CURS 4, EDCO

1 Integrale duble

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact (închis şi mărginit). Să presupunem că $D_1, D_2, ..., D_n$ este un şir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n. \tag{1}$$

Vom spune că relaţia (1) defineşte o descompunere a domeniului D şi notăm cu $\Delta := \{D_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulţimilor ce formează această descompunere.

Pentru o mulţime compactă $A \subset \mathbb{R}^2$, cea mai mare distanţă dintre două puncte din A se numeşte diametrul mulţimii A. În cazul descompunerii Δ a domeniului D, cel mai mare dintre diametrele mulţimilor $D_1, ..., D_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ şi se numeşte diametrul descompunerii Δ.

Fie acum o funcţie continuă pe domeniul D. Vom considera, în fiecare subdomeniu D_i, câte un punct $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, iar apoi formăm suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{Aria}(D_i). \tag{2}$$

Această sumă se va numi suma Riemann asociată funcţiei f, domeniului D, descompunerii Δ şi punctelor $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=\overline{1,n}}$, şi o notăm cu

$$\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i).$$

Definiţia 1.1 *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact şi $f : D \to \mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte integrabilă Riemann pe domeniul D dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice descompunere Δ cu $\|\Delta\| < \delta$ şi orice ar fi punctele $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ este satisfăcută relaţia:*

$$|\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i) - I| < \varepsilon.$$

În această situaţie, numărul I se numeşte integrala dublă în sens Riemann a funcţiei f pe domeniul D şi se notează prin

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

În baza definiţiei precedente ne rezultă, luând $f(x, y) = 1$, $\forall (x, y) \in D$, că f este integrabilă Riemann pe D şi

$$\text{Aria}(D) = \iint_D dxdy. \tag{3}$$

Teorema 1.2 *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact şi $f : D \to \mathbb{R}$ continuă pe D. Atunci f este integrabilă pe domeniul D.*

Prezentăm în continuare câteva cazuri în care integrala dublă se poate calcula, ea reducându-se la calculul a două integrale Riemann obişnuite.

Definiţia 1.3 *1. Domeniul D se numeşte simplu în raport cu axa Oy dacă poate fi reprezentat sub forma:*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b]\,, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \right\}, \tag{4}$$

unde $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}(x)$ sunt funcţii continue pe $[a,b]$ cu $\varphi(x) < \psi(x)\,,\; x \in (a,b)\,.$

2. Domeniul D se numeşte simplu în raport cu axa Ox dacă poate fi reprezentat sub forma:

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c,d]\,, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \right\}, \tag{5}$$

unde $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe $[c,d]$ cu $\varphi(y) < \psi(y)\,,\; y \in (c,d)\,.$

Observaţia 1.4 *Observăm din definiţia de mai sus că un domeniu D este simplu în raport cu axa Oy dacă orice paralelă dusă prin punctele intervalului $[a,b]$ la Oy intersectează $\operatorname{Fr} D$ în exact două puncte, cu excepţia eventuală a punctelor situate pe dreptele de ecuaţii $x = a$ sau $x = b$. O observaţie analoagă are loc pentru cazul domeniilor simple în raport cu axa Ox.*

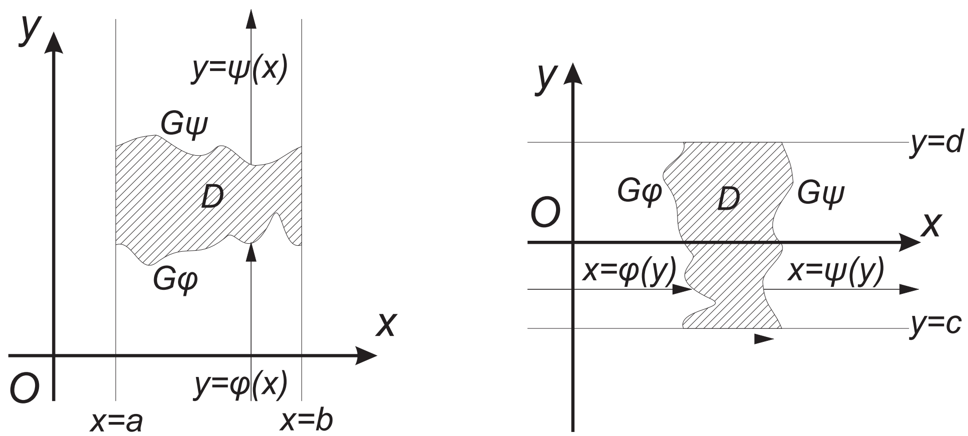


Figura 1: Domeniu simplu în raport cu Oy Domeniu simplu în raport cu Ox

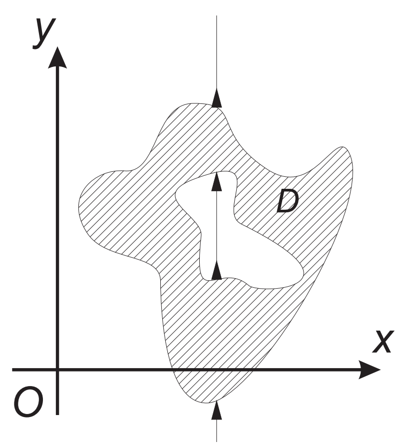


Figura 2: Domeniu care nu este simplu nici în raport cu Oy, nici în raport cu Ox

Lemma 1.5 *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu axa Oy şi funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ continuă pe D. Atunci funcţia $I : [a,b] \to \mathbb{R}$, dată prin*

$$I(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

este continuă pe $[a,b]$, deci integrabilă Riemann pe $[a,b]$.

Demonstraţie. Să presupunem deci că D este dat de relaţia (4). Făcând schimbarea de variabilă

$$y = g(x,t) = \varphi(x) + t\,(\psi(x) - \varphi(x)),$$

vom avea:

$$g(x,0) = \varphi(x), \quad g(x,1) = \psi(x), \quad \frac{\partial g}{\partial t} = \psi(x) - \varphi(x).$$

Deci,

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int_0^1 f(x, \varphi(x) + t\,(\psi(x) - \varphi(x))) \cdot (\psi(x) - \varphi(x))\,dt.$$

Cum funcţia din ultima integrală, notată $h(x,t)$, este continuă în raport cu ansamblul variabilelor (x,t) pe $[a,b] \times [0,1]$, iar

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy = \int_0^1 h(x,t)dt,$$

în baza continuităţii integralelor cu parametru vom avea că funcţia $x \mapsto \int_0^1 h(x,t)dt$ este continuă, deci funcţia $x \mapsto I(x)$ este continuă pe $[a,b]$. □

Lemma 1.6 *Dacă $m \le f(x,y) \le M$ pe D, iar f este continuă pe D, simplu în raport cu axa Oy, atunci*

$$m \cdot \text{Aria}(D) \le \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \le M \cdot \text{Aria}(D). \tag{6}$$

Demonstraţie. În baza relaţiei de monotonie a integralei, avem

$$m \cdot \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \le \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dydx \le M \cdot \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy,$$

sau

$$m \cdot (\psi(x) - \varphi(x)) \le \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dydx \le M \cdot (\psi(x) - \varphi(x)).$$

Integrând această relaţie de la a la b, obţinem (6). □

Următoarea teoremă pune în evidenţă un mod de calcul al integralelor duble pentru domenii simple în raport cu una dintre axe.

Teorema 1.7 *Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, integrabilă Riemann pe domeniul D. Dacă:*

1. D este simplu în raport cu axa Oy şi are reprezentarea (4), atunci are loc formula

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{7}$$

2. D este simplu în raport cu axa Ox şi are reprezentarea (5), atunci are loc formula

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{8}$$

Demonstraţie. Vom demonstra doar relaţia (7), cealaltă formulă arătându-se analog. Să presupunem deci că D este dat de relaţia (4). Să considerăm o descompunere a domeniului D, efectuată cu ajutorul unor drepte paralele de forma $x = x_0, x = x_1, ..., x = x_n$, unde $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ este o diviziune a intervalului $[a, b]$, şi a unor curbe definite prin relaţii de forma

$$y = \varphi_0(x), y = \varphi_1(x), ..., y = \varphi_n(x),$$

unde

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) = \varphi(x),\\
&\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{1}{n}\left(\psi(x) - \varphi(x)\right),\\
&\varphi_n(x) = \varphi(x) + \frac{2}{n}\left(\psi(x) - \varphi(x)\right),\\
&\qquad ...\\
&\varphi_n(x) = \varphi(x) + \frac{n}{n}\left(\psi(x) - \varphi(x)\right) = \psi(x).
\end{aligned}$$

În baza proprietăţii de aditivitate a integralei Riemann în raport cu intervalul, obţinem

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Folosind aceeaşi proprietate, avem însă şi

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int\limits_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)\,dy + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy + ... + \int\limits_{\varphi_{n-1}(x)}^{\varphi_n(x)} f(x,y)\,dy \right] dx.$$

În baza prorpietăţii de liniaritate a integralei, avem

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)\,dy\right)dx+$$
$$+\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx+...+\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{\varphi_{n-1}(x)}^{\varphi_n(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Aşadar, vom avea că

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Fiecărui termen al sumei duble din relaţia anterioară i se poate aplica Lema 1.6. Notăm

$$D_{ij}=\{(x,y)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\,,y\in[\varphi_{j-1}(x),\varphi(x)]\}$$
$$m_{ij}=\inf_{D_{ij}} f(x,y),\quad m_{ij}=\sup_{D_{ij}} f(x,y).$$

Folosind Lema 1.6, obţinem

$$m_{ij}\cdot\text{Aria}(D_{ij})\leq\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{\varphi_{j-1}(x)}^{\varphi_j(x)} f(x,y)\,dy\right)dx\leq M_{ij}\cdot\text{Aria}(D_{ij}),$$

de unde, prin sumare,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}\cdot\text{Aria}(D_{ij})\leq\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}\cdot\text{Aria}(D_{ij}).$$

Dar, cum f este continuă pe domeniul compact D_{ij}, valorile m_{ij} şi M_{ij} se ating, în baza Teoremei lui Weierstrass, în puncte din domeniul D_{ij}, adică sumele din dreapta şi stânga relaţiei precedente sunt sume Riemann. Mai mult, norma descompunerii realizate de noi va tinde către 0 când $n\to\infty$, iar cum f este integrabilă pe D, va rezulta că ambele sume tind către $\iint_D f(x,y)\,dxdy$. De aici, relaţia (7). □

Observaţia 1.8 *Uneori, pentru uşurarea scrierii, preferăm notaţiile:*

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right)dx\overset{not}{=}\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy,$$
$$\int_c^d\left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\right)dy\overset{not}{=}\int_c^d dy\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$

În cazul unui domeniu dreptunghiular, $D=[a,b]\times[c,d]$, se observă faptul că acesta este simplu şi în raport cu Oy, şi cu Ox, putând fi reprezentat sub oricare din formele (4) şi (5). Spre exemplu, putem lua $\varphi(x)=c$ şi $\psi(x)=d$ pentru orice $x\in[a,b]$. În acest caz, formulele (7) şi (8) devin, respectiv,

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy, \tag{9}$$

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx. \tag{10}$$

Mai mult, dacă f este o funcţie cu variabile separate, adică f se poate scrie sub forma $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ pentru orice $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$, atunci integrala dublă se calculează ca un produs efectiv de două integrale Riemann simple, adică:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy=\left(\int\limits_a^b f_1(x)\,dx\right)\cdot\left(\int\limits_c^d f_2(y)\,dy\right).$$

1.1 Proprietăţi ale integralei duble

Teorema 1.9 (Proprietatea de liniaritate în raport cu integrandul) *Fie D un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$, f,g două funcţii integrabile pe D şi α un număr nenul. Atunci funcţiile $f+g$, $\alpha\cdot f$ sunt integrabile pe D şi, în plus:*

$$\iint_D (f+g)(x,y)dxdy=\iint_D f(x,y)\,dxdy+\iint_D g(x,y)\,dxdy,$$
$$\iint_D (\alpha\cdot f)(x,y)dxdy=\alpha\cdot\iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Teorema 1.10 (Proprietatea de aditivitate în raport cu domeniul) *Dacă $D=D_1\cup D_2$ şi $D_1\cap D_2=\emptyset$ şi sunt separate printr-o curbă netedă, iar f este integrabilă pe D, atunci f este integrabilă pe D_i, $i=1,2$ şi rezultă*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy=\int\int_{D_1} f(x,y)dxdy+\int\int_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Reciproc, dacă f este integrabilă pe D_i atunci f este integrabilă pe D şi are loc aceeaşi relaţie.

Teorema 1.11 *Fie D un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$,iar f o funcţie integrabilă pe D. Atunci funcţiile $|f|$ este integrabilă pe D şi are loc:*

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right|\le\iint_D |f(x,y)|\,dxdy.$$

Teorema 1.12 (monotonie) *Dacă $f,g:D\to\mathbb{R}$ sunt integrabile pe D şi $f(x,y)\le g(x,y)$, $\forall(x,y)\in D$, atunci*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy\le\int\int_D g(x,y)dxdy.$$

Dacă pentru orice $(x, y) \in D$ are loc

$$m \leq f(x, y) \leq M$$

atunci este adevărată şi inegalitatea

$$m \cdot aria(D) \leq \int \int_D f(x, y) dxdy \leq M \cdot aria(D).$$

Teorema 1.13 (de medie pentru integrala dublă) *Fie D un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe D. Atunci există un punct $(x_0, y_0) \in D$ astfel încât*

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = f(x_0, y_0) \cdot \mathrm{Aria}(D).$$

1.2 Interpretarea mecanică a integralei duble

Considerăm o placă plană D, de grosime neglijabilă, având în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcţie continuă şi pozitivă $\rho(x, y)$.

1. **masa** plăcii materiale este:

$$M = \iint_D \rho(x, y)\, dxdy.$$

2. **coordonatele centrului de greutate** al plăcii materiale sunt date de formulele:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M} \cdot \iint_D x \cdot \rho(x, y)\, dxdy, \\ y_G = \dfrac{1}{M} \cdot \iint_D y \cdot \rho(x, y)\, dxdy. \end{cases}$$

3. **momentul de inerţie** al plăcii materiale D, situată în planul xOy, în raport cu o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iint_D r^2(x, y) \cdot \rho(x, y)\, dxdy$$

unde $r = r(x, y)$ este distanţa de la un punct curent al plăcii, $M(x, y)$, la dreapta d, respectiv la punctul P.

În particular, momentele de inerţie I_{Ox} şi I_{Oy} ale plăcii materiale D în raport cu axele de coordonate Ox, respectiv Oy, sunt:

$$I_{Ox} = \iint_D y^2 \cdot \rho(x, y)\, dxdy \quad \text{şi} \quad I_{Oy} = \iint_D x^2 \cdot \rho(x, y)\, dxdy.$$

De asemenea, momentul de inerţie al plăcii materiale D în raport cu originea axelor de coordonate este:

$$I_O = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho(x, y)\, dxdy.$$

Evident, are loc:

$$I_O = I_{Ox} + I_{Oy}.$$

1.2.1 Exemple

Exerciţiul 1.14 *Calculaţi următoarele integrale duble pe domeniile indicate:*

1. $I = \iint_D \sin(x+y) \cdot dxdy$, unde $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soluţie. Cum D este dreptunghiular, avem, în baza formulei (9),

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\, dy.$$

Cum $I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\, dy = -\cos(x+y) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin x + \cos x$, rezultă

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx = 2.$$

2. $I = \iint_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, unde $D = [0,1] \times [0,1]$.

Soluţie. Obţinem

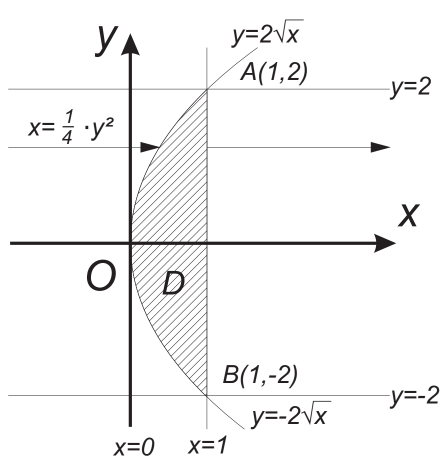
$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(x+y+1)^2},$$
$$I(x) = \int_0^1 \frac{dy}{(x+y+1)^2} = \frac{-1}{x+y+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$$

de unde

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

3. $I = \iint_D xy^2 dxdy$, unde D este domeniul plan limitat de parabola de ecuaţie $y^2 = 4x$ şi de dreapta de ecuaţie $x = 1$.

Soluţie.



Domeniul D este simplu în raport cu ambele axe de coordonate. Considerându-l simplu în raport cu axa Ox, avem:

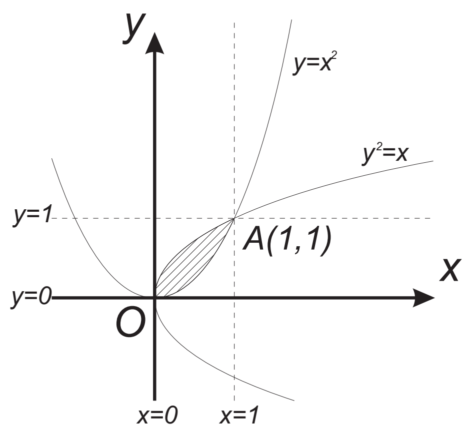
$$I=\int_{-2}^{2}dy\int_{\frac{1}{4}y^2}^{1}\left(xy^2\right)dx,$$
$$I\left(y\right)=\int_{\frac{1}{4}y^2}^{1}\left(xy^2\right)dx=\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot y^2\Big|_{\frac{1}{4}y^2}^{1}=\frac{y^2}{2}-\frac{y^6}{32},$$

de unde

$$I=\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^6}{32}\right)dy=\frac{32}{21}.$$

4. $I=\iint_D\left(x^2+y\right)dxdy$, unde D este domeniul plan limitat de curbele de ecuaţii: $y=x^2$ şi $y^2=x$.

Soluţie.



Domeniul D (haşurat pe figură) este simplu în raport cu ambele axe de coordonate. Considerându-l ca domeniu simplu în raport cu axa Oy, îl putem scrie sub forma $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ x^2\le y\le\sqrt{x}\end{cases}$, deci

$$I=\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2+y\right)dy=\int\limits_0^1\left[\left(x^2y+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}\right]dx$$
$$=\int\limits_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}x^4\right)dx=\frac{33}{140}.$$

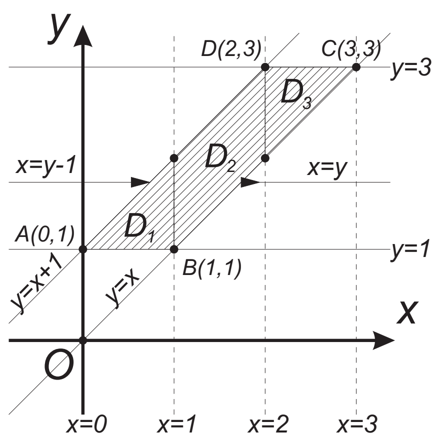
Considerând D ca fiind simplu în raport cu axa Ox, îl putem scrie sub forma $D:\begin{cases}0\le y\le 1\\ y^2\le x\le\sqrt{y}\end{cases}$, de unde

$$I = \int_0^1 \left[\int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(x^2 + y\right) dx \right] dy = \int_0^1 \left[\left(\frac{x^3}{3} + xy \right) \Bigg|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} y^6 - y^3 \right) dy = \frac{33}{140}.$$

5. $I = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot dxdy$, unde D este domeniul plan mărginit de dreptele de ecuaţii: $y = x$, $y = x + 1$, $y = 1$ şi $y = 3$.

Soluţie.



Dacă privim domeniul D în raport cu axa Oy, trebuie să-l descompunem acest domeniu în trei domenii D_1, D_2 şi D_3, simple în raport cu această axă, apoi vom avea, folosind Teorema 1.10, că

$$I = \iint_{D_1} \left(x^2 + y^2\right) dxdy + \iint_{D_2} \left(x^2 + y^2\right) dxdy + \iint_{D_3} \left(x^2 + y^2\right) dxdy.$$

Domeniul D (mărginit de paralelogramul $ABCD$) este însă simplu în raport cu axa Ox, putând fi scris sub forma

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [1, 3], y - 1 \leq x \leq y \right\}.$$

Atunci

$$I = \int_1^3 dy \int_{y-1}^{y} \left(x^2 + y^2\right) dx,$$

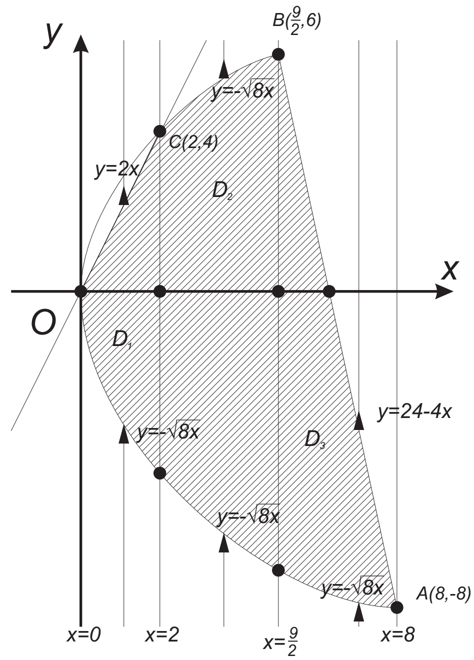
$$I(y) = \int_{y-1}^{y} \left(x^2 + y^2\right) dx = \frac{x^3}{3} + xy^2 \Bigg|_{x=y-1}^{x=y} = \frac{1}{3} y^3 - \frac{(y-1)^3}{3} + y^2,$$

deci

$$I = \frac{1}{3} \int_1^3 y^3 dy - \frac{1}{3} \int_1^3 (y-1)^3 + \int_1^3 y^2 dy = 14.$$

6. $I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x}}$, unde: $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leq 8x, y \leq 2x, y + 4x \leq 24 \right\}$.

Soluţie.



Domeniul D este haşurat în figura de mai sus. Pentru calcul, împărţim domeniul D în trei subdomenii simple în raport cu axa Oy şi avem

$$I_1 = \iint_{D_1} \frac{dxdy}{\sqrt{x}} = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{8x}}^{2x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(2x + \sqrt{8x}\right) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 \left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right) \cdot dx$$
$$= \frac{20\sqrt{2}}{3},$$
$$I_2 = \iint_{D_2} \frac{dxdy}{\sqrt{x}} = \int_2^{\frac{9}{2}} dx \int_{-\sqrt{8x}}^{\sqrt{8x}} \frac{dy}{\sqrt{x}} = \int_2^{\frac{9}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(4\sqrt{2 \cdot \sqrt{x}}\right) dx = 4\sqrt{2} \cdot \int_2^{\frac{9}{2}} dx = 10\sqrt{2},$$
$$I_3 = \iint_{D_3} \frac{dxdy}{\sqrt{x}} = \int_{\frac{9}{2}}^{8} dx \int_{-\sqrt{8x}}^{24-4x} \frac{dy}{\sqrt{x}} = \int_{\frac{9}{2}}^{8} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(24 - 4x + \sqrt{8x}\right) dx$$
$$= 48\sqrt{x}\Big|_{\frac{9}{2}}^{8} - \frac{8}{3} \cdot x\sqrt{x}\Big|_{\frac{9}{2}}^{8} + 2\sqrt{2} \cdot x\Big|_{\frac{9}{2}}^{8} = \frac{19\sqrt{2}}{3}.$$

Aşadar,

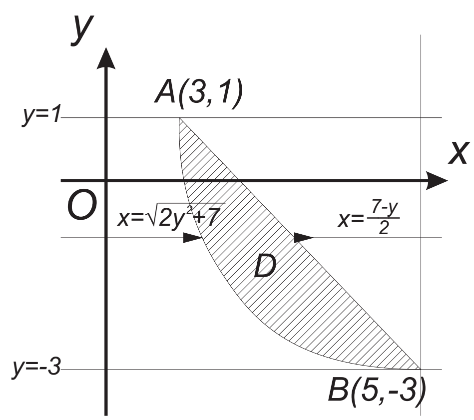
$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 23\sqrt{2}.$$

7. Să se calculeze masa plăcii plane materiale care ocupă domeniul plan:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y^2 \geq 7, y \leq 7 - 2x\right\}$$

şi care are densitatea $\rho(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2y^2 + 7}}$.

Soluţie.



Avem

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{2y^2+7}}$$
$$= \int_{-3}^{1} dy \int_{\sqrt{2y^2+7}}^{\frac{7-y}{2}} \frac{dx}{\sqrt{7+2y^2}} = \int_{-3}^{1} \left(\frac{7-y}{2\sqrt{7+2y^2}} - 1 \right) dy = \frac{7}{2\sqrt{2}}.$$

8. Să se calculeze momentele de inerţie in raport cu axele de coordonate şi momentul de inerţie faţă de origine pentru placa materială plană care ocupă domeniul

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$$

şi care are densitatea materială de masă dată de $\rho(x,y) = 1 + xy$.

Soluţie. Figura 10. Obţinem

$$I_{Ox} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y^2 (1+xy)\,dy = \frac{11}{120},$$
$$I_{Oy} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^2 (1+xy) dy = \frac{11}{120},$$
$$I_O = I_{Ox} + I_{Oy} = \frac{11}{60}.$$

1.3 Schimbarea de variabilă în integrale duble

Considerăm două domenii compacte D şi D' din $\mathbb{R}^2$ şi o transformare $T : D' \to D$, de forma

$$\begin{matrix} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{matrix}, \quad (u,v) \in D', \tag{11}$$

unde:

1. x, y sunt de clasă $C^1(D')$;
2. T este surjectivă;$\dfrac{\partial x}{\partial u}$
3. Jacobianul $J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ pe D'.

O funcţie cu aceste proprietăţi va fi numită *schimbare de variabile* sau de *coordonate*.

Teorema 1.15 *Dacă f este integrabilă pe D, atunci are loc*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D'} f(x(u,v),y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\, dudv. \tag{12}$$

Observaţia 1.16 *Scopul schimbării de variabile în integrala dublă este înlocuirea domeniului de integrare printr-un alt domeniu, scris, eventual, într-o formă mai simplă, ce permite calculul mai uşor al integralei.*

1.3.1 Schimbări de variabilă frecvent utilizate

1. Coordonate polare

Una dintre cele mai utilizate schimbări de variabile este trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare, şi se foloseşte în cazul în care domeniul D este un disc circular, un sector circular, o coroană circulară, etc. În cazul discului de rază r, transformarea de coordonate este dată prin

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}, (\rho,\theta) \in D', \text{ unde } D' = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \rho \le r,\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}.$$

Jacobianul transformării este: $J(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \rho.$

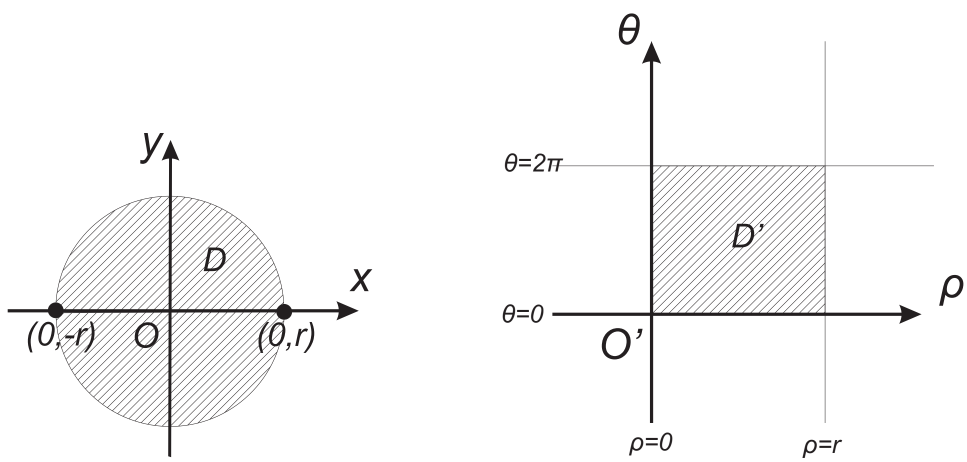


Figura 3: Schimbarea de coordonate polare

2. Coordonate polare generalizate

Dacă domeniul D este un disc eliptic, un sector eliptic, o coroană eliptică, etc. trecem la coordonate polare generalizate. În cazul discului eliptic definit prin

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\},$$

vom avea transformarea

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}, (\rho,\theta) \in D', \text{ unde } D' = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$

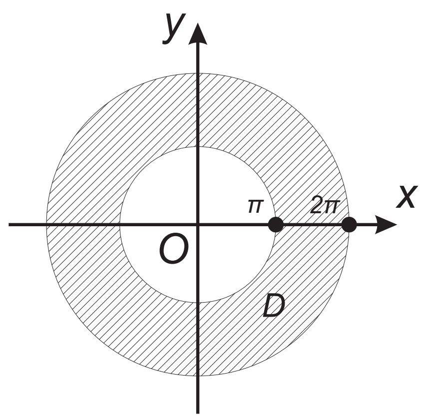
În acest caz jacobianul transformării este $J(\rho,\theta) = ab\rho$.

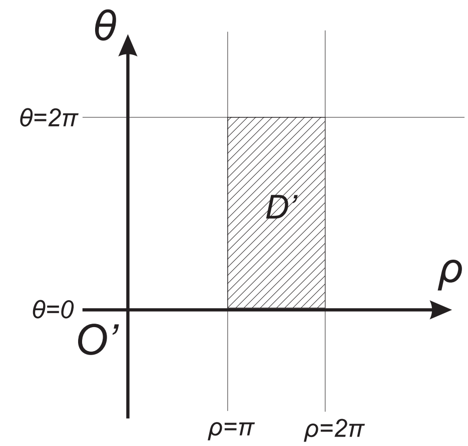
1.3.2 Exemple

Exercițiul 1.17 *Calculați următoarele integrale duble, pe domeniile plane specificate:*

1. $I = \iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\right\}$.

Soluție.





Trecem la coordonate polare. Vom avea

$$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\theta \\ y = \rho\cdot\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \rho \in [\pi, 2\pi], \\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{array}$$

Jacobianul este

$$J(\rho,\theta) = \rho,$$

deci

$$I = \iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{\sin\rho}{\rho}\cdot\rho\cdot d\rho d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot\left(\int_\pi^{2\pi}\sin\rho\cdot d\rho\right) = -4\pi.$$

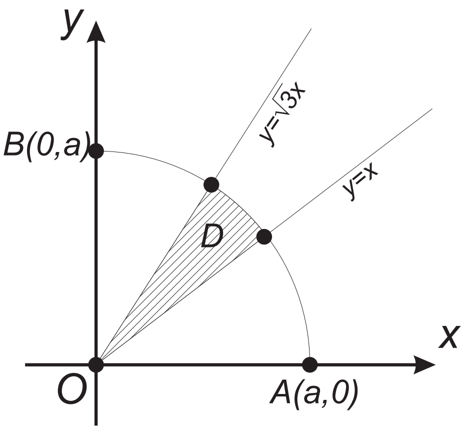
2. $I = \iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\cdot dxdy$, unde: $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$.

Soluție. Domeniul D este discul eliptic de semiaxe $a, b > 0$. Trecem la coordonate polare generalizate. Vom avea

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dxdy = \iint\limits_{D'} \sqrt{1-\rho^2}ab\rho d\rho d\theta \\ &= ab\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\cdot\left(\int_0^1 \rho\cdot\sqrt{1-\rho^2}d\rho\right) = 2\pi ab\cdot\int_0^1 \left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\rho d\rho \\ &= -\frac{2\pi ab}{3}\cdot\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\pi ab}{3}. \end{aligned}$$

3. $I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy$, unde D este domeniul plan mărginit de curbele de ecuaţii: $x^2 + y^2 = a^2; y = x; y = \sqrt{3}x$, $a > 0, x \geq 0$.

Soluţie. Domeniul de integrare este sectorul circular din figura de mai jos.

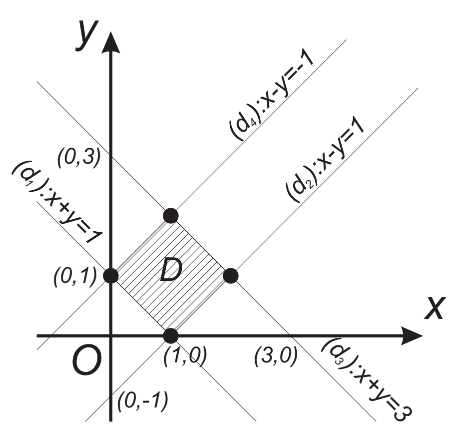


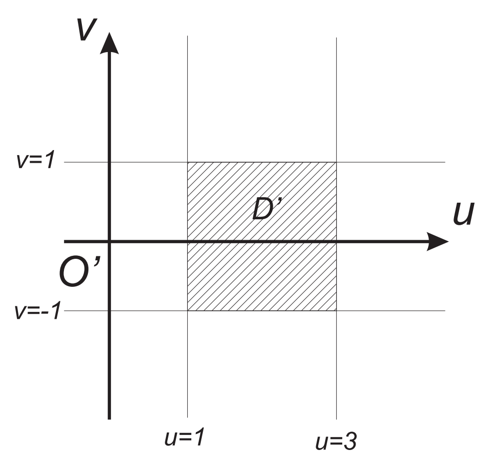
Trecem la coordonate polare. Domeniul D se transformă în domeniul D' al noilor variabile, unde $\rho \in [0, a]$ şi $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ (dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate). Obţinem:

$$I = \iint_{D'} \sqrt{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta = \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^a \rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho \right) = \frac{\pi a^3}{36}.$$

4. $I = \iint_D (x + y)^3 \cdot (x - y)^2 \cdot dxdy$, unde D este domeniul plan mărginit de dreptele (d_1) : $x + y = 1$, $(d_2) : x - y = 1$, $(d_3) : x + y = 3$ şi $(d_4) : x - y = -1$.

Soluţie.





Schimbăm variabilele prin:

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \cdot (u + v) \\ y = \frac{1}{2} (u - v) \end{cases} ; u \in [1, 3], v \in [-1, 1].$$

Atunci jacobianul va fi

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

iar integrala devine

$$I = \iint_{D'} u^3 \cdot v^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot dudv = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_1^3 u^3 \cdot du \right) \cdot \left(\int_{-1}^1 v^2 \cdot dv \right) = \frac{20}{3}.$$

Exemplul 1.18 *Să dăm un exemplu de calcul pentru o integrală impropie larg utilizată în teoria probabilităţilor numită şi* integrala lui Gauss*:*

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx.$$

Conform criteriului în α*, rezultă imediat că este convergentă. Să încercăm să-i determinăm valoarea.*
Ne vom ocupa de integrala improprie $\displaystyle\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-x^2-y^2} dxdy = I^2$. *Prin generalizare această integrală improprie este convergentă dacă există şi este finită limita* $\lim_{n\to\infty} I_n$*, unde*

$$I_n := \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2} dxdy,$$

iar

$$D_n := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq n^2 \right\}.$$

Trecând la coordonate polare, obţinem

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^n \rho e^{-\rho^2} d\rho \frac{\pi}{2} \left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right) \Big|_0^n,$$

de unde $\lim_{n\to\infty} I_n = \dfrac{\pi}{4}$. *Aşadar,*

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2 Formula integrală Riemann-Green

Această formulă integrală ne dă legătura dintre integrala dublă pe un domeniu plan, închis şi mărginit, şi integrala curbilinie pe frontiera acestui domeniu, considerată o curbă închisă formată dintr-un număr finit de arce netede.

Teorema 2.1 *Fie* $D \subset \mathbb{R}^2$ *un domeniu mărginit de o curbă* γ*, de clasă* C^1 *(netedă) şi fie* $\overline{D} = D \cup \gamma$*, închiderea acestui domeniu. Fie, de asemenea,* P, Q *funcţii continue pe* $\overline{D}$*, împreună cu derivatele parţiale* $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$*. Presupunem că* D *este domeniu simplu în raport cu ambele axe. În ipotezele precedente are loc*

$$\oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{13}$$

Demonstraţie. Presupunem că D este domeniu simplu în raport cu axa $0x$. Integrala dublă $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ poate fi calculată pe domeniul simplu

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

şi avem

$$\begin{aligned}
&\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \\
&= \int_a^b P(x,y)\Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx = \int_a^b \left(P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\right) dx \\
&= \int_a^b P(x,y)|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \int_a^b \left(P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x))\right) dx \\
&= \int_{\overset{\frown}{QP}} P(x,y)dx - \int_{\overset{\frown}{MN}} P(x,y)dx \\
&= -\int_{\overset{\frown}{PQ}} P(x,y)dx - \int_{\overset{\frown}{MN}} P(x,y)dx \\
&= -\int_{\overset{\frown}{PQ}} P(x,y)dx - \int_{\overset{\frown}{MN}} P(x,y)dx - \int_{\overset{\frown}{NP}} P(x,y)dx - \int_{\overset{\frown}{QM}} P(x,y)dx \\
&= -\int_\gamma P(x,y)dx.
\end{aligned}$$

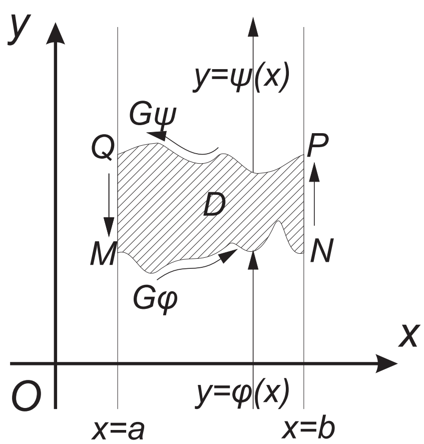


Figura 4: Domeniul D mărginit de curba $MNPQ$

Am obţinut astfel

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_\gamma P(x,y)dx. \tag{14}$$

Analog se arată că

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_\gamma Q(x,y)dx. \tag{15}$$

Din (14) (15) rezultă prin adunare formula lui Green. $\square$

Observaţia 2.2 *Formula rămâne valabilă dacă domeniul D se descompune într-un număr finit de domenii simple, sau dacă γ este netedă pe porţiuni.*

Putem demonstra acum o teoremă ce are drept consecinţă independenţa de drum a integralei curbilinii de speţa a doua.

Teorema 2.3 *Fie D un domeniu simplu conex şi P, Q funcţii continue pe D împreună cu derivatele parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$. Presupunem că D este domeniu simplu, şi fie γ o curbă netedă închisă inclusă în D. Următoarele următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) $\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$

(i) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \forall (x,y) \in D.$

Demonstraţie. $(ii) \Rightarrow (i)$ Dacă aplicăm formula lui Green, relativ la domeniul D' mărginit de γ, obţinem

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Reciproc, presupunem că deşi are loc (i), există un punct $P_0(x_0, y_0)$ astfel ca în acesta $\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$. Din continuitatea derivatelor se poate presupune că există un domeniu D'' şi $\delta > 0$ astfel ca

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > \delta > 0.$$

Aplicăm formula lui Green, relativ la domeniul D'', mărginit de γ'', şi obţinem

$$0 = \int_{\gamma''} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D''} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy >$$

$$> \iint_{D''} \delta dxdy > 0.$$

Din această contradicţie rezultă valabilitatea afirmaţiei $(ii) \Rightarrow (i)$. □

2.1 Exemple

Exerciţiul 2.4 *Utilizând formula integrală Riemann-Green, calculaţi următoarele integrale curbilinii:*

1. $I = \oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2} \cdot dx + y \cdot \left[xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}) \right] dy$, unde (C) este frontiera dreptunghiului $D = [1,4] \times [0,2]$, parcursă în sens trigonometric.

Soluţie. Avem

$$P(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = xy^2 + y \cdot \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2} \right).$$

Atunci

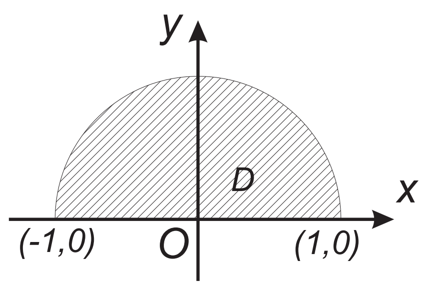
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2.$$

Aplicând Formula Riemann-Green, obţinem

$$I \overset{R-G}{=} \iint_D y^2 dxdy = \int_1^4 dx \int_0^2 y^2 dy = 8.$$

2. $I = \oint\limits_C y^2 \cdot dx + x^2 dy$, unde $C : x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$.

Soluţie. Domeniul D este determinat de semidiscul de rază 1 din semiplanul superior.

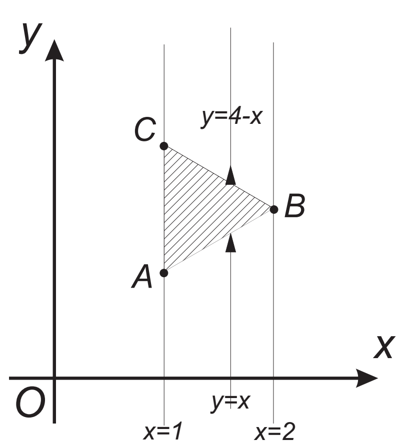


Vom avea

$$I \overset{R-G}{=} 2 \cdot \iint_D (x - y)\, dxdy = 2 \cdot \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x - y)\, dy = 2 \cdot \int_{-1}^1 \left(x\sqrt{1 - x^2} - \frac{1 - x^2}{2} \right) dx = \frac{-4}{3}.$$

3. $I = \oint\limits_C 2\left(x^2 + y^2\right) dx + (x + y)^2 dy$, unde C este conturul triunghiului (ABC), cu $A\,(1, 1)\,; B\,(2, 2)\,; C\,(1, 3)$, parcurs în sens trigonometric.

Soluţie. A se observa figura următoare.



Obţinem

$$I \overset{R-G}{=} 2 \cdot \iint_D (x - y)\, dxdy,$$

unde ecuaţiile dreptelor ce mărginesc domeniul sunt $(AB) : y = x$, $(BC) : y = 4 - x$, $(CA) : x = 1$.
Aşadar,

$$I = 2 \cdot \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (x - y)\, dxdy = -4\int_1^2 (x - 2)^2 \cdot dx = -\frac{4}{3}.$$