Curs 5

Ecuaţii diferenţiale

Teoria ecuaţiilor şi a sistemelor diferenţiale reprezintă unul din domeniile fundamentale ale matematicii cu largi aplicaţii în tehnică. De exemplu în mecanică, în studiul circuitelor electrice, al oscilaţiilor şi în teoria comenzii automate.

Definiţia 5.0.1 *Se numeşte* ***ecuaţie diferenţială*** *o relaţie de dependenţă funcţională între variabilele independente, funcţia necunoscută şi derivatele sale. Dacă funcţia necunoscută depinde de o singură variabilă independentă, dependenţă funcţională se numeşte* ***ecuaţie diferenţială ordinară****, iar dacă funcţia necunoscută depinde de mai multe variabile independente, dependenţă funcţională se numeşte* ***ecuaţie cu derivate parţiale.*** *Ordinul maxim de derivare al funcţiei necunoscute care este efectiv implicat în ecuaţie poartă denumirea de* ***ordinul*** *ecuaţiei diferenţiale.*

Exemplul 5.0.2 Ecuaţia $x''(t)+x(t)=\sin t$ cu funcţia necunoscută x de variabilă independentă reală t este o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul al doilea, iar ecuaţia $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$ cu funcţia necunoscută $u=u(x,y)$, depinzând de variabilele reale independente x şi y, este o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi.

5.1 Ecuaţii diferenţiale rezolvabile prin cuadraturi

O **ecuaţie diferenţială de ordinul întâi** este o relaţie de dependenţă funcţională de forma:

$$F(t,x,x')=0 \tag{5.1}$$

între variabila independentă t, funcţia necunoscută $x=x(t)$ şi derivata ei $x'=x'(t)$, iar F este o funcţie definită pe o submulţime $\mathrm{dom}(F)\subset\mathbb{R}^3$ cu valori în $\mathbb{R}$, neconstantă în raport cu ultima variabilă.

O **ecuaţie diferenţială ordinară de ordin** n este de o relaţie funcţională de forma:

$$F(t,x,x',\ldots,x^{(n)})=0 \tag{5.2}$$

între variabila independentă t, funcţia necunoscută $x=x(t)$ şi derivatele ei $x',\ldots,x^{(n)}$ iar F este o funcţie definită pe o submulţime $\mathrm{dom}(F)\subset\mathbb{R}^{n+2}$ cu valori în $\mathbb{R}$, neconstantă în raport cu ultima variabilă.

În anumite condiţii de regularitate asupra funcţiei F (cerute de aplicabilitatea teoremei funcţiilor definite implicit), ecuaţia (5.2) poate fi scrisă sub forma:

$$x^{(n)}=f(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)}) \tag{5.3}$$

numită **forma normală a ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordin** n.

Forma **normală a ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordin întâi** este

$$x' = f(t, x). \tag{5.4}$$

Definiţia 5.1.1 *Prin **soluţie** a ecuaţiei diferenţiale (5.2) înţelegem orice funcţie* $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Int}(\mathbb{I}) \neq \emptyset$, $x = x(t)$, *de clasă* $\mathcal{C}^n(\mathbb{I},\mathbb{R})$ *care satisface condiţiile* $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in \mathrm{dom}(F)$ *şi* $F(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Definiţia 5.1.2 *Prin **soluţie** a ecuaţiei diferenţiale (5.1) înţelegem orice funcţie* $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $Int(\mathbb{I}) \neq \emptyset$, $x = x(t)$, *de clasă* $\mathcal{C}^1(\mathbb{I},\mathbb{R})$, *care satisface* $(t, x(t), x'(t)) \in \mathrm{dom}(F)$ *şi îndeplinind condiţia* $F(t, x(t), x'(t)) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{I}$.

Principala problemă pe care o vom aborda va fi aşa numita **problemă a lui Cauchy** sau problema cu Condiţie (valoare) iniţială referitoare la (5.4).

Mai precis, dat $(t_0, x_0) \in \mathrm{dom}(f)$, **problema Cauchy** pentru ecuaţia (5.4) cu datele (t_0, x_0) constă în determinarea unei soluţii a ecuaţiei (5.4) $x : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ cu $t_0 \in \mathbb{I}$ şi $x(t_0) = x_0$.

Vom prezenta mai multe tipuri de ecuaţii diferenţiale ale căror soluţii pot fi determinate prin operaţii de integrare a unor funcţii cunoscute. Aceste ecuaţii poartă denumirea de **ecuaţii rezolvabile prin cuadraturi**.

Prin **cuadratură** înţelegem metoda care constă în reducerea rezolvării unei probleme de analiză matematică la calculul unei integrale definite sau nedefinite.

5.2 Ecuaţii diferenţiale de ordin întâi

5.2.1 Ecuaţii diferenţiale de ordin întâi cu variabile separabile

<u>Foma generală</u> a unei **ecuaţii diferenţiale de ordin întâi cu variabile separabile** este

$$x'(t) = f(t)g(x(t)) \tag{5.5}$$

unde $\mathbb{I}, \mathbb{J} \subset \mathbb{R}$; $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{J} \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue cu $g(y) \neq 0, \forall y \in \mathbb{J}$, $x : \mathbb{I} \to \mathbb{J}$, x derivabilă cu derivata continuă.

<u>Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale de ordin întâi cu variabile separabile</u>**:**
Fie $x = x(t), x : (a, b) \to (c, d)$ o soluţie a ecuaţiei (5.5). Se observă că ecuaţia (5.5) poate fi rescrisă sub forma

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t), \forall t \in (a, b)\,.$$

Integrând această egalitate membru cu membru rezultă

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt, \forall t \in (a, b)\,.$$

Se obţine $G(x(t)) = \displaystyle\int f(t)dt + C$ unde G este definită prin relaţia $G(u) = \displaystyle\int \frac{du}{g(u)}$. Se observă că g nu se anulează pe (c, d) şi este continuă, deci păstrează semn constant pe (c, d). Putem presupune că $g(y) > 0, \forall y \in (c, d)$, schimbând eventual semnul funcţiei f. Atunci G este bine definită şi strict crescătoare pe (c, d), deci inversabilă. Rezultă

$$x(t, C) = G^{-1}\left(\int f(t)dt + C\right) \tag{5.6}$$

Exerciţiul 1 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'(t) = \frac{t^2x^2(t)}{1+t^2}, x(t) \neq 0.$$

Soluţie. Scriem ecuaţia sub forma

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2x^2}{1+t^2} \Rightarrow f(t) = \frac{t^2}{1+t^2}, g(x) = x^2.$$

Rezolvăm ecuaţia pentru $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Obţinem

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{t^2}{1+t^2}dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{t^2}{1+t^2}dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t - \operatorname{arctg} t + C$$
$$\Rightarrow x(t, C) = \frac{1}{\operatorname{arctg} t - t - C}.$$

Exerciţiul 2 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'(t)\cos t \ln x(t) - x(t) = 0, t \in (0, \frac{\pi}{2}), x > 0, x \neq 1.$$

Soluţie. Scriem ecuaţia sub forma
$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{\cos t \ln x} \Rightarrow f(t) = \dfrac{1}{\cos t}, g(x) = \dfrac{x}{\ln x}.$
Pe $(0, \frac{\pi}{2})$, f este continuă, iar pentru $x > 1$, g este continuă şi strict pozitivă, iar pentru $x \in (0, 1)$, g este continuă şi strict negativă. Obţinem

$$\frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{\cos t}dt \Rightarrow \int \frac{\ln x(t)}{x(t)}dx = \int \frac{1}{\cos t}dt$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln^2|x(t)| = \ln \operatorname{tg}\frac{2t+\pi}{4} + \ln C \Rightarrow x(t, C) = e^{\sqrt{2\ln C \operatorname{tg}\frac{2t+\pi}{4}}}, C \in \mathbb{R}. \blacktriangle$$

Exerciţiul 3 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'(t) = tx^2(t) + 2tx(t).$$

Soluţie. Scriem ecuaţia sub forma

$$\frac{dx}{dt} = t\left(x^2 + 2x\right)$$

Avem $f(t) = t, g(x) = x^2 + 2x$. Observăm că $x(t) = 0$ şi $x(t) = 2$ sunt soluţii ale ecuaţiei (numite soluţii singulare). Pe orice interval $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{J} \subset (-\infty, 0)$ sau $\mathbb{J} \subset (2, \infty)$ sau $\mathbb{J} \subset (0, 2)$ avem
$\dfrac{1}{x^2+2x}dx = tdt \Rightarrow \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2}\right)dx = tdt \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| = 2t^2 + \ln C \Rightarrow \left|\dfrac{x}{x+2}\right| = Ce^{2t^2} \Rightarrow$
$x(t, C) = 2C\frac{e^{2t^2}}{1-Ce^{2t^2}}, x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ şi $x(t, C) = 2C\frac{e^{2t^2}}{-1-Ce^{2t^2}}$, $x \in (0, 2)$.$\blacktriangle$

5.2.2 Ecuaţii omogene şi reductibile la omogene

Definiţia 5.2.1 *Funcţia* $f = f(x, y)$ *se numeşte* ***omogenă de grad*** $\alpha \in \mathbb{R}$ *dacă*

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x, y). \tag{5.7}$$

Observaţia 5.2.2 *a) Dacă* $\alpha = 0$, *funcţia* f *din relaţia (5.7) se numeşte omogenă de grad zero. b) Dacă* $P(x, y)$ *şi* $Q(x, y)$ *sunt omogene de acelaşi grad, atunci* $f(x, y) = \dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ *este o funcţie omogenă de grad zero. c) Dacă* f *este o funcţie omogenă de grad zero, atunci* $f(x, y) = f(x, x\frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x}) = f(\frac{x}{y}, 1)$.

Forma generală a unei **ecuaţii diferenţiale de ordin întâi omogenă** este

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{5.8}$$

unde f este o funcţie continuă şi omogenă de grad zero.

Observaţia 5.2.3 *Ţinând sema de Observaţia 5.2.2 c), ecuaţia (5.8) poate fi scrisă sub forma*

$$x'(t) = g\left(\frac{x(t)}{t}\right), \tag{5.9}$$

unde $g\left(\dfrac{x(t)}{t}\right) = f\left(1, \dfrac{x(t)}{t}\right)$, $g : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă şi* $g(y) \neq y, \forall y \in \mathbb{R}$.

Rezolvarea ecuaţiei diferenţiale de ordin întâi omogenă se face făcând schimbarea de funcţie

$$x(t) = tu(t) \tag{5.10}$$

şi se ajunge la o ecuaţie cu variabile separabile. Pentru aceasta derivăm relaţia (5.10), $x'(t) = u(t) + tu'(t)$, înlocuim în (5.9) şi obţinem: $u(t) + tu'(t) = g(u(t)) \Leftrightarrow$ $u'(t) = \dfrac{1}{t}\left[g(u(t)) - u(t)\right]$ care este o ecuaţie cu variabile separabile.■

În 1693 Gottfried Wilhelm von Leibniz a utilizat pentru prima dată substituţia (5.10) pentru rezolvarea ecuaţiilor omogene.

Exerciţiul 4 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'(t) = \frac{x(t)}{t} + \operatorname{tg}\frac{x(t)}{t}, t \neq 0, x(t) \neq k\frac{\pi}{2}t, k \in \mathbb{N}.$$

Soluţie. Observăm că $x(t) = 0$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale.
Avem $g\left(\dfrac{x(t)}{t}\right) = \dfrac{x(t)}{t} + \operatorname{tg}\dfrac{x(t)}{t}$. Facem substituţia $x(t) = tu(t)$ şi obţinem

$$u(t) + tu'(t) = u(t) + \operatorname{tg} u(t) \Leftrightarrow u'(t) = \frac{1}{t}\operatorname{tg} u(t) \Leftrightarrow \frac{u'(t)}{\operatorname{tg} u(t)} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow$$
$$\int \frac{u'(t)}{\operatorname{tg} u(t)} dt = \int \frac{1}{t} dt \Leftrightarrow \ln|\sin u(t)| = \ln t + \ln C \Leftrightarrow \sin u(t) = Ct \Leftrightarrow \sin\frac{x(t)}{t} = Ct \Leftrightarrow$$
$$\frac{x(t)}{t} = \arcsin Ct, t \in \left[-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}\right] \Rightarrow x(t, C) = t \arcsin Ct, t \in \left[-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}\right].▲$$

Remarcăm că ecuaţia diferenţială de ordin întâi de forma

$$x'(t) = f\left(\frac{a_1 x(t) + b_1 t + c_1}{a_2 x(t) + b_2 t + c_2}\right) \tag{5.11}$$

unde $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$; $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0$, $i = 1, 2$, **poate fi redusă la o ecuaţie cu variabile separabile.**

Rezolvarea ecuaţiei (5.11) se face în funcţie de compatibilitatea sistemului

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 t + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 t + c_2 = 0 \end{cases}. \tag{5.12}$$

Distingem trei cazuri:

CAZUL I. Dacă sistemul (5.12) este compatibil determinat, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, cu soluţia (x_0, t_0) atunci prin schimbarea de variabilă şi de funcţie $\begin{cases} x = y + x_0 \\ t = s + t_0 \end{cases}$, ecuaţia (5.11) poate fi adusă la forma ecuaţiei omogene

$$y'(s) = f\left(\frac{a_1 \frac{y(s)}{s} + b_1}{a_2 \frac{y(s)}{s} + b_2} \right).$$

CAZUL II. Dacă sistemul (5.12) este compatibil nedeterminat $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ şi $\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1$, atunci există $\lambda \neq 0$ astfel încât $(a_1, b_1, c_1) = \lambda (a_2, b_2, c_2)$ şi ecuaţia (5.11) se reduce la $x'(t) = f(\lambda)$.

CAZUL III. Dacă sistemul (5.12) este un sistem incompatibil $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ şi $\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$ atunci $(a_1, b_1) = \lambda (a_2, b_2)$ şi prin schimbarea de funcţie $y(t) = a_1 x(t) + b_1 t$ se obţine ecuaţia cu variabile separabile

$$\frac{y'(t) - b_1}{a_1} = f\left(\frac{y(t) + c_1}{\lambda y(t) + c_2} \right). \blacklozenge$$

Exerciţiul 5 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei $x'(t) = 2\left(\frac{x(t) + 1}{t + x(t) - 2} \right)^2$, $t + x - 2 \neq 0$.

Soluţie. Observăm că $x(t) = -1$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale date. Considerăm sistemul algebric

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ t + x - 2 = 0 \end{cases}. \tag{5.13}$$

Deoarece $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ sistemul algebric (5.13) are soluţie unică, $t_0 = 3, x_0 = -1$. Făcând schimbarea de variabile şi de funcţie $\begin{cases} t = s + 3 \\ x = y - 1 \end{cases}$ se obţine ecuaţia diferenţială $y'(s) = 2\left(\frac{y(s)}{s + y(s)} \right)^2$. Ecuaţia se mai poate scrie sub forma $y'(s) = 2\left(\frac{\frac{y(s)}{s}}{1 + \frac{y(s)}{s}} \right)^2$ care este o ecuaţie omogenă. Efectuăm schimbarea de funcţie $y(s) = su(s)$ şi obţinem ecuaţia

$$u(s) + su'(s) = 2\left(\frac{u(s)}{1 + u(s)} \right)^2 \Leftrightarrow su'(s) = su'(s) = \frac{-u(s) - u^3(s)}{(1 + u(s))^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(1 + u(s))^2}{u(s) + u^3(s)} u'(s) = \frac{1}{s} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{u(s)} + \frac{2}{u^2(s) + 1} \right) u'(s) = \frac{1}{s} \Leftrightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{u(s)}+\frac{2}{u^2(s)+1}\right)u'(s)ds=\int\frac{1}{s}ds \Leftrightarrow \ln u(s)+2\operatorname{arctg} u(s)=\ln s+\ln C \Leftrightarrow$$

$$\frac{u(s)}{s}=Ce^{-2\operatorname{arctg} u(s)}. \text{ Dar } u(s)=\frac{y(s)}{s}=\frac{x(t)+1}{t-3} \Rightarrow \frac{x(t)+1}{(t-3)^2}=Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{x(t)+1}{t-3}}.\blacktriangle$$

Exercițiul 6 Să se determine soluția generală a ecuației $x'(t)=\dfrac{t-x(t)+1}{t-x(t)+2}, t-x(t)+2\neq 0$.

Soluție. Considerăm sistemul algebric $\begin{cases} t-x+1=0 \\ t-x+2=0 \end{cases}$. Deoarece $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=0$ și rang $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=2$ sistemul algebric (5.13) este incompatibil. Prin schimbarea de funcție $y(t)=-x(t)+t$ se obține ecuația cu variabile separabile

$$\frac{-y'(t)+1}{1}=\frac{y(t)+1}{y(t)+2} \Leftrightarrow y'(t)=\frac{1}{y(t)+2} \Leftrightarrow (y(t)+2)y'(t)=1 \Leftrightarrow$$

$$\int(y(t)+2)y'(t)dt=\int 1dt \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2(t)+2y(t)=t+C \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(-x(t)+t)^2+2(-x(t)+t)=t+C.\blacktriangle$$

5.2.3 Ecuații cu diferențială totală exactă

Forma generală. Fie $\mathcal{D}$ o mulțime nevidă și deschisă din $\mathbb{R}^2$ și P, Q :$\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ două funcții de clasă $\mathcal{C}^1$ pe $\mathcal{D}$, cu $Q(t,x)\neq 0$ pe $\mathcal{D}$. O ecuație de forma

$$P(t,x(t))dt+Q(t,x(t))dx(t)=0. \tag{5.14}$$

se numește **ecuație cu diferențială exactă** dacă membrul întâi este diferențiala unei funcții F, adică stisface condiția

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t,x)=\frac{\partial P}{\partial x}(t,x), (t,x)\in\mathcal{D}. \tag{5.15}$$

Rezolvarea ecuației cu diferențială exactă.

Dacă (5.14) este o ecuație cu diferențială exactă, atunci x este soluție a ecuației dacă și numai dacă $P(t,x(t))dt+Q(t,x(t))dx(t)=0$, $\forall(t,x)\in\mathcal{D}$. Membrul întâi a egalității este diferențiala unei funcții F, iar ecuația este echivalentă cu $dF(t,x(t))=0, \forall(t,x)\in\mathcal{D}$. Rezultă că soluția generală a ecuației (5.14) este dată de

$$F(t,x(t))=C.$$

Deoarece $dF(t,x(t))=P(t,x(t))dt+Q(t,x(t))dx(t)$ avem $P(t,x)=\dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x)$ și $Q(t,x)=\dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x)$. De aici rezultă că $\dfrac{\partial Q}{\partial t}(t,x)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial t\partial x}(t,x)=\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}(t,x)=\dfrac{\partial P}{\partial x}(t,x),(t,x)$, care reprezintă relația (5.15).

Determinarea lui F se face astfel: considerăm sistemul de ecuații cu derivate parțiale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t}(t,x)=P(t,x) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(t,x)=Q(t,x) \end{cases}. \tag{5.16}$$

Integrăm ecuația care se integrează mai ușor, de exemplu, presupunem că integrăm prima ecuație și obținem $F(t,x)=\displaystyle\int P(t,x)dt+h(x)$, derivăm funcția F astfel obținută în raport cu x şi o egalăm cu expresia ei din a doua ecuaţie din relaţia (5.16). De aici obţinem funcţia h', o integăm şi găsim funcţia h.

Exerciţiul 7 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$$x'(t) = -\frac{2tx^3(t) + 2}{3t^2x^2(t) + 8e^{4x(t)}}.$$

Soluţie. *Scriem* $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ şi obţinem
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2tx^3 + 2}{3t^2x^2 + 8e^{4x}} \Leftrightarrow (2tx^3 + 2)\,dt + (3t^2x^2 + 8e^{4x})\,dx = 0$$
$P(t, x) = 2tx^3 + 2$, $Q(t, x) = 3t^2x^2 + 8e^{4x}$, $\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = 6tx^2$, $\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) = 6tx^2$,

Deoarece relaţia (5.15) este satisfăcută rezultă că este o ecuaţie cu diferenţială exactă. Rezultă că există o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$, F astfel încât $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 2tx^3 + 2$ şi $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 3t^2x^2+8e^{4x}$. Integrăm prima relaţie în raport cu t, $F(t, x) = \int(2tx^3+2)dt = 2t+t^2x^3+h(x)$. Calcuăm derivata în raport cu x, $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = 3t^2x^2+h'(x)$. Egalăm expresiile derivatelor lui f în raport cu x şi obţinem $h'(x) = 8e^{4x} \Rightarrow h(x) = 2e^{4x}+C_1 \Rightarrow F(t, x) = 2t+t^2x^3+2e^{4x}+C_1 \Rightarrow F(t, x(t)) = C_2 \Rightarrow 2t + t^2x^3 + 2e^{4x} = C$, $C = C_2 - C_1$.▲

Exerciţiul 8 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei
$$(e^t + x(t) + \sin x(t))dt + (e^{x(t)} + t + t\cos x(t))dx(t) = 0, e^x + t + t\cos x \neq 0.$$

Soluţie.
$P(t, x) = e^t + x + \sin x$, $Q(t, x) = e^x + t + t\cos x$,
$\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = 1 + \cos x$, $\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x) = 1 + \cos x$.

Deoarece relaţia (5.15) este satisfăcută rezultă că este o ecuaţie cu diferenţială exactă. Rezultă că există o funcţie de clasă $\mathcal{C}^2$, F astfel încât $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = (e^t+x+\sin x)$ şi $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = e^x + t + t\cos x$. Integrăm prima relaţie în raport cu t, $F(t, x) = \int(e^t + x + \sin x)dt = (e^t + xt + t\sin x) + h(x)$. Calcuăm derivata în raport cu t, $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = (t + t\cos x) + h'(x)$. Egalăm expresiile derivatelor lui f în raport cu x şi obţinem $h'(x) = e^x \Rightarrow h(x) = e^x + C_1 \Rightarrow F(t, x) = e^t + xt + t\sin x + e^x + C_1 \Rightarrow F(t, x(t)) = C_2 \Rightarrow e^t + x(t)t + t\sin x(t) + e^{x(t)} = C$, $C = C_2 - C_1$.▲

5.2.4 Ecuaţia diferenţială de ordin întâi liniară.

Isaac Newton a rezolvat în 1687 pentru prima dată o ecuaţie diferenţială de ordin întâi liniară.

Forma generală. O **ecuaţie diferenţială de ordin întâi liniară** este o ecuaţie de forma
$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \tag{5.17}$$
unde $a, b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe $\mathbb{I}$. Dacă $b \equiv 0$ pe $\mathbb{I}$ ecuaţia se numeşte liniară şi omogenă, iar în caz contrar liniară şi neomogenă.

Teorema 5.2.4 *Soluţia generală a ecuaţiei (5.17) în condiţiile $a, b : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe $\mathbb{I}$, este de forma:*

$$x(t, C) = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right) \tag{5.18}$$

Demonstraţie. Prezentăm două metode de rezolvare a acestei ecuaţii diferenţiale.

Prima metodă este **metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange**. Soluţia generală a ecuaţiei (5.17) $x(t, C)$ se scrie ca sumă dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene, $x_o(t, C)$ şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene, $x_p(t)$, deci $x(t, C) = x_o(t, C) + x_p(t)$. Justificăm afirmaţia făcută. Dacă x_o este soluţia generală a ecuaţiei omogene, ea depinde de o constantă arbitrară C şi satisface ecuaţia $x_0'(t, C) = a(t)x_0(t, C), \forall x \in \mathbb{I}$. De asemenea x_p satisface ecuaţia $x_p'(t) = a(t)x_p(t) + b(t)$.

$x_0'(t, C) = a(t)x_0(t, C)$
$x_p'(t) = a(t)x_p(t) + b(t)$
Adunând aceste două ecuaţii rezultă
că $x_p'(t) + x_o'(t, C) = a(t)(x_p(t) + x_o(t, C)) + b(t)$.

Etapa I. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene. Fie ecuaţia omogenă $x'(t) = a(t)x(t)$ care este o ecuaţie cu variabile separabile. Soluţia ei este $x_o(t, C) = Ce^{\int a(t)dt}, C \in \mathbb{R}$.

Etapa II. Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma soluţiei ecuaţiei omogene, presupunând constanta ca funcţie necunoscută, $x(t) = u(t)e^{\int a(t)dt}$ unde u este o funcţie derivabilă. Funcţia necunoscută se determină impunând condiţia ca funcţia $x(t) = u(t)e^{\int a(t)dt}$ să verifice ecuaţia neomogenă. Rezultă că $u'(t) = e^{-\int a(t)dt}b(t) \Rightarrow u(t) = \displaystyle\int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt$ (nu am menţionat constanta deoarece căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene). Deci $x_p(t) = e^{\int a(t)dt}\displaystyle\int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt$.

$x(t, C) = e^{\int a(t)dt}\left(C + \displaystyle\int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right)$ este soluţia generală a ecuaţiei (5.17).

În 1775 Joseph Lagrange (1736-1813) introduce metoda variaţiei constantelor.

A doua metodă utilizează următorul artificiu: se înmulţeşte ecuaţia (5.17) cu $e^{-\int a(t)dt}$ şi obţinem:

$x'(t)e^{-\int a(t)dt} = a(t)x(t)e^{-\int a(t)dt} + b(t)e^{-\int a(t)dt} \Leftrightarrow$
$x'(t)e^{-\int a(t)dt} - a(t)x(t)e^{-\int a(t)dt} = b(t)e^{-\int a(t)dt} \Leftrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)e^{-\int a(t)dt}\right) = b(t)e^{-\int a(t)dt} \Leftrightarrow$$

$$x(t)e^{-\int a(t)dt} = \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt + C \Leftrightarrow x(t, C) = e^{\int a(t)dt}\left(C + \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right). \blacklozenge$$

Exerciţiul 9 Să se determine soluţia ecuaţiei

$$\begin{cases} tx'(t) + x(t) = 3t^2 \\ x(1) = 1 \end{cases}.$$

Soluţie. Metoda variaţiei constantelor. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene $tx'(t) + x(t) = 0 \Leftrightarrow x'(t) = -\dfrac{x(t)}{t}, x(t) \neq 0, t \neq 0$.

Este o ecuaţie cu variabile separabile. Rezolvăm ecuaţia

$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t} \Rightarrow \ln|x| = -\ln|t| + \ln|C| \Leftrightarrow x_0(t) = \frac{C}{t}.$

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma $x_p(t) = \frac{u(t)}{t}$. Impunem condiţia să verifice ecuaţia neomogenă.

$\frac{u'(t)}{t} - \frac{u(t)}{t^2} + \frac{u(t)}{t^2} = 3t \Rightarrow u'(t) = 3t^2 \Rightarrow u(t) = t^3.$

Rezultă că $x_p(t) = t^2$. Soluţia generală este $x(t, C) = x_0(t) + x_p(t) = \frac{C}{t} + t^2$.

$x(1) = C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = t^2.$

Utilizând a doua metodă, scriem ecuaţia diferenţială sub forma normală

$x'(t) = -\frac{x(t)}{t} + 3t.$

Înmulţim ecuaţia diferenţială cu $e^{\int \frac{1}{t} dt} = t$,

$tx'(t) = -x(t) + 3t^2 \Rightarrow tx'(t) + x(t) = 3t^2 \Rightarrow (tx(t))' = 3t^2 \Rightarrow tx(t) = t^3 + C$. Soluţia generală este $x(t, C) = \frac{t^3 + C}{t} = \frac{C}{t} + t^2$.

$x(1) = C + 1 = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = t^2. \blacktriangle$

Exerciţiul 10 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x'(t) + \frac{t}{1 - t^2} x(t) = t + \arcsin t, t \in (-1, 1).$$

Soluţie. Metoda variaţiei constantelor. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene

$x'(t) + \frac{t}{1 - t^2} x(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{x'(t)}{x(t)} = -\frac{t}{1 - t^2} \Leftrightarrow \int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = -\int \frac{t}{1 - t^2} dt \Leftrightarrow$

$\ln x(t) = \frac{1}{2} \ln(1 - t^2) + \ln C \Leftrightarrow x_0(t) = C\sqrt{1 - t^2}.$

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma $x_p(t) = u(t)\sqrt{1 - t^2}$. Impunem condiţia să verifice ecuaţia neomogenă.

$u'(t)\sqrt{1 - t^2} - u(t)\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{t}{1 - t^2} u(t)\sqrt{1 - t^2} = t + \arcsin t \Leftrightarrow$

$u'(t)\sqrt{1 - t^2} = t + \arcsin t \Leftrightarrow u'(t) = \frac{t + \arcsin t}{\sqrt{1 - t^2}} \Leftrightarrow \int u'(t) dt = \int \frac{t + \arcsin t}{\sqrt{1 - t^2}} dt \Leftrightarrow$

$u(t) = -\sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2} \arcsin^2 t.$

Rezultă că $x_p(t) = \left(-\sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2} \arcsin^2 t.\right) \sqrt{1 - t^2}$, iar soluţia generală este

$x(t, C) = x_0(t) + x_p(t) = C\sqrt{1 - t^2} - (1 - t^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1 - t^2} \arcsin^2 t.$

Utilizând a doua metodă, înmulţim ecuaţia diferenţială cu $e^{\int \frac{t}{1-t^2} dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ şi obţinem

$x'(t)\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{t}{1 - t^2} x(t)\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} = t\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \arcsin t \Leftrightarrow$

$\frac{d}{dt}\left(x(t)\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}\right) = t\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \arcsin t \Leftrightarrow$

$x(t)\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} = \int \left(t\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \arcsin t\right) dt \Leftrightarrow$

$x(t)\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} = -\sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2} \arcsin^2 t + C \Leftrightarrow$

$x(t, C) = C\sqrt{1 - t^2} - (1 - t^2) + \frac{1}{2}\sqrt{1 - t^2} \arcsin^2 t. \blacktriangle$