Curs 6

Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n

6.1 Forma generală

Definiţia 6.1.1 ***O ecuaţie diferenţială liniară de ordin*** *n este o ecuaţie de forma:*

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t) = f(t) \tag{6.1}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, f este o funcţie contiună de la un interval nevid deschis $\mathbb{I}$ în $\mathbb{R}$, iar $x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ este funcţia necunoscută.

Dacă în ecuaţia diferenţială (6.1) avem $f(t) = 0, \forall t \in \mathbb{I}$, ecuaţia se numeşte ***liniară omogenă*** *de ordin n. În caz contrar ecuaţia diferenţială (6.1) se numeşte* ***liniară neomogenă****.*

Problema Cauchy pentru ecuaţia diferenţială liniară de ordin n :
Să se determine funcţia $x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R})$, $\mathbb{I}$ un interval nevid deschis în $\mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = -a_1 x^{(n-1)}(t) - \cdots - a_{n-1}x'(t) - a_n x(t) + f(t) \\ x(t_0) = x_{00}, x'(t_0) = x_{10}, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1,0} \end{cases}, \tag{6.2}$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, f sunt funcţie contiună pe $\mathbb{I}$, $t_0, x_{i0} \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0, n-1}$.

6.2 Soluţia generală a ecuaţiei omogene

Considerăm aplicaţia:

$$\mathcal{L} : \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}) \tag{6.3}$$

definită de
$\mathcal{L}(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x, \forall x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}.$
Observăm că ecuaţia liniară omogenă de ordin n se poate scrie de forma

$$\mathcal{L}(x) = 0, x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}. \tag{6.4}$$

Propoziţia 6.2.1 *Funcţia (6.3) este o transformare liniară definită pe spaţiile liniare $(\mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$ şi respectiv $(\mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.*

Demonstraţie. Deoarece funcţia de derivare este o funcţie liniară, rezultă că
$\forall (\alpha, x_1, x_2) \in \mathbb{R}\times (\mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}))^2 : \mathcal{L}(\alpha x_1 + x_2) = (\alpha x_1 + x_2)^{(n)} + a_1(\alpha x_1 + x_2)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(\alpha x_1 + x_2)' + a_n(\alpha x_1 + x_2) = (\alpha x_1)^{(n)} + a_1(\alpha x_1)^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(\alpha x_1)' + a_n(\alpha x_1) + x_2^{(n)} + a_1 x_2^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x_2' + a_n x_2 = \alpha({x_1}^{(n)} + a_1 {x_1}^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x_1' + a_n x_1) + x_2^{(n)} + a_1 x_2^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x_2' + a_n x_2 = \alpha\mathcal{L}(x_1) + \mathcal{L}(x_2)$,
de unde rezultă liniaritatea lui $\mathcal{L}$.♦

Propoziţia 6.2.2 *Mulţimea soluţiilor ecuaţiei (6.4), $\mathbb{V} = \{x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}) : \mathcal{L}(x) = 0\}$ este un subspaţiu liniar al lui $(\mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$.*

Demonstraţie. Deoarece $\mathcal{L}$ este o funcţie liniară iar mulţimea soluţiilor ecuaţiei (6.4) este $\mathbb{V} = \ker(\mathcal{L})$ rezultă că $\mathbb{V}$ este un subspaţiu liniar al lui $(\mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), +, \cdot, \mathbb{R})$, conform teoremei 6.8 din cursul de algebră liniară, deci $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{R})$ este un spaţiu liniar.⧫

Teorema 6.2.3 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$.

Demonstraţie. Demonstrăm că există un izomorfism între spaţiile liniare $(\mathbb{V}, +, \cdot, \mathbb{R})$ şi $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$. Definim funcţia $T : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^n$,

$$T(x) = (x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)), \forall x \in \mathbb{V},$$

unde t_0 este un punct arbitrar, fixat în $\mathbb{I}$. Demonstrăm că T este o funcţie liniară: $\forall(\alpha, x_1, x_2) \in \mathbb{R}\times (\mathbb{V})^2$, avem:

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1 + x_2) &= \left((\alpha x_1 + x_2)(t_0), (\alpha x_1 + x_2)'(t_0), \ldots, (\alpha x_1 + x_2)^{(n-1)}(t_0)\right) \\ &= \alpha \left(x_1(t_0), {x_1}'(t_0), \ldots, {x_1}^{(n-1)}(t_0)\right) + \left(x_2(t_0), x_2'(t_0), \ldots, {x_2}^{(n-1)}(t_0)\right) = \alpha T(x_1) + T(x_2). \end{aligned}$$

Demonstrăm că funcţia liniară T este injectivă. Din $T(x) = \theta_{\mathbb{R}^n}$ rezultă că funcţia $x(t) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{I}$, verifică ecuaţia diferenţială (6.3) şi cum, conform teoremei de existenţă şi unicitate, această soluţie este unică, deci $\ker(T) = \{\theta_{\mathbb{V}}\}$, deci T este injectivă.

Demonstrăm surjectivitatea lui T. Pentru un $t_0 \in \mathbb{V}$ fixat avem $(x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(n-1)}(t_0)) \in \mathbb{R}^n$, conform Teoremei de existenţă şi unicitate a soluţiei ecuaţiilor diferenţiale problema
$$\begin{cases} \mathcal{L}(x) = 0 \\ x(t_0) = x_{00}, x'(t_0) = x_{10}, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1,0} \end{cases}$$
are soluţie unică, deci T este surjectivă, rezultă T este un izomorfism de spaţii liniare. Rezultă că $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$ şi deci $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$.⧫

Definiţia 6.2.4 *Funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ se numesc **liniar dependente** pe $\mathbb{I}$, dacă există $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $(c_1, \ldots, c_n) \neq \theta_{\mathbb{R}^n}$ astfel încât*

$$c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t) = \theta_{\mathbb{V}}, \forall t \in \mathbb{I}.$$

*În caz contrar funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ se numesc **liniar independente** pe $\mathbb{I}$.*

Exemplul 6.2.5 Funcţiile $(t^2, e^t, e^{-t}, \operatorname{sh} t)$ sunt liniar dependente deoarece
$0 \cdot t^2 + 1 \cdot e^t + (-1) \cdot e^{-t} + (-2) \cdot \operatorname{sh} t = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Exemplul 6.2.6 Funcţiile $(1, t, t^2)$ sunt liniar independente deoarece
$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot t + c_3 \cdot t^2 = 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Propoziţia 6.2.7 *Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt n soluţii liniar independente ale problemei (6.4), atunci soluţia generală a acestei probleme este de forma*

$$x(t, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t); c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}. \tag{6.5}$$

Demonstraţie. Deoarece $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{V} = n$, rezultă că orice mulţime formată din n soluţii liniar independente din $\mathbb{V}$ formează o bază în $\mathbb{V}$.⧫

Definiţia 6.2.8 *Dacă funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ sunt liniar independente, atunci ele poartă numele de* ***sistem fundamental*** *de soluţii ale ecuaţiei (6.4).*

Observaţia 6.2.9 *Determinarea soluţiei generale revine la determinarea unui sistem fundamental de soluţii.*

Definiţia 6.2.10 *Fie funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$. Se numeşte* ***wronskianul*** *acestor funcţii determinantul:*

$$W\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right](t) = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Teorema 6.2.11 ***(Condiţie necesară şi suficientă pentru dependenţa liniară a unor funcţii)*** *Funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ sunt liniar dependente dacă şi numai dacă wronskianul lor este zero, $W\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right](t) = 0, \forall t \in \mathbb{I}$.*

Demonstraţie. Presupunem că funcţiile $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ sunt liniar dependente$\Rightarrow$există $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $(c_1, \ldots, c_n) \neq \theta_{\mathbb{R}^n}$ astfel încât $c_1 x_1(t) + \ldots + c_n x_n(t) = \theta_{\mathbb{V}}, \forall t \in \mathbb{I}$. Derivăm de $n-1$ ori acesastă relaţie şi obţinem sistemul

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i(t) = 0 \\ \cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i^{(n-1)}(t) = 0 \end{cases}, \forall t \in \mathbb{I}.. \tag{6.6}$$

Acest sistemul în necunoscutele $(c_1, \ldots, c_n)$, are soluţii diferite de soluţia banală dacă şi numai dacă determinantul său, care este wronskianul funcţiilor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, este nul.♦

Exemplul 6.2.12 Funcţiile $x_1(t) = 1, x_2(t) = e^t, x_3(t) = e^{-t}$ verifică ecuaţia diferenţială $x'''(t) - x'(t) = 0$. Deoarece wronskianul lor este

$$W\left[x_1, x_2, x_3\right](t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^t & e^{-t} \\ 0 & e^t & -e^{-t} \\ 0 & e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 2e^t e^{-t} = 2 \neq 0,$$

funcţiile sunt liniar independente.

Teorema 6.2.13 ***(Teorema lui Liouville)*** *Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{V}$ atunci*

$$W\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right](t) = W\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right](t_0)\, e^{-\int\limits_{t_0}^{t} a_1 ds}, \forall t \in \mathbb{I}, \tag{6.7}$$

iar t_0 este un punct arbitrar, fixat din $\mathbb{I}$.

Demonstraţie. Ştim că derivata unui determinant de ordin n ale cărui elemente sunt funcţii reale de variabilă reală este o sumă de n determinanţi obţinuţi din determinantul iniţial derivând în fiecare din ei succesiv elementele fiecărei linii (sau coloane). Derivăm succesiv liniile în $W\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right](t)$ raport cu variabila independentă şi obţinem:

$$W'\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right](t) = \begin{vmatrix} x_1' & \cdots & x_n' \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1'' & \cdots & x_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$+\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Observăm că primii $n-1$ determinanţi din expresia lui $W'[t, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ au câte două linii egale, deci sunt nuli şi rezultă

$$W'[x_1, x_2, \ldots, x_n](t) = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x_1' & \cdots & x_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-2)} & \cdots & x_n^{(n-2)} \\ x_1^{(n)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{6.8}$$

Înlocuind elementele ultimei linii din membrul stâng al relaţiei (6.8) prin

$x_i^{(n)}(t) = -a_1 x_i^{(n-1)} - \cdots - a_{n-1}x_i' - a_n x_i, i = \overline{1, n}$

şi descompunând $W'[t, x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ca o sumă de n determinanţi, dintre care $n-1$ au câte două linii proporţionale, deci sunt egali cu zero obţinem:

$W'[x_1, x_2, \ldots, x_n](t) = -a_1(t) W[x_1, x_2, \ldots, x_n](t)$

care este o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile. Prin integrare obţinem

$$W[x_1, x_2, \ldots, x_n](t) = ce^{-\int_{t_0}^{t} a_1 ds},$$

unde t_0 este un punct arbitrar fixat din $\mathbb{I}$. Pentru $t = t_0$ obţinem $c = W[x_1, x_2, \ldots, x_n](t_0)$ şi obţinem astfel relaţia (6.7).♦

Propoziţia 6.2.14 *Oricare ar fi n funcţii din $\mathbb{V}$, wronskianul lor este sau identic nul sau diferit de zero în orice punct din $\mathbb{I}$.*

Demonstraţie. Dacă există un punct $t_0 \in \mathbb{I}$ pentru care $W[x_1, x_2, \ldots, x_n](t_0) = 0$ atunci, conform (6.7) rezultă $W[x_1, x_2, \ldots, x_n](t) = 0, \forall t \in \mathbb{I}$.♦

Exerciţiul 1 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0,$$

ştiind că admite ca soluţii particulare $x_1(t) = e^{2t}, x_2(t) = e^{3t}$.

Soluţie. Se verifică prin calcul direct că $x_1(t) = e^{2t}$ şi $x_2(t) = e^{3t}$ sunt soluţii ale ecuaţiei date. Verificăm dacă sunt liniar independnte.

$W[t, x_1, x_2] = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{vmatrix} = e^{5t} \neq 0.$

Deci pe orice interval închis din $\mathbb{R}$ soluţia generală este de forma

$x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.▲

Ne propunem *să determinăm efectiv soluţia generală* a unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordin n cu coeficienţi constanţi.

Reamintim că **ecuaţia diferenţială liniară omogenă de ordin n cu coeficienţi constanţi** poate fi scrisă sub forma

$$\mathcal{L}(x) = 0, x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \tag{6.9}$$

unde $\mathcal{L}(x) = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x$.

Pentru aceasta căutăm soluţii ale ecuaţiei (6.9) de forma $x(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Are loc relaţia

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} P(\lambda), t \in \mathbb{I}. \tag{6.10}$$

unde

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n. \tag{6.11}$$

Polinomul $P(\lambda)$ se numeşte **polinom caracteristic**, iar ecuaţia

$$P(\lambda) = 0 \tag{6.12}$$

se numeşte **ecuaţia caracteristică** ataşată ecuaţiei (6.9).

Teorema 6.2.15 *Funcţia $x(t) = e^{\lambda t}$ este soluţie a ecuaţiei (6.9) dacă şi numai dacă este soluţie a ecuaţiei caracteristice (6.12).*

Demonstraţie. Afirmaţia rezultă din relaţia (6.10).♦

Expresia soluţiilor particulare care formează sistemul fundamental de soluţii pentru ecuaţiile diferenţiale de ordin n cu coeficienţi constanţi se obţine în funcţie de natura rădăcinilor polinomului caracteristic. Deosebim situaţiile:

-polinomul caracteristic are rădăcini reale sau complexe distincte

-polinomul caracteristic are rădăcini reale multiple

-polinomul caracteristic are rădăcini complexe multiple.

Teorema 6.2.16 *Dacă polinomul $P(\lambda)$ are n rădăcini (reale sau complexe) distincte, $\lambda_1, \ldots,$ λ_n, atunci sistemul de funcţii $\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right)$ este un sistem fundamental de soluţii pentu ecuaţia (6.9).*

Demonstraţie. Deoarece dimensiunea subspaţiului soluţiilor ecuaţiei (6.9) este n, trebuie să demonstrăm că sistemul de funcţii $\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right)$ este liniar independent. Pentru aceasta arătăm că wronskianul este diferit de zero pentru orice $t \in \mathbb{I}$. Într-adevăr,

$$W\left[t, e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)t} \neq 0. ♦$$

Dacă polinomul caracteristic are n **rădăcini reale distincte** $\lambda_1, \ldots,$ λ_n atunci fiecărei rădăcini îi corespunde o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale,

$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \ldots, x_n(t) = e^{\lambda_n t}$

iar soluţia generală a ecuaţiei (6.9) se scrie de forma

$x(t, c_1, \ldots, c_n) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots c_n e^{\lambda_n t}$.

În cazul **rădăcinilor complexe şi distincte** remarcăm că dacă $x(t) = u(t) + iv(t)$ este o soluţie a ecuaţiei omogene $\mathcal{L}(x) = 0$, atunci $\mathcal{L}(u + iv) = \mathcal{L}(u) + i\mathcal{L}(v) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(u) = 0, \mathcal{L}(v) = 0$.

Dacă polinomul caracteristic are rădăcini complexe simple, de exemplu $\lambda = \alpha + i\beta$ atunci va avea şi ca rădăcină şi conjugatul ei, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ şi fiecărei perechi de rădăcini complex conjugate îi corespund soluţiile

$x_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$ şi $x_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$ care sunt liniar independente.

Cazul **rădăcinilor reale şi multiple**. Fie λ o rădăcină a polinomului caracteristic de ordin k. Corespunzător ei trebuie să avem k soluţii particulare liniar independente. Ele vor fi de forma

$x_1(t) = e^{\lambda t}, x_2(t) = te^{\lambda t}, \ldots, x_k(t) = t^{k-1}e^{\lambda t}$.

Cazul **rădăcinilor complexe şi multiple**. Dacă $\lambda = \alpha + i\beta$ este o rădăcină a polinomului caracteristic de ordin k atunci rădăcina conjugată $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ va fi tot de ordin k şi avem $2k$ soluţii particulare de forma

$x_1(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ şi $\widetilde{x}_1(t) = e^{\alpha t}\sin\beta t$,

$x_2(t) = te^{\alpha t}\cos\beta t$ şi $\widetilde{x}_2(t) = te^{\alpha t}\sin\beta t$

...

$x_k(t) = t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t$ şi $\widetilde{x}_k(t) = t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Soluţia generală va fi o combinaţie liniară a soluţiilor particulare corespunzătoare tipului de rădăcini ale polinomului caracteristic.

Exerciţiul 2 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$\begin{cases} x'''(t) + 3x''(t) - x'(t) - 3x(t) = 0, \\ x(0) = 0, x'(0) = 1, x''(0) = -1. \end{cases}$$

Soluţie. Căutăm soluţii ale ecuaţiei de forma $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Calculăm derivatele $x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, $x'''(t) = \lambda^3 e^{\lambda t}$ şi le înlocuim în ecuaţie.

Obţinem ecuaţia caracteristică $\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$.

Observăm că rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt reale şi distincte, rezultă că sistemul de soluţii particulare $x_1(t) = e^{-3t}$, $x_2(t) = e^t$, $x_3(t) = e^{-t}$ care este un sistem fundamental de soluţii. Soluţia generală

$x(t, c_1, c_2, c_3) = c_1e^{-3t} + c_2e^t + c_3e^{-t}$.

Determinăm soluţia unică a problemei Cauchy impunând condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 + c_3 \\ x'(0) = -3c_1 + c_2 - c_3 \\ x'(0) = 9c_1 + c_2 + c_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ -3c_1 + c_2 - c_3 = 1 \\ 9c_1 + c_2 + c_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{8} \\ c_2 = \frac{3}{8} \\ c_3 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$x(t) = -\frac{1}{8}e^{-3t} + \frac{3}{8}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$.▲

Exerciţiul 3 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x^{(IV)}(t) + 2x''(t) + x(t) = 0.$$

Soluţie. Polinomul caracteristic este: $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -i, \lambda_{3,4} = i$.

Observăm că rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt complexe şi multiple cu ordinul de multiplicitate 2.

Sistemul de soluţii particulare va fi

$x_1(t) = \sin t$ şi $\widetilde{x}_1(t) = \cos t$,

$x_2(t) = t\sin t$ şi $\widetilde{x}_1(t) = t\cos t$

Acesta este un sistem fundamental de soluţii. Rezultă soluţia generală $x(t, c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1\sin t + c_2\cos t + c_3t\sin t + c_4t\cos t$.▲

Exerciţiul 4 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x^{(V)}(t) - x^{(IV)}(t) - x'(t) + x(t) = 0.$$

Soluţie. Polinomul caracteristic este: $P(\lambda) = (\lambda^2+1)(\lambda+1)(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = -i, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -1, \lambda_{4,5} = 1$.

Observăm că rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt şi reale şi complexe, simple şi multiple.

Rădăcinile $\lambda_1 = -i, \lambda_2 = i$ sunt complexe conjugate simple şi lor le corespund soluţiile $x_1(t) = \sin t$ şi $x_2(t) = \cos t$.

Rădăcina $\lambda_3 = -1$ este rădăcină simplă şi ei iî corespunde soluţia $x_3(t) = e^{-t}$.

Rădăcina $\lambda_4 = \lambda_5 = 1$ este dublă şi ei îi corespund soluţiile $x_4(t) = e^t, x_5(t) = te^t$

Rezultă soluţia generală $x(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + c_3 e^{-t} + c_4 e^t + c_5 te^t$.▲

6.3 Soluţia generală a ecuaţiei neomogene

Considerăm ecuaţia diferenţială liniară de ordin n neomogenă

$$\mathcal{L}(x) = f; x \in \mathcal{C}^n(\mathbb{I}, \mathbb{R}), f, a_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R}), i = \overline{1, n}. \tag{6.13}$$

Teorema 6.3.1 *Dacă $x_o(t, c_1, \ldots, c_n)$ este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene de ordin n, (6.4), iar $x_p(t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene de ordin n, (6.13), atunci*

$$x(t, c_1, \ldots, c_n) = x_o(t, c_1, \ldots, c_n) + x_p(t)$$

este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (6.13).

Demonstraţie.

Din ipoteză rezultă că $\mathcal{L}(x_o(t, c_1, \ldots, c_n)) = 0$ şi $\mathcal{L}(x_p(t)) = f(t)$. Atunci $\mathcal{L}(x_o(t, c_1, \ldots, c_n) + x_p(t)) = \mathcal{L}(x_o(t, c_1, \ldots, c_n)) + \mathcal{L}(x_p(t)) = f(t)$, adică $x(t, c_1, \ldots, c_n) = x_o(t, c_1, \ldots, c_n) + x_p(t)$ este soluţia generală a ecuaţiei neomogene (6.13).♦

Deci problema determinării soluţiei generale a unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene de ordin n, în ipoteza că se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii, revine la *determinarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene*. Metoda generală de aflare a soluţiei particulare a ecuaţiei neomogene este cunoscută sub numele de **metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange**.

Teorema 6.3.2 *Dacă $x_o(t, c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t); c_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene (6.4), atunci o soluţie particulară x_p a ecuaţiei neomogene (6.13) este de forma*

$$x_p(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t) x_i(t), t \in \mathbb{I}, \tag{6.14}$$

unde $C_1'(t), \ldots, C_n'(t)$ sunt soluţii ale sistemului

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + \cdots + C_n'(t)x_n(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1'(t) + \cdots + C_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ \cdots \\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \cdots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}. \tag{6.15}$$

Demonstraţie. Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (6.13) este de forma (6.14) presupunând funcţiile $C_i(t), i = \overline{1,n}$ necunoscute. Determinăm aceste funcţii impunând condiţia să verifice ecuaţia neomogenă şi încă $n-1$ condiţii care apar din faptul că în primele $n-1$ derivate ale lui x_p funcţiile $C_i(t), i = \overline{1,n}$ să se "comporte" la derivare ca nişte consante, adică suma termenilor care conţin derivatele funcţiilor $C_i(t), i = \overline{1,n}$ să fie egală cu zero. Astfel se obţine sistemul (6.15).

Acesta este un sistem liniar neomogen de n ecuaţii cu n necunoscute $C_i'(t), i = \overline{1,n}$, iar determinantul sistemului este chiar wronskianul soluţiilor liniar independente ale ecuaţiei omogene (6.4). Deoarece $W[t, x_1, x_2, \ldots, x_n] \neq 0$, sistemul (6.15) are soluţie unică, deci x_p de forma căutată există şi se obţine determinând funcţiile $C_i(t), i = \overline{1,n}$ prin integrarea funcţiilor $C_i'(t), i = \overline{1,n}$.♦

Exerciţiul 5 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = \dfrac{1}{\cos t}, t \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ x(0) = 1, x'(0) = -1. \end{cases}$$

Soluţie. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene. Polinomul caracteristic este $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1) \Rightarrow \lambda_1 = -i, \lambda_2 = i \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$.

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene folosind metoda variaţiei constantelor.

$x_p(t) = u_1(t)\sin t + u_2(t)\cos t$

$x_p'(t) = u_1'(t)\sin t + u_1(t)\cos t + u_2'(t)\cos t - u_2(t)\sin t \Rightarrow u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t = 0$

$x_p''(t) = u_1'(t)\cos t - u_1(t)\sin t - u_2'(t)\sin t - u_2(t)\cos t \Rightarrow u_1'(t)\cos t - u_2'(t)\sin t = \dfrac{1}{\cos t}.$

Rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t = 0 \\ u_1'(t)\cos t - u_2'(t)\sin t = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_{u_1'} = \begin{vmatrix} 0 & \cos t \\ \dfrac{1}{\cos t} & -\sin t \end{vmatrix} = -1, \Delta_{u_2'} = \begin{vmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \dfrac{1}{\cos t} \end{vmatrix} = \operatorname{tg} t \Rightarrow$$

$u_1'(t) = 1 \Rightarrow u_1(t) = t; u_2'(t) = -\operatorname{tg} t \Rightarrow u_2(t) = \ln|\cos t|.$

Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene este $x_p(t) = t\sin t + \cos t \cdot \ln|\cos t|$. Soluţia generală a ecuaţiei neomogene este:

$x(t, c_1, c_2) = c_1 \sin t + c_2 \cos t + t \sin t + \cos t \cdot \ln|\cos t|$.▲

În aplicaţiile tehnice apar probleme care necesită determinarea soluţiei generale a unei ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi în care funcţia f este un polinom sau sumă de produse dintre un polinom şi exponenţiale sau funcţii trigonometrice sin sau cos .În aceste cazuri se poate determina direct o soluţie particulară a ecuaţie neomogene folosind rezultatele ce urmează.

Cazul I.

$$f(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i t^i. \tag{6.16}$$

Lema 6.3.3 *Dacă $\lambda = 0$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (6.12), atunci ecuaţia diferenţială (6.13) are o soluţie particulară de forma*

$$x_p(t) = \sum_{i=0}^{m} \mu_i t^i. \tag{6.17}$$

adică un polinom de acelaşi grad cu polinomul care reprezintă termenul liber, iar coeficienţii $\mu_i, i = \overline{0,m}$ se obţin impunând condiţia ca $x_p(t)$ să verifice ecuaţia neomogenă.

Exerciţiul 6 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x''(t) - x(t) = t^2.$$

Soluţie. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene:
ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = -1 \Rightarrow x_1(t) = e^{-t}$,
$\lambda_2 = 1 \Rightarrow x_2(t) = e^t$
soluţia generală a ecuaţiei omogene este $x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$.
Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene.
Observăm că $\lambda = 0$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, deci soluţia particulară va fi un polinom de grad doi, ca şi termenul liber, t^2, scris sub forma generală: $x_p(t) = at^2 + bt + c \Rightarrow x_p'(t) = 2at + b, x_p''(t) = 2a$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem:
$2a - at^2 - bt - c = t^2 \Rightarrow a = -1, b = 0, c = -2 \Rightarrow x_p(t) = -t^2 - 2$.
Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - t^2 - 2$.▲

Lema 6.3.4 *Dacă $\lambda = 0$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (6.12) de ordin de multiplicitate s, atunci ecuaţia diferenţială (6.13) are o soluţie particulară de forma*

$$x_p(t) = t^s \sum_{i=0}^{m} \mu_i t^i. \tag{6.18}$$

adică un polinom de acelaşi grad cu polinomul care reprezintă termenul liber înmulţit cu t la puterea egală cu ordinul de multiplicitate a rădăcinii $\lambda = 0$, iar coeficienţii $\mu_i, i = \overline{0, m}$ se obţin impunând condiţia ca $x_p(t)$ să verifice ecuaţia neomogenă.

Exerciţiul 7 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x^{(IV)}(t) - 4x''(t) = 8t^2.$$

Soluţie. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene.
Ecuaţia caracteristică este $\lambda^4 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -2$
$\lambda_{1,2} = 0 \Rightarrow x_1(t) = e^{0t} = 1, x_2(t) = te^{0t} = t$,
$\lambda_3 = 2 \Rightarrow x_3(t) = e^{2t}$,
$\lambda_4 = -2 \Rightarrow x_4(t) = e^{-2t}$,
$\Rightarrow x_o(t, c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t}$.
Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene.
Observăm că $\lambda = 0$ este rădăcină de ordin de multiplicitate doi a ecuaţiei caracteristice, deci
$x_p(t) = t^2(at^2 + bt + c) \Rightarrow$
$x_p'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct$,
$x_p''(t) = 12at^2 + 6bt + 2c$,
$x_p'''(t) = 24at + 6b$,
$x_p^{(IV)}(t) = 24a$.
Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem:
$24a - 48at^2 - 24bt - 8c = 8t^2 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{6}, b = 0, c = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_p(t) = -t^2\left(\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$.
Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t} - t^2\left(\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$.▲

Cazul II.

$$f(t) = e^{\alpha t} \sum_{i=0}^{m} b_i t^i.$$

Lema 6.3.5 *Dacă $\lambda = \alpha$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, atunci ecuaţia diferenţială (6.13) admite o soluţie particulară de forma*

$$x_p(t) = e^{\alpha t} \sum_{i=0}^{m} \mu_i t^i.$$

adică aceeaşi exponenţială ca în termenul liber înmulţită cu un polinom de acelaşi grad cu cel din termenul liber. Coeficienţii $\mu_i, i = \overline{1,m}$ se obţin impunând condiţia ca $x_p(t)$ să verifice ecuaţia neomogenă.

Exerciţiul 8 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 8t^2 e^{3t}.$$

Soluţie. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene:
Ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 = 1 \Rightarrow x_1(t) = e^t$
$\lambda_2 = 2 \Rightarrow x_2(t) = e^{2t}$
$x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$.
Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene.
Observăm că $\lambda = 3$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, deci
$x_p(t) = e^{3t}(at^2 + bt + c) \Rightarrow$
$x_p'(t) = 3e^{3t}(at^2 + bt + c) + e^{3t}(2at + b)$,
$x_p''(t) = 9e^{3t}(at^2 + bt + c) + 4e^{3t}(2at + b) + e^{3t}2a$.
Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem:
$24a - 48at^2 - 24bt - 8c = 8t^2 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{6}, b = 0, c = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x_p(t) = -t^2\left(\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$.
Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - t^2\left(\dfrac{1}{6}t^2 + \dfrac{1}{2}\right)$.▲

Lema 6.3.6 *Dacă $\lambda = \alpha$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice de ordin de multiplicitate s, atunci ecuaţia diferenţială (6.13) admite o soluţie particulară de forma*

$$x_p(t) = t^s e^{\alpha t} \sum_{i=0}^{m} \mu_i t^i.$$

adică aceeaşi exponenţială ca în termenul liber înmulţită cu un polinom de acelaşi grad cu cel din termenul liber şi cu t la puterea egală cu ordinul de multiplicitate a rădăcinii $\lambda = \alpha$, iar coeficienţii $\mu_i, i = \overline{0,m}$ se obţin impunând condiţia ca $x_p(t)$ să verifice ecuaţia neomogenă.

Exerciţiul 9 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = t^2 e^{3t}.$$

Soluţie. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = 3$ este rădăcină de ordin doi a ecuaţiei caracteristice, deci
$x_p(t) = t^2 e^{3t}(at^2 + bt + c) \Rightarrow$
$x_p'(t) = 3e^{3t}(at^4 + bt^3 + ct^2) + e^{3t}(4at^3 + 3bt^2 + 2ct)$,

$x_p''(t) = 9e^{3t}\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) + 6e^{3t}\left(4at^3 + 3bt^2 + 2ct\right) + e^{3t}(12at^2 + 6bt + 2c)$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă, simplificăm prin e^{3t} şi obţinem: $9\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) + 6\left(4at^3 + 3bt^2 + 2ct\right) + (12at^2 + 6bt + 2c) - 18\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) - 6\left(4at^3 + 3bt^2 + 2ct\right) +$
$+9\left(at^4 + bt^3 + ct^2\right) = 8t^2 \Rightarrow a = -\dfrac{2}{3}, b = 0, c = 0 \Rightarrow x_p(t) = -\dfrac{2}{3}t^4$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} - \dfrac{2}{3}t^4$.▲

Cazul III.

$$f(t) = e^{\alpha t}\left[P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t\right]. \tag{6.19}$$

Lema 6.3.7 *Dacă $\lambda = \alpha + i\beta$ nu este rădăcină a polinomului caracteristic, ecuaţia diferenţială (6.13) are soluţia particulară de forma*

$$x_p(t) = e^{\alpha t}\left[A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t\right] \tag{6.20}$$

unde A şi B sunt polinoame cu coeficienţi reali de de acelaşi grad şi anume egal cu cel mai mare dintre gradele polinoamelor P şi Q.

Lema 6.3.8 *Dacă $\lambda = \alpha + i\beta$ este rădăcină de ordin s a polinomului caracteristic, ecuaţia diferenţială (6.13) are soluţia particulară de forma*

$$x_p(t) = t^s e^{\alpha t}\left[A(t)\cos\beta t + B(t)\sin\beta t\right] \tag{6.21}$$

unde A şi B sunt polinoame cu coeficienţi reali de de acelaşi grad şi anume egal cu cel mai mare dintre gradele polinoamelor P şi Q. În cazul în care $\lambda = \alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, se ia $s = 0$.

Exerciţiul 10 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 10\sin t.$$

Soluţie. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = i$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice, deci $x_p(t) = a\sin t + b\cos t \Rightarrow x_p'(t) = a\cos t - b\sin t$, $x_p''(t) = -a\sin t - b\cos t$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem: $-a\sin t - b\cos t - 6(a\cos t - b\sin t) + 9(a\sin t + b\cos t) = 10\sin t \Rightarrow \begin{cases} 8a + 6b = 10 \\ -6a + 8b = 0 \end{cases}$, cu solutia : $\left\{b = \frac{3}{5}, a = \frac{4}{5}\right\}$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} + \dfrac{4}{5}\sin t + \dfrac{3}{5}\cos t$.▲

Exerciţiul 11 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x''(t) + x(t) = 10\sin t.$$

Soluţie. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1\cos t + c_2\sin t$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Observăm că $\lambda = i$ este rădăcină a ecuaţiei caracteristice de ordin de multiplicitate $s = 1$, deci $x_p(t) = t(a\sin t + b\cos t) \Rightarrow x_p'(t) = (a\sin t + b\cos t) + t(a\cos t - b\sin t)$, $x_p''(t) = 2(a\cos t - b\sin t) + t(-a\sin t - b\cos t)$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi obţinem: $2(a\cos t - b\sin t) + t(-a\sin t - b\cos t) + t(a\sin t + b\cos t) = 10\sin t \Rightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ -2b = 10 \end{cases}$, cu solutia : $\left\{b = -\frac{1}{5}, a = 0\right\}$.

Soluţia generală a ecuaţiei date este: $x(t, c_1, c_2) = c_1\cos t + c_2\sin t - t\dfrac{1}{5}\sin t$.▲

Teorema 6.3.9 ***Principiul superpoziţiei.***

Dacă $x_i, i = \overline{1,r}$ *sunt soluţii ale ecuaţiei* $\mathcal{L}(x_i) = f_i$ *cu* $f_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ *şi cu* $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$, *atunci* $x = \sum\limits_{i=1}^{r} c_i x_i$ *este soluţie a ecuaţiei* $\mathcal{L}(x) = f$ *unde* $f = \sum\limits_{i=1}^{r} c_i f_i$.

Demonstraţie. $\mathcal{L}(x_i) = f_i, i = \overline{1,r} \Rightarrow c_i\mathcal{L}(x_i) = c_i f_i, i = \overline{1,r} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{r} c_i\mathcal{L}(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{r} c_i f_i \Rightarrow$ deoarece $\mathcal{L}$ este o funcţie liniară, $\mathcal{L}(\sum\limits_{i=1}^{r} c_i x_i) = \sum\limits_{i=1}^{r} c_i f_i \Rightarrow \mathcal{L}(x) = f.\blacklozenge$

Exerciţiul 12 Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$x''(t) - 9x(t) = e^{3t}\cos t + te^{-3t} + t^2.$$

Soluţie. Determinăm soluţia generală a ecuaţiei omogene: ecuaţia caracteristică este $\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3 \Rightarrow x_o(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$.

Căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene. Utilizând principiul superpoziţiei, notăm $f_1(t) = e^{3t}\cos t$, $f_2(t) = te^{-3t}$, $f_3(t) = t^2$ şi determinăm soluţii particulare ale ecuaţiilor $x'' - 9x = f_i$, $i = 1, 2, 3$. Fie ele x_{p_i}. Atunci $x_p = x_{p_1} + x_{p_2} + x_{p_3}$.

Considerăm pe rând ecuaţiile:

$x'' - 9x = e^{3t}\cos t$,

$x'' - 9x = te^{-3t}$,

$x'' - 9x = t^2$.

Fie ecuaţia

$x'' - 9x = e^{3t}\cos t$.

Atunci

$x_{p_1}(t) = ae^{3t}\cos t + be^{3t}\sin t$.

$x'_{p_1}(t) = 3ae^{3t}\cos t - ae^{3t}\sin t + 3be^{3t}\sin t + be^{3t}\cos t$,

$x''_{p_1}(t) = 8ae^{3t}\cos t - 6ae^{3t}\sin t + 8be^{3t}\sin t + 6be^{3t}\cos t$.

Înlocuim în ecuatia neomogenă si obtinem:

$8ae^{3t}\cos t - 6ae^{3t}\sin t + 8be^{3t}\sin t + 6be^{3t}\cos t - 9(ae^{3t}\cos t + be^{3t}\sin t)$

$= -ae^{3t}\cos t - 6ae^{3t}\sin t - be^{3t}\sin t + 6be^{3t}\cos t \Rightarrow$

$-ae^{3t}\cos t - 6ae^{3t}\sin t - be^{3t}\sin t + 6be^{3t}\cos t = e^{3t}\cos t$

$\begin{cases} -a + 6b = 1 \\ -6a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{a = -\frac{1}{37}, b = \frac{6}{37}\right\} \Rightarrow x_{p_1}(t) = -\frac{1}{37}e^{3t}\cos t + \frac{6}{37}e^{3t}\sin t.$

Considerăm ecuaţia $x'' - 9x = te^{-3t}$.

Deoarece $\lambda = -3$ este rădăcină de ordin întâi a polinomului caracteristic, atunci

$x_{p_2}(t) = t(ct + d)e^{-3t}$.

$x'_{p_2}(t) = (2ct + d)\,e^{-3t} - 3\,(ct^2 + dt)\,e^{-3t}$,

$x''_{p_2}(t) = 2ce^{-3t} - 3\,(2ct + d)\,e^{-3t} - 3\,(2ct + d)\,e^{-3t} + 9(ct^2 + dt)e^{-3t}$

$2ce^{-3t} - 3\,(2ct + d)\,e^{-3t} - 3\,(2ct + d)\,e^{-3t} + 9(ct^2 + dt)e^{-3t} - 9((ct^2 + dt)e^{-3t}) = te^{-3t}$

$2ce^{-3t} - 12e^{-3t}ct - 6e^{-3t}d = te^{-3t} \Rightarrow$

$\begin{cases} -12c = 1 \\ 2c - 6d = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{d = -\frac{1}{36}, c = -\frac{1}{12}\right\} \Rightarrow x_{p_2}(t) = t(-\frac{1}{12}t - \frac{1}{36})e^{-3t}.$

Considerăm ecuaţia

$x'' - 9x = t^2 \Rightarrow$

$x_{p_3}(t) = mt^2 + nt + p$,

$x'_{p_3}(t) = 2mt + n$,

$x''_{p_3}(t) = 2m$

$2m + 9(mt^2 + nt + p) = t^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} 9m = 1 \\ 9n = 0 \\ 2m + 9p = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{n = 0, m = \tfrac{1}{9}, p = -\tfrac{2}{81}\right\} \Rightarrow$$

$x_{p_3}(t) = \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{81}$.

Soluţia generală este: $x(t, c_1, c_2) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t} - \frac{1}{37}e^{3t}\cos t + \frac{6}{37}e^{3t}\sin t + t(-\frac{1}{12}t - \frac{1}{36})e^{-3t} + \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{81}$.▲

Etapele de rezolvare a unei ecuaţii diferenţiale de ordin superior cu coeficienţi constanţi neomogenă sunt:

1.-se rezolvă ecuaţia omogenă

-se determină polinomul caracteristic,

-se rezolvă ecuaţia caracteristică,

-se stabileşte natura rădăcinilor polinomului caracteristic,

-se scrie soluţia generală a ecuaţiei omogene ţinând seama de natura rădăcinilor polinomului caracteristic,

2.-se rezolvă ecuaţia neomogenă

-se determină o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene fie cu metoda variaţiei constantelor fie, dacă este posibil, utilizând forma particulară a termenului liber,

3.-se sumează cele două soluţii+scrierea soluţiei generale a ecuaţiei.