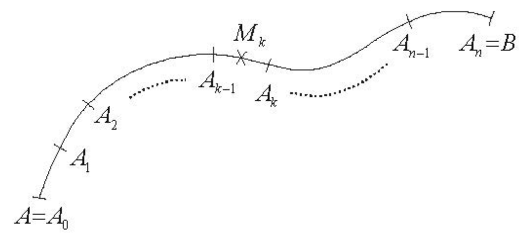
4. Integrale curbilinii

Fie $\overset{\frown}{AB}$ un arc de curbă (de exemplu în plan sau în spaţiu).

Considerăm o diviziune Δ a arcului $\overset{\frown}{AB}$: $A = A_0$, $A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, \ldots, A_n = B$ (în această ordine) şi punctele intermediare $M_k \in \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$. Le-am reprezentat în figură.



4.1. Curbe în $\mathbb{R}^n$

Definiţia 1. Se numeşte *curbă* (parametrizată) în $\mathbb{R}^n$ orice funcţie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continuă. Pentru $t \in [a, b]$, notăm $\gamma(t) = (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))$. Ecuaţiile

$$\gamma : \begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = \gamma_n(t) \end{cases} , t \in [a, b] \tag{1}$$

definesc aşa numita *reprezentare parametrică* a curbei γ.

Cazuri particulare: a) $n = 2$. Atunci o curbă γ în $\mathbb{R}^2$ se poate scrie sub forma $\gamma(t) = (f(t), g(t))$, $t \in [a, b]$, unde f, g sunt funcţii continue pe $[a, b]$.

b) $n = 3$. O curbă γ în $\mathbb{R}^3$ se poate scrie în forma $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$, $t \in [a, b]$, unde funcţiile f, g, h sunt continue pe $[a, b]$.

Exerciţiul 1. 1) Considerăm curba definită parametric prin $x = \cos t$, $y = \sin t$, unde $t \in [0, 2\pi]$. Imaginea acestui drum este cercul $C(0, 1)$ de centru O şi rază 1 parcurs o singură dată în sens direct.

2) Pentru $t \in [0, \pi]$, aceleaşi ecuaţii reprezintă semicercul din semiplanul superior al cercului din exemplul precedent.

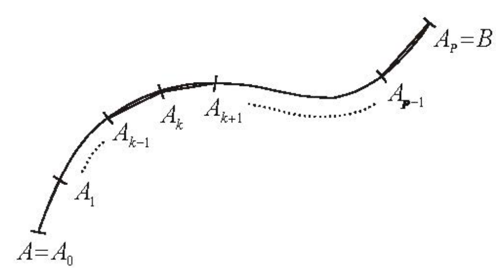
3) Ecuaţiile $x = \cos kt$, $y = \sin kt$, cu $t \in [0, 2\pi]$, $k \in \mathbb{N}^*$ definesc cercul $C(0, 1)$ de centru O şi rază 1 parcurs de k ori în sens direct.

Definiţia 2. Numim *opusa curbei* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, curba notată $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, definită prin $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$, $(\forall) t \in [a, b]$. Observăm că $\gamma^-(a) = \gamma(b)$, $\gamma^-(b) = \gamma(a)$.

Definiţia 3. O curbă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$ se numeşte *curbă netedă*, dacă funcţiile $\gamma_1, ..., \gamma_n \in C^1([a, b])$ O curbă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ se numeşte *netedă pe porţiuni* dacă se poate scrie ca o reuniune a unui număr finit de curbe netede, fiecare cu extremitatea finală coincizând cu extremitatea inţială a următoarei curbe.

Vom defini în cele ce urmează lungimea unei curbe şi vom da o metodă de calcul.

Fie $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ o curbă dată de reprezentarea parametrică (1.31). Considerăm o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$, $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b$ şi γ_Δ drumul poligonal (reuniunea segmentelor) cu vârfurile în punctele $A_k(\gamma_1(t_k), ..., \gamma_n(t_k)) \in \gamma$, $(\forall) k = \overline{1, p}$. Atunci lungimea segmentului de dreaptă cu vârfurile în punctele



$A_{k-1}(\gamma_1(t_{k-1}), ..., \gamma_n(t_{k-1}))$ şi $A_k(\gamma_1(t_k), ..., \gamma_n(t_k))$ este
$\sqrt{[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})]^2 + [\gamma_2(t_k) - \gamma_2(t_{k-1})]^2 ... + [\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]^2}$
şi deci lungimea drumului poligonal γ_Δ este

$$l(\gamma_\Delta) = \sum_{k=1}^{p} |A_{k-1}A_k| =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sqrt{[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})]^2 + ... + [\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]^2}. \tag{2}$$

Definiţia 4. Spunem că γ *are lungime finită* sau că este *rectificabilă* dacă mulţimea $\{l(\gamma_\Delta),\ \Delta \in \mathcal{D}([a,b])\}$ este mărginită. În acest caz, *lungimea* $l(\gamma)$ *a drumului* γ se defineşte prin

$$l(\gamma) = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}[a,b]} l(\gamma_\Delta).$$

Teorema 1. (de reprezentare integrală a lungimii unui drum) *Fie* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *o curbă netedă reprezentată parametric prin relaţiile* (1.31). *Atunci curba* γ *este rectificabilă, iar lungimea sa este*

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[\gamma_1'(t)]^2 + ...[\gamma_n'(t)]^2} dt. \tag{3}$$

Observaţia 1. Mărimea de sub integrală, $ds = \sqrt{[\gamma_1'(t)]^2 + ...[\gamma_n'(t)]^2} dt$, se numeşte *element de arc.*

Analizăm acum un caz particular important pentru aplicaţii.

Corolarul 1. *Presupunem că* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *este o curbă definită parametric prin*

$$\gamma : \begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases} \tag{4}$$

pentru $x \in [a,b]$, *unde* $f \in C^1([a,b])$. *Atunci* γ *curbă rectificabilă, iar lungimea sa este*

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \tag{5}$$

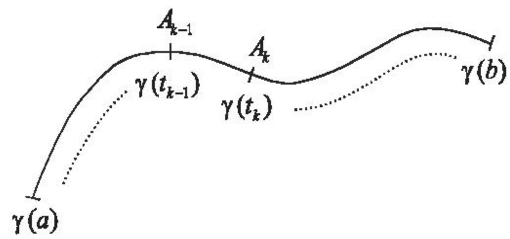
În acest caz, elementul de arc este $ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

4.2. Integrale curbilinii de speţa I

Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ o curbă rectificabilă, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ şi $F : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}$ o funcţie dată. Vom defini integrala curbilinie a lui F în raport cu lungimea de arc. Pentru aceasta, fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < ... < t_p = b$ diviziune a intervalului $[a,b]$ şi $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1,p}$ un sistem de puncte intermediare. Notăm $A_k = \gamma(t_k)$ şi s_k lungimea segmentului de dreaptă de extremităţi A_{k-1} şi A_k, adică

$$s_k = l([A_{k-1}A_k]) = \sqrt{[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})]^2 + ... + [\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]^2}.$$

Atunci suma Riemann ataşată funcţiei F în raport cu lungimea curbei γ, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare $\tau = \{\tau_k\}_{k=\overline{1,p}}$ este



$$S_\gamma(F, \Delta, \tau) = \sum_{k=1}^{p} F(\gamma(\tau_k))\, s_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} F(\gamma_1(\tau_k), ..., \gamma_n(\tau_k)) \sqrt{[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})]^2 + ... + [\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]^2}.$$

Reamintim că prin norma diviziunii Δ înţelegem numărul

$$||\Delta|| = \max\left\{t_k - t_{k-1}, k = \overline{1,p}\right\}.$$

Definiţia 5. Spunem că funcţia F este *integrabilă în raport cu lungimea curbei* γ dacă există un număr real I cu proprietatea că $(\forall)\,\varepsilon > 0$, $(\exists)\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $(\forall)$ $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$(=mulţimea diviziunilor intervalului $[a,b]$) cu $||\Delta|| < \delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi sistemul de puncte intermediare $\tau = \{\tau_k\}_{k=\overline{1,p}}$, să avem

$$|S_\gamma(F, \Delta, \tau_k) - I| < \varepsilon.$$

În acest caz, numărul I este unic şi se numeşte *integrala curbilinie (pe curba γ) a funcţiei* F şi se notează $I = \int\limits_\gamma F(x)\, ds$.

Demonstrăm în cele ce urmează un rezultat care asigură, în anumite ipoteze suplimentare, existenţa integralei curbilinii şi în plus ne dă o formulă de calcul a acestei integrale cu ajutorul integralei Riemann.

Teorema 2 (de reducere a integralei curbilinii de speţa I la o integrală Riemann). *Fie* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$,

$$\gamma : \begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ \text{..........} \\ x_n = \gamma_n(t), \end{cases} \tag{6}$$

$t \in [a,b]$, *o reprezentare parametrică a curbei* γ *netede (de clasă* C^1*) sau netede pe porţiuni şi* $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *(*D *domeniu ce conţine curba* γ*) o funcţie continuă. Atunci există integrala curbilinie* $\int\limits_\gamma F(x)\, ds$ *şi avem*

$$\int\limits_\gamma F(x_1, ..., x_n)\, ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + ... + (\gamma_n'(t))^2}\, dt. \tag{7}$$

Exerciţiul 2. Să se calculeze $\int\limits_\gamma ye^{-x} ds$, unde γ este curba dată parametric prin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2arctgt - t + 1 \end{cases}, t \in [0,1].$$

Rezolvare. Funcţia $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F(x,y)=ye^{-x}$ fiind continuă şi curba γ fiind netedă, există integrala din enunţ (conform teoremei de mai sus). Întrucât

$$x'(t)=\frac{2t}{1+t^2},\quad y'(t)=\frac{2}{1+t^2}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

obţinem

$$\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}=\sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}=1.$$

Utilizând formula (7) ajungem la

$$I=\int\limits_\gamma ye^{-x}ds=\int\limits_0^1(2arctgt-t+1)e^{-\ln(1+t^2)}dt=\int\limits_0^1 2arctgt\cdot\frac{1}{1+t^2}dt-$$

$$-\int\limits_0^1\frac{t}{1+t^2}dt+\int\limits_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=arctg^2t|_0^1-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)|_0^1+$$

$$+arctgt|_0^1=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

4.3. Integrale curbilinii de speţa a II-a

Definiţia 6. Numim *formă diferenţială pe domeniul* $D\subseteq\mathbb{R}^n$ o expresie de tipul $\omega=P_1dx_1+...+P_ndx_n$, unde $P_1,...,P_n:D\to\mathbb{R}$ sunt funcţii date (definite pe D) depinzând de n variabile. Aceste funcţii P_j, $j=\overline{1,n}$ se numesc *coeficienţii formei diferenţiale* ω.

Definiţia 7. Două forme diferenţiale $\omega=P_1dx_1+...+P_ndx_n$ şi $\widetilde{\omega}=\widetilde{P_1}dx_1+...+\widetilde{P_n}dx_n$ se numesc *egale* dacă $P_j=\widetilde{P}_j$, pentru orice $j=\overline{1,n}$.

Cazuri particulare. a) Pentru $n=2$, notăm variabilele independente cu x,y şi astfel o formă diferenţială ω definită pe un domeniu D din $\mathbb{R}^2$ se va scrie în forma

$$\omega=P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy.$$

b) Pentru $n=3$, notăm variabilele independente cu x,y,z. O formă diferenţială ω definită pe un domeniu D din $\mathbb{R}^3$ va avea formassss

$$\omega=P\left(x,y,z\right)dx+Q\left(x,y,z\right)dy+R\left(x,y,z\right)dz.$$

Vom defini în continuare integralele curbilinii de speţa a doua sau dintr-o formă diferenţială ω. Pentru aceasta, fie $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ o curbă dată parametric prin

$$\gamma:\begin{cases}x_1=\gamma_1\left(t\right)\\ \text{..........}\\ x_n=\gamma_n\left(t\right),\end{cases}\tag{8}$$

şi $P_1,...P_n:D\to\mathbb{R}$ funcţii date (unde D este domeniu, $\gamma\subset D$). Notăm $\omega=P_1dx_1+...+P_ndx_n$. Fie diviziunea $\Delta:a=t_0<t_1<...<t_p=b$ a intervalului $[a,b]$ şi $\tau=\{\tau_k\}_{k=\overline{1,p}}$,

$\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1,p}$ un sistem de puncte intermediare. Construim suma Riemann asociată formei diferenţiale ω, diviziunii Δ şi sistemului de puncte intermediare τ în raport cu γ :

$$S_\gamma(\omega, \Delta, \tau) = \sum_{k=1}^{p} \{P_1(\gamma(\tau_k))[\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})] +$$

$$+ \ldots + P_n(\gamma(\tau_k))[\gamma_n(t_k) - \gamma_n(t_{k-1})]\}.$$

Definiţia 8. Spunem că forma diferenţială ω *este integrabilă pe* γ dacă există un număr real I astfel încât $(\forall)\,\varepsilon > 0$, $(\exists)\,\delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a, b]$, cu norma $||\Delta|| < \delta(\varepsilon)$ şi $(\forall)\,\tau = \{\tau_k\}_{k=\overline{1,p}}$ un sistem de puncte intermediare, să avem

$$|S_\gamma(\omega, \Delta, \tau) - I| < \varepsilon. \tag{9}$$

Numărul I, dacă există este unic şi se numeşte *integrala formei diferenţiale* ω *pe* γ. Se notează $I = \int_\gamma \omega$.

Teorema 3. (de reducere la o integrală Riemann). *Considerăm o curbă* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$*, netedă sau netedă pe porţiuni, dată parametric prin relaţiile* $(s8)$ *şi* $\omega = P_1dx_1 + \ldots + P_ndx_n$ *o formă diferenţială, unde* $P_1, \ldots, P_n : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sunt funcţii continue şi* $\gamma \subset D$ *(D fiind domeniu). Atunci* ω *este integrabilă pe* γ *şi are loc relaţia*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b [P_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \ldots + P_n(\gamma(t)) \cdot \gamma_n'(t)]dt. \tag{10}$$

Exerciţiul 3. Fie $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ curba dată parametric prin $x = t^2$, $y = t$. Există integrala curbilinie de speţa a II-a

$$I = \int_\gamma \frac{dx}{1 + y^2} + \frac{dy}{1 + x^2}?$$

În caz afirmativ, să se calculeze această integrală.

Rezolvare. Curba γ fiind netedă şi funcţiile

$$P(x, y) = \frac{1}{1 + y^2},\ Q(x, y) = \frac{1}{1 + x^2}$$

fiind continue, avem asigurată integrabilitatea formei diferenţiale $\omega = Pdx + Qdy$ pe γ.

Conform Teoremei 4 avem

$$I = \int_0^1 \left[\frac{x'(t)\,dt}{1 + y^2(t)} + \frac{y'(t)\,dt}{1 + x^2(t)}\right] = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1}{1 + t^4}\right) dt.$$

Dar

$$I_1 = \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2}dt = \ln\left(1+t^2\right)|_0^1 = \ln 2.$$

Apoi,

$$\frac{1}{1+t^4} = \frac{1}{(t^2-\sqrt{2}t+1)(t^2+\sqrt{2}t+1)} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}t+\frac{1}{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}t+\frac{1}{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1},$$

de unde

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}[\int_0^1 \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1}dt - \int_0^1 \frac{\sqrt{2}dt}{t^2-\sqrt{2}t+1} -$$

$$-\int_0^1 \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1}dt - \int_0^1 \frac{\sqrt{2}dt}{t^2+\sqrt{2}t+1}] = -\frac{1}{4\sqrt{2}}[(\ln t^2-\sqrt{2}t+1)|_0^1 -$$

$$-2arctg\frac{2t-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}|_0^1 - \ln(t^2+\sqrt{2}t+1)|_0^1 - 2arctg\frac{2t+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}|_0^1].$$

Deci,

$$I = \ln 2 - \frac{1}{4\sqrt{2}}(\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} - 2arctg\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - 2arctg\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \pi).$$

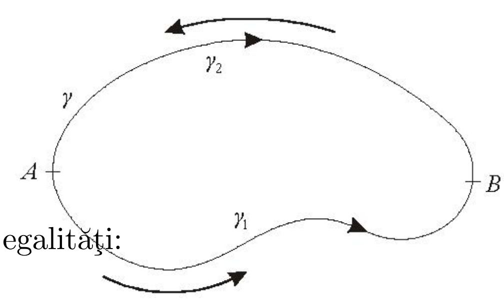
Definiţia 9. Fie $\omega = P_1dx_1 + ... + P_ndx_n$ o formă diferenţială, unde $P_1, ..., P_n : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Integrala formei ω se numeşte *independentă de drum* dacă $\int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_2}\omega$, oricare ar fi γ_1, γ_2 două curbe din domeniul D având aceleaşi capete.

Prezentăm acum o teoremă de caracterizare a independenţei de drum a integralelor curbilinii de speţa a doua.

Teorema 4. *Fie ω o formă diferenţială având coeficienţii continui pe D. Integrala lui ω este independentă de drum dacă şi numai dacă pentru orice curbă inclusă în D, $\gamma : [a,b] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$, închisă ($\gamma(a) = \gamma(b)$), avem $\int_\gamma \omega = 0$.*

Definiţia 10. Forma diferenţială $\omega = P_1dx_1 + ... + P_ndx_n$, cu $P_1, ..., P_n : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se numeşte *exactă* dacă există o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă încât

$$df = \omega. \tag{11}$$



În acest caz, f se numeşte *primitivă pentru forma diferenţială* ω, iar condiţia $df = \omega$ revine la următoarele egalităţi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = P_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = P_2, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} = P_n. \tag{12}$$

Teorema 5. (Leibniz- Newton.) *Fie forma diferenţială exactă ω având coeficienţii continui pe $D \subset \mathbb{R}^n$ şi curba netedă $\gamma : [a,b] \to D$. Dacă f este o primitivă pentru ω, atunci:*

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \tag{13}$$

Observaţia 2. Proprietatea rămâne valabilă şi pentru curbe netede pe porţiuni, adică $\gamma = \gamma_1 \cup ... \cup \gamma_m$.

Definiţia 11. Mulţimea deschisă $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se numeşte *mulţime conexă* (prin arce) dacă orice două puncte ale sale pot fi unite printr-o linie poligonală inclusă în mulţimea D.

Teorema 6. *1) Orice formă diferenţială exactă cu coeficienţii funcţii continue pe o mulţime D are integrala independentă de drum.*

2) Dacă D este deschisă şi conexă (prin arce), are loc şi reciproca.

Definiţia 1. Fie ω o formă diferenţială, $\omega = P_1(x_1, ..., x_n)dx_1 + ... + P_n(x_1, ..., x_n)dx_n$, cu $P_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clasa C^1. Forma diferenţială ω se numeşte *închisă* dacă

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}, (\forall)\, i, j = \overline{1, n}\,, i \neq j. \tag{14}$$

Teorema 7. *Fie $\omega = P_1dx_1 + ... + P_ndx_n$, $P_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ de clasa C^1 pe D. Dacă forma diferenţială ω este exactă, atunci ω este închisă.*

Exerciţiul 4. Forma diferenţială $\omega = \dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ nu este exactă deoarece nu este închisă. Într-adevăr, dacă notăm cu $P(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ şi $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \neq \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Conform Teoremei 7, ω nu este nici exactă.

Observaţia 3. Reciproca Teoremei 8 nu este în general adevărată. Ea are loc totuşi pe mulţimi cu o structura mai specială, numite mulţimi simplu conexe.

Definiţia 13. O mulţime $D \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte *simplu conexă* dacă orice curbă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ simplă (adică injectivă pe $[a,b)$) şi închisă, $\gamma \subseteq D$, delimitează un domeniu inclus în D.

De exemplu, orice bilă din spaţiul $\mathbb{R}^n$ este o mulţime simplu conexă. În Observaţia 4 menţionam că reciproca Teoremei 8 are loc pe mulţimi simplu conexe. O formulăm aici:

Teorema 8. *Fie $\omega = P_1dx_1 + ... + P_ndx_n$, $P_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ de clasa C^1 pe mulţimea simplu conexă D. Dacă forma diferenţială ω este închisă, atunci ω este exactă.*

Corolarul 2. *Dacă D este o mulţime simplu conexă din $\mathbb{R}^n$, iar $\omega = P_1dx_1 + ... + P_ndx_n$ este o formă diferenţială închisă cu coeficienţii $P_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P_i \in C^1(D)$, $i = \overline{1,n}$, atunci integrala lui ω pe orice curbă închisă inclusă în D este zero.*

Exerciţiul 5. Fie forma diferenţială $\omega = (x^2 + y^2)\,dx + 2xydy$.

a) Calculaţi integrala $I = \int_C \omega$, unde C este o curbă închisă.

b) Să se determine o funcţie f a cărei diferenţială df să fie ω.

Rezolvare. a) Observăm că $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, unde $P(x,y) = x^2 + y^2$, $Q(x,y) = 2xy$ sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2$. Cum $\partial P/\partial y = 2y = \partial Q/\partial x$, rezultă că ω este o formă diferenţială închisă. Dar C este o curbă închisă. Conform Corolarului 1.4.2 , rezultă că $I = 0$.

b) Deoarece ω este o formă diferenţială exactă (fiind închisă pe mulţimea simplu conexă $\mathbb{R}^2$), există o funcţie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ astfel încât $df=\omega$. Atunci,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = P = x^2+y^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = Q = 2xy, \end{cases}$$

Din a doua ecuaţie găsim că $f(x,y)=\int 2xydy = xy^2 + C(x)$, unde $C(x)$ este o constantă în raport cu y (deci nu depinde de y, dar poate să depindă de x). Derivând în raport cu x, obţinem $\partial f/\partial x = y^2 + C'(x)$. Comparând cu prima ecuaţie din sistem, deducem $C'(x)=x^2$, deci $C(x)=x^3/3+c$, unde c este o constantă reală. Deci,

$$f(x,y)=xy^2+x^3/3+c.$$

Exerciţiul 6. Calculaţi integrala curbilinie de speţa a doua $\int\limits_C \left(\dfrac{dx}{y} - \sqrt{2x}dy\right)$ luată pe semicercul $x^2+y^2-2x=0$, $y\geq 0$ în sens pozitiv.

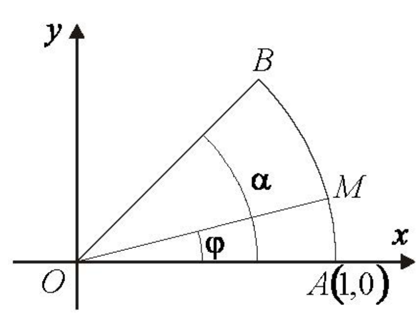
Rezolvare. Semicercul din enunţ , dat de $\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ y\geq 0 \end{cases}$, se scrie parametric astfel:

$$\begin{cases} x=1+\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}, \text{ cu } \theta\in[0,\pi].$$

Atunci integrala dată devine

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{d(\cos\theta+1)}{\sin\theta} - \int_0^\pi \sqrt{2(\cos\theta+1)}d(\sin\theta) = \\ &= \int_0^\pi \left(-1-\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\right)d\theta = -\theta\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \left(\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)d\theta = \\ &= -\pi - \frac{2}{3}\sin\frac{3\theta}{2}\Big|_0^\pi - 2\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi = -\pi + \frac{2}{3} - 2. \end{aligned}$$

Exerciţiul 7. Să se calculeze integrala $\int\limits_C x\dfrac{x+y}{x-y}dx - y\dfrac{x+y}{x-y}dy$, unde C este conturul sectorului circular de rază 1 şi deschidere $0\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{4}$.



Rezolvare. Observăm că C se poate scrie ca $C=[OA]\cup\overset{\frown}{AB}\cup[BO]$.
Notăm integralele pe cele trei componente ale lui C prin I_1, I_2, I_3. Segmentul $[OA]$ este definit prin

$$[OA]:\begin{cases} y=0 \\ x\in[0,1] \end{cases}$$

de unde $dy = 0$ şi deci integrala pe $[OA]$ este $I_1 = \int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$.

Arcul $\overset{\frown}{AB}$ se exprimă analitic prin egalităţile

$$\overset{\frown}{AB}: \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}, \varphi \in [0, \alpha].$$

Integrala I_2 devine

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_0^\alpha \cos\varphi \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} \sin\varphi\, d\varphi - \int_0^\alpha \sin\varphi \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} \cos\varphi\, d\varphi = \\ &= -\int_0^\alpha \sin 2\varphi \frac{1 + 2\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} d\varphi = \\ &= -\int_0^\alpha \sin 2\varphi \frac{1 + \sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} d\varphi = -\int_0^\alpha \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} d\varphi - \int_0^\alpha \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \ln|\cos 2\varphi| \Big|_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} + \int_0^\alpha \cos 2\varphi\, d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \ln|\cos 2\alpha| - \int_0^\alpha \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 2\varphi} d\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^\alpha = \\ &= \frac{1}{2} \ln|\cos 2\alpha| + \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{(\sin 2\varphi)'}{1 - \sin^2 2\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \ln|\cos 2\alpha| + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{\sin 2\alpha + 1}{\sin 2\alpha - 1}\right|. \end{aligned}$$

Segmentul de dreaptă $[BO]$ este dat prin relaţiile

$$[BO]: \begin{cases} y = (tg\alpha)\, x \\ x \in [x_B, 0] = [\cos\alpha, 0]. \end{cases}$$

Deci,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\cos\alpha}^0 \left(x \frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha} - x \cdot tg^2\alpha \frac{1 + tg\alpha}{1 - tg\alpha} \right) dx = \\ &= (1 + tg\alpha)^2 \int_{\cos\alpha}^0 x dx = -\frac{1}{2} (1 + tg\alpha)^2 \cos^2\alpha. \end{aligned}$$

Se sumează cele trei integrale şi se obţine astfel valoarea integralei cerute.

Exerciţiul 8. Calculaţi $I = \int\limits_C (2y^2 - 4y + x)\, dx + 4x\,(y - 1)\, dy$, unde C este cercul $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

Rezolvare. Notăm $P = 2y^2 - 4y + x$, $Q = 4x\,(y - 1)$. Avem $\frac{\partial P}{\partial y} = 4y - 4$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 4\,(y - 1)$. Deci $\omega = P\, dx + Q\, dy$ este formă diferenţială exactă. Rezultă $I = 0$ (C este curbă închisă).

Exerciţiul 9. Să se integreze diferenţiala totală exactă

$$\omega = \frac{(y^2 - xy)\, dx + (x^2 - xy)\, dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, (x, y) \neq (0, 0).$$

Rezolvare. A integra forma diferenţială ω este echivalent cu a afla o primitivă a sa ($\omega = df$). Folosim coordonatele polare:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \cos\theta\, d\rho - \rho \sin\theta\, d\theta \\ dy = \sin\theta\, d\rho + \rho \cos\theta\, d\theta \end{cases}.$$

Atunci ω se scrie astfel:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\rho^3} \Big[\big(\rho^2 \sin^2\theta - \rho^2 \sin\theta \cos\theta\big) (\cos\theta\, d\rho - \rho \sin\theta\, d\theta) + \\ &\quad + \big(\rho^2 \cos^2\theta - \rho^2 \sin\theta \cos\theta\big) (\sin\theta\, d\rho + \rho \cos\theta\, d\theta) \Big] = \\ &= \frac{1}{\rho} \Big[\big(\sin^2\theta - \sin\theta \cos\theta\big) (\cos\theta\, d\rho - \rho \sin\theta\, d\theta) + \\ &\quad + \big(\cos^2\theta - \sin\theta \cos\theta\big) (\sin\theta\, d\rho + \rho \cos\theta\, d\theta) \Big] = \\ &= (\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

Deci, există o funcţie f de clasă C^1 astfel încât diferenţiala sa df să coincidă cu $\omega : \omega = df = (\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta$. Rezultă $f = \sin\theta + \cos\theta + C$, adică

$$f = \frac{y}{\rho} + \frac{x}{\rho} + C = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C.$$

Exerciţiul 10. Să se integreze diferenţiala totală exactă $dz = \dfrac{y\, dx - x\, dy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}$ pe un domeniu simplu conex din $\mathbb{R}^2$ care nu conţine originea.

Rezolvare. Observăm că $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, deci ω este o diferenţială exactă pe orice domeniu simplu conex care nu conţine originea. Scriem

$$dz = \frac{y}{3x^2 - 2xy + 3y^2} dx + \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2} dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

de unde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{3x^2 - 2xy + 3y^2} = \frac{y}{3} \frac{1}{\left(x - \frac{y}{3}\right)^2 + \frac{8y^2}{9}}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{3x^2 - 2xy + 3y^2}. \tag{16}$$

Integrăm prima relaţie în raport cu x:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\left(x - \frac{y}{3}\right)}{\frac{2\sqrt{2}y}{3}} + C(y),$$

unde $C(y)$ este o constantă în raport cu x, adică o funcţie de y. Apoi, derivăm acest z în raport cu y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\frac{8y^2}{9}}{\left(x-\frac{y}{3}\right)^2+\frac{8y^2}{9}} \left(\frac{x-\frac{y}{3}}{\frac{2\sqrt{2}y}{3}}\right)' + C'(y) =$$

$$= \frac{8}{2\sqrt{2}\cdot 9} \frac{y^2}{x^2-\frac{2}{3}xy+y^2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{-y-(3x-y)}{y^2} + C'(y) = \frac{-x}{3x^2-2xy+3y^2} + C'(y).$$

Egalând cu expresia din (16), rezultă că $C'(y) = 0$, deci $C(y) = C$ este o constantă. În concluzie, funcţia cerută este

$$z(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x-y}{2\sqrt{2}y} + C,\ y \neq 0.$$

Exerciţiul 11. Să se determine funcţia a cărei diferenţială totală este: $\omega = (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$.

R. Forma generală a lui ω este $\omega = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$. Pe de altă parte, dacă există o funcţie f diferenţiabilă, a cărei diferenţială este ω, atunci

$$\omega = df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz.$$

Egalând coeficienţii lui dx, dy, respectiv dz, rezultă

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P = y+z \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q = x+z \\ \frac{\partial f}{\partial z} = R = x+y \end{cases}.$$

Integrând prima ecuaţie în raport cu x, avem $f(x,y,z) = xy+xz+C(y,z)$, unde $C(y,z)$ este o constantă în raport cu x, deci o funcţie de y şi z. Derivăm în raport cu y: $\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial C}{\partial y}$ şi egalăm cu expresia $\frac{\partial f}{\partial y} = x+z$ (din ecuaţia a doua). De aici obţinem $\frac{\partial C}{\partial y} = z$. Deci $C(y,z) = zy + K(z)$, unde $K(z)$ este constantă în raport cu y. Funcţia f se mai scrie $f(x,y,z) = xy+xz+yz+K(z)$. Derivând în raport cu z, găsim $\frac{\partial f}{\partial z} = x+y+K'(z)$ şi egalând cu expresia lui $\frac{\partial f}{\partial z}$ din ecuaţia a treia ecuaţie, rezultă $K'(z) = 0$, de unde $K(z) = k$ – constantă. Deci $f(x,y,z) = xy+xz+yz+k$.