, $z_3=-ai$ (poli de ordin 2). Toate aceste puncte singulare sunt situate în interiorul cercului $|z|=R$. Conform Teoremei reziduurilor,

$$I = 2\pi i\left[rez\, f(0) + rez\, f(ai) + rez\, f(-ai)\right].$$

Avem

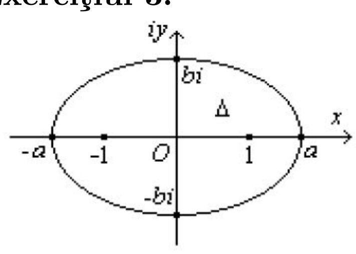
$$rez\, f(0) = \frac{1}{a^4},$$

$$rez\, f(ai) = \lim_{z\to ai}\left[\frac{1}{z(z+ai)^2}\right]' = \lim_{z\to ai}\frac{-3z-ai}{z^2(z+ai)^3} = \frac{-1}{2a^4},$$

$$rez\, f(-ai) = \frac{-1}{2a^4}.$$

Deci $I=0$.

Exerciţiul 3.



Să se calculeze integrala $I=\int\limits_{E}\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{z}}{1+z}dz$ pe elipsa $E: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>1$. În domeniul Δ mărginit de elipsa E, funcţia $f(z)=\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{z}}{1+z}$

are două singularităţi izolate: $z_1 = -1$ - pol simplu şi $z = 0$ - punct singular esenţial. Conform Teoremei reziduurilor,

$$I = 2\pi i \left[\operatorname{rez} f(-1) + \operatorname{rez} f(0)\right].$$

Dar

$\operatorname{rez} f(-1) = \left[(z+1) f(z)\right]\big|_{z=-1} = \left(1 + \sin\frac{\pi}{z}\right)\big|_{z=-1} = 1$, iar

$\operatorname{rez} f(0) = c_{-1}$ este coeficientul lui $\frac{1}{z}$ din dezvoltarea în serie Laurent a lui f, în jurul lui $z = 0$.

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots, |z| < 1,$$

iar

$$1 + \sin\frac{\pi}{z} = 1 + \frac{\pi}{1!\,z} - \frac{\pi^3}{3!\,z^3} + \frac{\pi^5}{5!\,z^5} - \cdots, (\forall) z \neq 0 \ (|z| > 0).$$

Deci, pentru $0 < |z| < 1$,

$$f(z) = \left(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots\right)\left(1 + \frac{\pi}{1!\,z} - \frac{\pi^3}{3!\,z^3} + \frac{\pi^5}{5!\,z^5} - \cdots\right)$$

de unde

$$\operatorname{rez} f(0) = c_{-1} = \frac{\pi}{1!} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \cdots = \sin\pi = 0.$$

Deci, $I = 2\pi i$.

6.2. Aplicaţii ale teoremei reziduurilor la calculul unor integrale reale

$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{iax} dx$, $I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos ax dx$, $I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin ax dx$, unde $R = \dfrac{P}{Q}$, $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $Q(x) \neq 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{gr} Q \geq \operatorname{gr} P + 1$.

Aceste condiţii asigură convergenţa integralei improprii (conform Criteriului Dirichlet): $R(x) \to 0$, pentru $x \to \infty$ şi $\int\limits_{-b}^{b} \cos ax dx \leq \frac{2}{a}$, deci mărginită. Atunci I_1 converge. Analog I_2, deci şi I. Se poate arăta că

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{rez} g(\alpha_k), \text{ cu } \operatorname{Im} \alpha_k > 0. \tag{5}$$

Aici $g(z) = R(z) e^{iaz}$. Apoi, observăm că $I_1 + iI_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{iax} dx = I$, de unde $I_1 = \operatorname{Re}(I)$, $I_2 = \operatorname{Im}(I)$. Atunci,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos ax dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\alpha_k > 0} \operatorname{rez} g(\alpha_k)\right) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin ax dx = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{\operatorname{Im}\alpha_k > 0} \operatorname{rez} g(\alpha_k)\right). \end{cases} \tag{6}$$

Exerciţiul 4. Să se calculeze integrala $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$. Observăm că

$$I = \operatorname{Im}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx\right) = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{rez} g\left(\alpha_k\right)\right),$$

cu $\operatorname{Im} \alpha_k > 0$, unde $g\left(z\right) = \frac{z e^{iz}}{z^2 - 2z + 10}$. Dar polii lui g sunt $z_{1,2} = 1 \pm 3i$. Fie $z_1 = 1 + 3i$. Atunci

$$\operatorname{rez} g\left(z_1\right) = \frac{z_1 e^{iz_1}}{2z_1 - 2} = \frac{\left(1 + 3i\right) e^{i(1+3i)}}{2\left(1 + 3i\right) - 2} = \frac{\left(1 + 3i\right) e^{-3} e^{i}}{6i},$$

de unde deducem că

$$I = \operatorname{Im}\left(2\pi i \operatorname{rez} g\left(z_1\right)\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi}{3e^3}\left(1 + 3i\right)\left(\cos 1 + i \sin 1\right)\right) = \frac{\pi}{3e^3}\left(\sin 1 + 3\cos 1\right).$$