2. Integrala Riemann (integrala definită)

2.4. Integrale cu limite variabile

Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci $f \in \mathcal{R}[a,x]$, $(\forall)\, x \in [a,b]$. Deci este bine definită funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dată de

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a,b]. \tag{8}$$

Vom studia proprietăţile funcţiei F, arătând în final că ea este o primitivă a lui f.

Teorema 11 (de continuitate a lui F în raport cu limita superioară). *Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci funcţia F dată de (8) este continuă pe $[a,b]$. Mai mult, F este chiar Lipschitz continuă pe $[a,b]$, adică există o constantă $L > 0$ a.î.*

$$|F(x) - F(x')| \leq L\,|x - x'|, \ (\forall)\, x, x' \in [a,b].$$

Teorema 12. (de derivabilitate a integralei în raport cu limita superioară de integrare). *Dacă $f \in \mathcal{R}[a,b]$ şi este continuă în punctul $x_0 \in [a,b]$, atunci funcţia F dată de (8) este derivabilă în x_0 şi $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Corolarul 4. *Dacă f este continuă pe $[a,b]$, atunci funcţia F este derivabilă pe $[a,b]$ şi $F' = f$ pe $[a,b]$, adică orice funcţie continuă pe $[a,b]$ admite primitive pe $[a,b]$, o primitivă fiind dată de (8).*

2.5. Calculul integralelor definite

Un prim rezultat important care se utilizează la calculul unor integrale Riemann este Teorema Leibniz-Newton. Ea se aplică pentru funcţii care sunt integrabile pe un interval compact şi în acelaşi timp admit primitive pe acel compact.

Teorema 13. (Teorema Leibniz-Newton). *Dacă funcţia f admite primitive pe $[a,b]$ (fie F o primitivă a lui f pe $[a,b]$) şi $f \in \mathcal{R}[a,b]$, atunci are loc următoarea formulă de calcul, numită formula Leibniz- Newton:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\,\Big|_a^b. \tag{9}$$

Observaţia 7. Teorema de mai sus se poate aplica de exemplu în cazul funcţiilor continue. Într-adevăr, orice funcţie continuă este integrabilă Riemann (conform Teoremei 7) şi admite primitive (conform Corolarului 4).

Observaţia 8. Teorema Leibniz-Newton se aplică şi pentru funcţii care nu sunt continue. De exemplu, funcţia $f : [0, 2/\pi] \to \mathbb{R}$, dată de

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos \dfrac{1}{x} + \sin \dfrac{1}{x}, & x \in (0, \dfrac{2}{\pi}] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

nu este continuă în $x = 0$, pentru că funcţia $\sin \dfrac{1}{x}$ nu are limită în punctul 0. Totuşi, ea este integrabilă Rieman pe $[0, 2/\pi]$, deoarece mulţimea punctelor sale de discontinuitate (adică $\{0\}$) este de măsură Lebesgue nulă. De asemenea, f admite primitive pe $[0, 2/\pi]$. De exemplu, funcţia $F : [0, 2/\pi] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & x \in (0, \dfrac{2}{\pi}] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este o primitivă pentru funcţia f.

Observaţia 9. Cele două ipoteze din Teorema Leibniz- Newton sunt independente (nu rezultă una din alta), adică există funcţii integrabile Riemann care nu admit primitive (a se vedea Exerciţiul 5 de mai jos), după cum există funcţii care admit primitive, dar nu sunt integrabile Riemann (Exerciţiul 6).

Exerciţiul 5. Dăm acum un exemplu de funcţie care este integrabilă Riemann pe un compact, dar nu admite primitive:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1) \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

Într-adevăr, f nu admite primitive, deoarece nu are proprietatea lui Darboux (nu duce intervalul $[0,1]$ într-un interval, ci în $[0,1) \cup \{2\}$). Dar f este integrabilă Riemann pe $[0,1]$ fiind monotonă pe $[0,1]$. Aşadar nu putem aplica Teorema Leibniz-Newton. Dar din Teorema 11 de continuitate a integralei ca funcţie de limita superioară, avem:

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \int_0^x f(t)\, dt = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(\frac{t^3}{3} |_0^x \right) = \frac{1}{3}.$$

Exerciţiul 6. Arătăm că există şi funcţii care admit primitive pe un interval compact, dar nu sunt integrabile Riemann pe acel interval. Fie de exemplu funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x} \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Fiind nemărginită pe $[0,1]$, funcţia f nu este integrabilă Riemann pe $[0,1]$. Dar f admite primitive pe $[0,1]$, de exemplu funcţia

$$F : [0,1] \to \mathbb{R}, \; F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x^2}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Prezentăm acum două metode de calcul pentru integrala Riemann: metoda integrării prin părţi şi metoda schimbării de variabilă.

Teorema 14. (formula integrării prin părţi pentru integrala Riemann). *Dacă $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii derivabile cu derivata integrabilă pe $[a,b]$, atunci*

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) |_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx. \tag{10}$$

Teorema 15. (metoda schimbării de variabilă pentru integrala Riemann). *Fie $f \in C[a,b]$ o funcţie dată şi I un interval din $\mathbb{R}$. Fie $\varphi : I \to [a,b]$, $\varphi \in C^1(I)$ şi $\alpha, \beta \in I$ astfel ca $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Atunci $(f \circ \varphi)\varphi' \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$ şi*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{11}$$

Observaţia 10. Funcţia $\varphi(t) = x$, $t \in [\alpha,\beta]$ (cu $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$) este funcţia care schimbă variabila x în variabila t.

3. Integrale improprii

Vom extinde noţiunea de integrală la cazul în care măcar unul dintre capetele a şi b este infinit sau la cazul în care f este nemărginită pe $[a,b]$. Se obţin aşa-numitele integrale improprii de speţa I, respectiv de speţa a II-a.

3.1. Definiţia integralei improprii de speţa I (pe intervale infinite)

Fie $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie dată, f integrabilă Riemann pe orice interval compact $[a,b]$ cu $b > a$. Observăm că funcţia $F : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ este bine definită şi că ea este o integrală Riemann cu limita superioară de integrare variabilă. Vom defini integrala de la a la ∞ a funcţiei f.

Definiţia 1. Numim *integrala improprie de la a la ∞ din funcţia f*, limita $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, dacă această limită există. În caz de existenţă, ea se notează

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ (finită sau nu).} \tag{1}$$

Definiţia 2. Integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\,dx$ se numeşte *integrală improprie convergentă* dacă limita de mai sus există şi este finită. În acest caz notăm $\int_a^\infty f(x)\,dx\ (C)$.

Integrala se numeşte *integrală improprie divergentă* dacă limita de mai sus nu există sau este infinită. Vom nota în acest caz $\int_a^\infty f(x)\,dx\ (D)$.

Definiţia 3. Analog, dacă $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă Riemann pe orice interval compact $[a,b]$ cu $a < b$, atunci definim *integrala improprie de la $-\infty$ la b din funcţia f* următoarea limită, în ipoteza că ea există:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx \text{ (finită sau nu).} \tag{2}$$

Definiţia 4. Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă Riemann pe orice interval compact $[a,b]$ cu $a < b$, atunci definim *integrala improprie de la $-\infty$ la $+\infty$ din funcţia f*, limita (dacă există)

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)\,dx \text{ (finită sau nu).} \tag{3}$$

Ne vom ocupa în continuare doar de integrale improprii de la a la ∞, celelalte tipuri analizându-se similar.

Observaţia 1. Conform formulei (1.24) de definiţie şi a Teoremei Leibniz-Newton, remarcăm că dacă f admite primitive pe $[a,\infty)$ şi F este o primitivă a sa, atunci

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = F(\infty) - F(a) = F(x)\,|_a^\infty, \tag{4}$$

unde prin $F(\infty)$ am notat limita pentru $x \to \infty$ a lui $F(x)$.

Exerciţiul 1. Integrala $I = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}dx$ este convergentă deoarece funcţia $f(x) = 1/(1+x)^2$ este integrabilă Riemann pe orice compact $[0,b]$ $(b>0)$ şi funcţia

$$F(b) = \int_0^b \frac{1}{(1+x)^2}dx = -\frac{1}{1+x}|_0^b = 1 - \frac{1}{1+b}$$

are limită finită pentru $b \to \infty$, anume 1. În consecinţă integrala I este convergentă şi valoarea sa este $I = \lim_{b\to\infty} F(b) = 1$.

Exerciţiul 2. Integrala $I = \int_0^\infty e^{-x}dx$ este convergentă deoarece funcţia $f(x) = e^{-x}$ este integrabilă Riemann pe orice interval $[0,b]$ (cu $b>0$) şi $F(b) = \int_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^b = 1 - e^{-b}$ are limita finită pentru $b \to \infty$. Deci integrala converge şi valoarea sa este egală cu limita pentru $b\to\infty$ a lui $F(b)$, adică $I = \lim\limits_{b\to\infty} F(b) = 1$.

Exerciţiul 3. Integrala $I = \int_0^\infty \sin x dx$ este divergentă deoarece, deşi funcţia $f(x) = \sin x$ este integrabilă Riemann pe orice subinterval $[0,b]$ cu $b>0$, totuşi funcţia

$$F(b) = \int_0^b \sin x dx = 1 - \cos b$$

nu admite limită pentru $b \to \infty$.

3.2. Criterii de convergenţă pentru integrale improprii de speţa I din funcţii cu semn constant

Presupunem în cele ce urmează că funcţia f păstrează semn constant pe $[a,\infty)$, să zicem $f(x) \geq 0$, $(\forall)\, x \in [a,\infty)$. Analog se tratează şi cazurile în care f este negativă pe tot intervalul de definiţie sau când f este definită şi păstrează semn constant pe intervalul $(-\infty,b]$ sau pe $\mathbb{R}$.

Observaţia 2. Dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall)\, x \in [a,\infty)$, atunci funcţia $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ este monoton crescătoare pe $[a,\infty)$. Într-adevăr, dacă $a \leq b_1 < b_2$, atunci

$$F(b_1) = \int_a^{b_1} f(x)\,dx \leq \int_a^{b_1} f(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx = F(b_2).$$

Deci pentru integrale din funcţii pozitive, convergenţa integralelor improprii este echivalentă cu mărginirea lor.

Observaţia 3. Convergenţa integralelor improprii $\int_a^\infty f(x)\,dx$ depinde doar de comportamentul lui f în "apropierea" lui ∞.

Criteriul de comparaţie. *Fie* $0 \le f(x) \le g(x)$, *pentru orice* $x \in [a, \infty)$.

(a) *Dacă* $\int_a^\infty g(x)\, dx$ (C), *atunci şi integrala* $\int_a^\infty f(x)\, dx$ (C).

(b) *Dacă* $\int_a^\infty f(x)\, dx$ (D), *atunci şi integrala* $\int_a^\infty g(x)\, dx$ (D).

Demonstraţie. (a) Inegalitatea $0 \le f(x) \le g(x)$, $(\forall)\, x \in [a, \infty)$ împreună cu Observaţia 2 de mai sus implică $\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx \le M$, pentru orice $b > a$. Deci $\int_a^b f(x)\, dx \le M$, $(\forall)\, b > a$. Aplicând din nou Observaţia 2, deducem convergenţa integralei improprii $\int_a^\infty f(x)\, dx$.

(b) Din inegalitatea $0 \le f(x) \le g(x)$, $(\forall)\, x \in [a, \infty)$, obţinem $\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx$. Întrucât $\int_a^b f(x)\, dx$ este nemărginită în raport cu b, acelaşi lucru are loc şi pentru $\int_a^b g(x)\, dx$, adică $\int_a^\infty g(x)\, dx$ este divergentă.

Exerciţiul 4. Integrala improprie $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ se poate scrie ca o sumă de două integrale:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx,$$

improprie fiind doar ultima integrală. Pe $[0, 1]$, funcţia $f(x) = e^{-x^2}$ este continuă, deci integrabilă Riemann. Pe $[1, \infty)$ avem $x \le x^2$, deci $0 < e^{-x^2} \le e^{-x}$. Dar $\int_1^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}|_1^\infty = e^{-1}$, adică $\int_1^\infty e^{-x} dx$ (C). Conform Criteriului de comparaţie, rezultă că $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ (C), deci $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ (C).

Criteriul în α. *Fie* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, cu $f \ge 0$ pe $[a, \infty)$ şi α *un număr real fixat. Dacă* $(\exists)$ $A = \lim_{x \to \infty} x^\alpha f(x)$ *cu* $0 \le A \le \infty$, *atunci:*

(a) *Dacă* $\alpha > 1$, $A < \infty$, *atunci* $\int_a^\infty f(x)\, dx$ (C).

(b) *Dacă* $\alpha \le 1$, $A > 0$, *atunci* $\int_a^\infty f(x)\, dx$ (D).

Nedeterminări: 1) $\alpha > 1$, $A = \infty$; 2) $\alpha \le 1$, $A = 0$.

Exerciţiul 5. Integrala improprie $\int_0^\infty (x+1)^p e^{-x} dx$ este convergentă pentru orice $p \in \mathbb{R}$. Într-adevăr,

$$\lim_{x \to \infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^\alpha (x+1)^p}{e^x} = 0,$$

$(\forall)\, p, \alpha \in \mathbb{R}$. Luăm $\alpha > 1$. Conform Criteriului în α, punctul (a), rezultă că integrala dată este convergentă.

3.3. Criterii de convergenţă pentru integrale improprii de speţa I din funcţii cu semn variabil

Presupunem că $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ are semn variabil. Vom începe cu un rezultat de tip Cauchy.

Teorema 1. (Teorema de caracterizare de tip Cauchy a convergenţei) *Pentru integrala improprie* $\int_a^\infty f(x)\, dx$, *următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *este convergentă*;

(ii) $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *satisface condiţia lui Cauchy*:

$$(\forall)\, \varepsilon > 0,\ (\exists)\, b_0(\varepsilon) > a,\ \text{a.î.}\ (\forall)\, b', b'' \text{ cu } b'' > b' \ge b_0(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \left| \int_{b'}^{b''} f(x)\, dx \right| < \varepsilon.$$

Chiar dacă funcţia f are semn variabil, funcţia $|f|$ are semn pozitiv. Vom introduce acum noţiunea de absolută convergenţă a unei integrale improprii şi vom stabili legătura între integrale absolut convergente şi integrale convergente.

Definiţia 5. Integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\, dx$ se numeşte *absolut convergentă* (şi o vom nota AC) dacă $\int_a^\infty |f(x)|dx$ converge.

Teorema 2. *Dacă $\int_a^\infty f(x)\, dx$ este absolut convergentă, atunci ea este convergentă ($AC \Rightarrow C$).*

Demonstraţie. Din ipoteză, $\int_a^\infty |f(x)|dx$ converge. Aplicăm Criteriul lui Cauchy pentru integrala $\int_a^\infty |f(x)|dx$: $(\forall)\, \varepsilon > 0$, $(\exists)\, b_0(\varepsilon) > a$ astfel încât $(\forall)\, b', b''$ cu $b_0(\varepsilon) < b' < b''$, să avem $|\int_{b'}^{b''} |f(x)|\, dx| < \varepsilon$. Cum $\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\, dx\right| \leq |\int_{b'}^{b''} |f(x)|\, dx|$, deducem că $\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\, dx\right| < \varepsilon$, de unde $\int_a^\infty f(x)\, dx$ converge.

Exerciţiul 6. Vom studia convergenţa integralei improprii de prima speţă $\int_0^\infty e^{-x} \cos x dx$.

Rezolvare. Funcţia $f(x) = e^{-x} \cos x$ are semn variabil pe $[0, \infty)$. Vom arăta că integrala este absolut convergentă, deci convergentă. Pentru aceasta, observăm că avem majorarea

$$|f(x)| = e^{-x} |\cos x| \leq e^{-x},\ (\forall)\, x \in [0, \infty).$$

Dar $\int_0^\infty e^{-x}dx$ (C) pentru că $\int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^\infty = 1$. Conform Criteriului de comparaţie pentru integrale din funcţii pozitive, rezultă că şi $\int_0^\infty |e^{-x} \cos x|dx$ (C), de unde $\int_0^\infty e^{-x} \cos x dx$ (AC), deci converge.

Criteriul general de comparaţie. *Dacă $|f(x)| \leq g(x)$, $(\forall)\, x \in [a, \infty)$, unde $g(x) \geq 0$, $(\forall)\, x \in [a, \infty)$ şi $\int_a^\infty g(x)\, dx$ (C), atunci şi $\int_a^\infty f(x)\, dx$ (C).*

Demonstraţie. Din $|f(x)| \leq g(x)$, $(\forall)\, x \in [a, \infty)$ şi $\int_a^\infty g(x)\, dx$ (C), conform Criteriului de comparaţie avem că $\int_a^\infty |f(x)|dx$ (C), adică $\int_a^\infty f(x)\, dx$ (AC), deci convergentă.

Observaţia 4. Am văzut mai sus că orice integrală (AC) este şi (C). Se pune problema reciprocei. Următorul contraexemplu arată că nu orice integrală improprie convergentă este în mod necesar absolut convergentă. O astfel de integrală va purta denumirea de integrală semiconvergentă (a se vedea Definiţia 6 de mai jos).

Exerciţiul 7. Să se arate că integrala $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ (cu $0 < \alpha < 1$) este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Rezolvare. Notăm $I(b) = \int_0^b \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$. Observăm că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k\pi < b \leq (k+1)\pi$. Atunci integrala se scrie

$$I(b) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x^\alpha} dx + \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx + ... + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx + \int_{k\pi}^b \frac{\sin x}{x^\alpha} dx.$$

Pentru integrala $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, facem schimbarea de variabilă $x = t + n\pi$. Atunci,

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(t + n\pi)}{(t + n\pi)^\alpha} dt = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{(t + n\pi)^\alpha} dt.$$

Notăm $a_n = \int_0^\pi \dfrac{\sin t}{(t+n\pi)^\alpha}dt > 0$. Atunci

$$I(b) = a_0 - a_1 + ... + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \int_{k\pi}^{b} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx.$$

Se vede că $a_{n+1} \leq a_n, n \in \mathbb{N}$ (din Teorema de monotonie a integralei în raport cu funcţia) şi că

$$|a_n| \leq \int_0^\pi \left|\frac{\sin t}{(t+n\pi)^\alpha}\right| dt \leq \int_0^\pi \frac{1}{(t+n\pi)^\alpha}dt \leq \int_0^\pi \frac{dt}{(n\pi)^\alpha},$$

de unde $|a_n| \leq \pi^{1-\alpha}/n^\alpha$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Fie acum $y_k(b) = \int_{k\pi}^b \dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx$. Vom arăta că există limita $\lim\limits_{k\to\infty} y_k(b)$ uniform în raport cu b. Într-adevăr,

$$|y_k(b)| \leq \int_{k\pi}^{b} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx \leq |a_k|,$$

de unde $y_k(b) \to 0$ pentru $k \to \infty$, uniform în raport cu b.

Observăm că $I(b) - y_k(b) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} (-1)^i a_i$, unde despre şirul $(a_n)_n$ am demonstrat mai sus că este monoton descrescător şi convergent la zero. Aplicând seriei alternate Criteriul de convergenţă al lui Leibniz, deducem că seria este convergentă. Cum şirul $y_k(b)$ converge la zero, trecând la limită pentru $k \to \infty$ în egalitatea de mai sus, obţinem

$$I(b) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \text{ uniform în raport cu } b.$$

De aici se vede că există limita pentru $b \to \infty$ a lui $I(b)$ (deoarece membrul drept nu depinde de b), adică integrala $I = \int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx = \lim\limits_{b\to\infty} I(b)$ este convergentă.

Fie acum $J = \int_0^\infty \left|\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$ şi $J(b) = \int_0^b \left|\dfrac{\sin x}{x^\alpha}\right| dx$. Vom demonstra că integrala J este divergentă. Observăm că

$$J(b) = a_0 + a_1 + ... + a_{k-1} + |y_k(b)|.$$

Dar, pentru fiecare $n \in \{0, 1, ..., k-1\}$, avem

$$a_n = \int_0^\pi \frac{\sin t}{(t+n\pi)^\alpha}dt \geq \int_0^\pi \frac{\sin t}{(\pi+n\pi)^\alpha}dt = \frac{2}{(n+1)^\alpha \pi^\alpha},$$

iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ este divergentă (serie armonică generalizată cu $\alpha \in (0,1)$). Aşadar, $\lim_{k\to\infty} (J(b) - |y_k(b)|) = +\infty$ şi, cum $\lim\limits_{k\to\infty} y_k(b) = 0$ uniform în raport cu b, urmează că $J = +\infty$, deci integrala I nu este AC.

Definiţia 6. Spunem că integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este *semiconvergentă* dacă ea este convergentă, dar $\int_a^\infty |f(x)|dx$ este divergentă.

Vom studia în continuare convergenţa integralei improprii a produsului a două funcţii, adică $\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx$, în anumite condiţii particulare pentru f şi g. Rezultatele cele mai semnificative sunt date de Criteriul lui Abel şi Criteriul lui Dirichlet.

Criteriul lui Dirichlet. *Dacă au loc condiţiile*

1^0 $\int_a^b f(x)\,dx$ *este mărginită în raport cu* $b \in [a,\infty)$;

$2^0 g(x) \to 0$ *pentru* $x \to \infty$ *şi* g *este monotonă pe* $[a,\infty)$,

atunci $\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx\ (C)$.

Criteriul lui Abel. *Dacă*

1^0 $\int_a^\infty f(x)\,dx\ (C)$ *şi*

2^0 g *este o funcţie monotonă şi mărginită pe intervalul* $[a,\infty)$,

atunci $\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx\ (C)$.

Exerciţiul 8. Vom studia cu ajutorul Criteriului lui Dirichlet convergenţa integralei improprii $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}dx$, numită integrala lui Dirichlet.

Integrala nu este improprie în 0 (funcţia $h(x) = \sin x/x$ fiind mărginită în vecinătatea lui 0), ci doar la ∞. Fie $f(x) = \sin x$, $g(x) = 1/x$, $x \in (0,\infty)$.

Observăm că $\int_0^b \sin x dx = 1 - \cos b \leq 2$, $(\forall) b > 0$ şi $g(x) \to 0$ $(x \to \infty)$, g fiind monoton descrescătoare pe $(0,\infty)$. Conform Criteriului lui Dirichlet, $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}dx\ (C)$.

Exerciţiul 9. Vom arăta acum că $\int_1^\infty \cos x/x^a dx$ (cu $a > 0$) converge. Pentru aceasta, fie $f(x) = \cos x$, $g(x) = 1/x^a$, $x \in [1,\infty)$. Integrala $\int_1^b \cos x dx = \sin b - \sin 1 \leq 2$, deci este mărginită. Apoi, g este monoton strict descrescătoare şi are limita 0 pentru $x \to \infty$. Aplicând din nou Criteriul lui Dirichlet, obţinem convergenţa integralei improprii $\int_1^\infty \cos x/x^a dx$.

Exerciţiul 10. Să se studieze convergenţa integralei improprii $\int_1^\infty e^{-x}/x^2 dx$.

Rezolvare. Fie $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = 1/x^2$, $f, g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$. Avem $\int_1^\infty e^{-x}dx = e^{-1}$, deci $\int_1^\infty f(x)\,dx\ (C)$. Funcţia g este monoton strict descrescătoare şi mărginită pe $[1,\infty)$. Putem deci aplica Criteriul lui Abel şi deducem că $\int_1^\infty e^{-x}/x^2 dx$ converge.

3.4. Definiţia integralei improprii de speţa a II-a (din funcţii nemărginite)

Am demonstrat în capitolul precedent că dacă f este o funcţie integrabilă Riemann pe $[a,b]$, atunci f este mărginită pe $[a,b]$. Vom defini în continuare $\int_a^b f(x)\,dx$ în ipoteza că f nu este mărginită în vecinătatea lui b.

Fie $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$ (sau $-\infty$), f integrabilă Riemann pe orice interval $[a,b']$ cu $b > b' > a$.

Definiţia 7. Numim *integrala improprie de la a la b a funcţiei f*, valoarea $\lim\limits_{b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx$, dacă această limită există. În caz de existenţă, ea se notează

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx \text{ (finită sau nu).} \tag{5}$$

Pentru a sublinia faptul că b este punctul în vecinătatea căruia f este nemărginită, pentru integrala improprie de la a la b a funcţiei f se mai foloseşte şi notaţia $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$. Deci,

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx\ , \tag{6}$$

dacă limita există.

Definiţia 8. Integrala simbolică $\int_a^b f(x)\,dx$ se numeşte *integrală improprie convergentă* dacă limita de mai sus există şi este finită. În acest caz, notăm $\int_a^b f(x)\,dx\ (C)$.

Integrala se numeşte *integrală improprie divergentă* dacă limita de mai sus nu există sau este infinită. Vom nota în acest caz $\int_a^b f(x)\,dx\ (D)$.

Analog se pot defini integralele improprii $\int_a^b f(x)\,dx$ când f este o funcţie nemărginită în vecinătatea lui a. În acest caz, integrala improprie se mai notează $\int_{a+0}^b f(x)\,dx$.

Observaţia 5. Conform Teoremei Leibniz-Newton, observăm că dacă f admite o primitivă F pe $[a, b)$ şi există $F(b) = \lim\limits_{b' \to b} F(b')$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\,|_a^b. \tag{7}$$

Exerciţiul 11. Integrala $I = \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ este convergentă deoarece funcţia $f(x) = 1/\sqrt{1-x}$, deşi este nemărginită în vecinătatea lui $x = 1$, este integrabilă Riemann pe orice compact $[0, b']$ $(1 > b' > 0)$ şi funcţia

$$F(b') = \int_0^{b'} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -2\left(\sqrt{1-x}\right)|_0^{b'} = -2\left(\sqrt{1-b'} - 1\right)$$

are limita 2 pentru $b' \to 1_-$. Deci $I = \lim\limits_{b' \to 1_-} F(b') = 2$.

Exerciţiul 12. Integrala $I = \int_0^1 (1/x)dx$ improprie de speţa a doua (anume nemărginită în vecinătatea lui $x = 0$) este divergentă. Într-adevăr, deoarece f admite primitiva $F(x) = \ln x$, pentru $x \in (0, 1]$ şi $\lim\limits_{a' \to 0_+} F(x)\,|_{a'}^1 = \lim\limits_{a' \to 0_+} (-\ln a') = \infty$, rezultă că integrala dată este divergentă.

Exerciţiul 13. Vom studia convergenţa integralei improprii dată prin relaţia de recurenţă $I_n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}dx,\ n \geq 1$.

Rezolvare. La prima vedere funcţia $f(x) = \sin^2 nx / \sin x$ este nemărginită în vecinătatea lui 0. Totuşi,

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} \frac{\sin^2 nx}{n^2 x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{n^2 x^2}{x} = 0 \text{ finită},$$

deci f se poate prelungi prin continuitate în $x = 0$. Funcţia

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi/2] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este continuă în 0 şi $\widetilde{f}|_{(0,\pi/2]} = f$. Atunci $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \widetilde{f}(x)\,dx$ şi deci integrala lui f este convergentă. În plus,

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{[\sin nx - \sin(n-1)x][\sin nx + \sin(n-1)x]}{\sin x} dx =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2nx-x}{2}\sin\frac{2nx-x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} dx = \int_0^{\pi/2} \sin(2n-1)\,x dx.$$

Dar aceasta este egală cu $\{-\cos[(2n-1)x]/(2n-1)\}|_0^{\pi/2}$, de unde

$$I_n - I_{n-1} = \frac{1}{2n-1},\ n \geq 1.$$

Cum $I_1 = 1$, se obţine $I_n = \sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1)$.

3.5. Criterii de convergenţă pentru integrale improprii de speţa a II-a din funcţii cu semn constant

Presupunem în cele ce urmează că funcţia f păstrează semn constant pe $[a,b)$, să zicem $f(x) \geq 0$, $(\forall)\, x \in [a,b)$. Analog se analizează şi cazul în care f este negativă pe tot intervalul de definiţie.

Observaţia 6. Dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall)\, x \in [a,b)$, atunci funcţia $F(b') = \int_a^{b'} f(x)\,dx$ este monoton crescătoare pe $[a,b)$ ca şi în cazul integralelor improprii de speţa I. Deci $\int_a^b f(x)\,dx$ (C) dacă şi numai dacă $(\exists) \lim_{b' \to b} F(b')$ finită, sau, echivalent, dacă şi numai dacă $F(b')$ este mărginită (F fiind crescătoare).

Vom prezenta acum câteva criterii de convergenţă pentru integrale improprii de speţa a doua din funcţii pozitive, mai exact Criteriul în α. Omitem celelalte criterii pentru că sunt similare cu cele de la integrale improprii de speţa întâi.

Criteriul în α pentru $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ improprie în b. *Presupunem că* $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$ *pe* $[a,b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *şi că există* $\lim_{x \to b_-} (b-x)^\alpha f(x) = A$, $0 \leq A \leq \infty$. *Atunci:*

(a) *Dacă* $\alpha < 1$, $A < \infty$, *atunci* $\int_a^b f(x)\,dx\ (C)$.

(b) *Dacă* $\alpha \geq 1$, $A > 0$, *atunci* $\int_a^b f(x)\,dx\ (D)$.

Criteriul în α pentru $\int_{a+0}^b f(x)\,dx$ improprie în a. *Fie* $f : (a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, $x \in (a,b]$. *Presupunem că există*

$$\lim_{x \to a_+} (x-a)^\alpha f(x) = A,$$

cu $0 \leq A \leq \infty$. *Atunci:*

(a) *Dacă* $\alpha < 1$, $A < \infty$, *atunci* $\int_{a+0}^b f(x)\,dx\ (C)$.

(b) *Dacă* $\alpha \geq 1$, $A > 0$, *atunci* $\int_{a+0}^b f(x)\,dx\ (D)$.

Exerciţiul 14. Să se arate că integrala $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\beta} dx$, cu $\beta > 0$, este convergentă pentru $0 < \beta < 2$ şi divergentă pentru $\beta \geq 2$.

Rezolvare. Integrala este improprie în 0, iar funcţia de sub integrală este pozitivă pe $(0, 1]$. Vom aplica Criteriul în α de mai sus. Fie

$$A = \lim_{x \to 0} f(x)\, x^\alpha = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} x^{\alpha - \beta + 1}.$$

Pentru $\alpha = \beta - 1$ şi $\beta < 2$, avem $\alpha < 1$ şi $A = 1 < \infty$. Conform Criteriului în α, integrala converge.

Pentru $\alpha = \beta - 1$ şi $\beta \geq 2$, avem $\alpha \geq 1$ şi $A = 1 > 0$. În acest caz, integrala este divergentă.

Exerciţiul 15. Să se studieze convergenţa integralelor improprii de speţa a doua

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx, \;\; J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx.$$

Rezolvare. Observăm că I este improprie în $\pi/2$, iar J este improprie în 0.

(a) Pentru a studia convergenţa lui I, folosim Criteriul în α :

$$A = \lim_{x \to \pi/2_-} (\pi/2 - x)^\alpha f(x) = \lim_{x \to \pi/2_-} \frac{\ln(\cos x)}{(\pi/2 - x)^{-\alpha}}.$$

Dacă $\alpha > 0$, aplicând regula lui l'Hôpital pentru nedeterminarea $-\infty/\infty$, găsim

$$A = \lim_{x \to \pi/2_-} \frac{-\sin x / \cos x}{\alpha (\pi/2 - x)^{-\alpha - 1}} =$$

$$\frac{-1}{\alpha} \lim_{x \to \pi/2_-} (\pi/2 - x)^\alpha \sin x \frac{\pi/2 - x}{\sin(\pi/2 - x)} = 0.$$

Luăm acum un $\alpha \in (0, 1)$ şi utilizăm Criteriul în α. Cum $A = 0 < \infty$ şi $\alpha < 1$, integrala I converge.

(b) Pentru integrala J, folosim tot Criteriul în α :

$$A = \lim_{x \to 0_+} x^\alpha f(x) = \lim_{x \to 0_+} \frac{\ln(\sin x)}{x^{-\alpha}}.$$

Dacă $\alpha > 0$, limita de mai sus se calculează cu regula lui l'Hôpital:

$$A = \lim_{x \to 0_+} \frac{ctgx}{-\alpha x^{-\alpha - 1}} = \frac{-1}{\alpha} \lim_{x \to 0_+} \frac{\cos x}{x^{-\alpha}} \frac{x}{\sin x}.$$

Pentru un $\alpha \in (0, 1)$, de exemplu $\alpha = 1/2$, găsim

$$A = -2 \lim_{x \to 0_+} \sqrt{x} \cos x \frac{x}{\sin x} = 0 < \infty.$$

Conform Criteriului în α, rezultă că integrala J converge.

Exerciţiul 16. Studiaţi convergenţa integralei improprii

$$I=\int_0^1 \frac{1}{(2+x^2)\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Rezolvare. Funcţia $f(x)=\dfrac{1}{(2+x^2)\sqrt{1-x^2}}$ este nemărginită pe $[0,1)$ în vecinătatea lui 1. Avem:

$$A=\lim_{x\to 1_-}(1-x)^\alpha f(x)=\lim_{x\to 1_-}\frac{(1-x)^\alpha}{(2+x^2)\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}.$$

Luând de exemplu $\alpha=1/2$, se obţine $A=1/3\sqrt{2}<\infty$, deci integrala converge.

3.6. Criterii de convergenţă pentru integrale improprii de speţa a II-a din funcţii cu semn variabil.

La fel se formulează Criteriul lui Abel şi Criteriul lui Dirichlet pentru integrala improprie de speţa a doua $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$.

Criteriul lui Dirichlet. *Dacă*

1^0 $\int_a^{b'} f(x)\,dx$ *este mărginită în raport cu* $b'\in[a,b)$;

$2^0 g(x)\to 0$ *pentru* $x\to b_-$ *şi* g *este monotonă pe* $[a,b)$,

atunci $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\ (C)$.

Criteriul lui Abel. *Dacă*

1^0 $\int_a^b f(x)\,dx\ (C)$ *şi*

2^0 g *este o funcţie monotonă şi mărginită pe intervalul* $[a,b)$,

atunci $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\ (C)$.

Exerciţiul 17. Este integrala $I=\int_0^1\dfrac{\ln x}{x+2}dx$ convergentă?

Rezolvare. Aplicăm Criteriul lui Abel pentru $f(x)=\ln x$ şi $g(x)=1/(x+2)$, $x\in(0,1]$. Utilizând formula lui Leibniz-Newton şi integrând prin părţi, găsim:

$$\int_0^1 \ln x dx = x\ln x|_0^1-\int_0^1 dx=-\lim_{x\to 0_+} x\ln x - x|_0^1.$$

Calculăm separat limita $\lim\limits_{x\to 0_+} x\ln x$ cu regula lui l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0_+} x\ln x=\lim_{x\to 0_+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0_+}\frac{1/x}{-1/x^2}=0.$$

Deci $\int_0^1 \ln x dx=-1$, deci converge. Apoi, funcţia g este monoton descrescătoare şi mărginită de $1/3$ şi $1/2$. Conform Criteriului lui Abel, integrala din enunţ este convergentă.