Curs 7

Transformata Laplace

7.1 Transformata Laplace

Ideea de bază a calcului operaţional constă în introducerea transformărilor integrale. Avantajul acestei metode constă în aceea că reduce rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale sau sisteme de ecuaţii diferenţiale la rezolvarea unor ecuaţii algebrice sau sisteme care, cel puţin din punct de vedere teoretic, sunt mai uşor de analizat. Transformata Laplace este o metodă alternativă care poate fi aplicată pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale studiate în capitolul anterior.

Vom defini o clasă de funcţii, clasa funcţiilor original, notată cu $\mathcal{O}$ şi fiecărei funcţii din $\mathcal{O}$ îi vom asocia transformata ei Laplace care este o funcţie imagine şi face parte din mulţimea funcţiilor imagine, $\mathcal{I}$. Se poate demonstra că această asociere este inversabilă şi permite un transfer de operaţii, astfel încât unor operaţii asupra funcţiilor din $\mathcal{O}$ să le corespundă operaţii "mai simple" între imaginile lor Laplace. Rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale cu ajutorul transformatei Laplace implică trei etape:

1. ecuaţia diferenţială, cu soluţii în mulţimea funcţiilor imagine, este transformată într-o ecuaţie algebrică;
2. se rezolvă ecuaţia algebrică în mulţimea funcţiilor imagine;
3. soluţia ecuaţiei algebrice, care este o funcţie imagine, este transformată într-o funcţie original.

Definiţia 7.1.1 *O funcţie*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

se numeşte ***funcţie original*** *dacă:*

(i) $f(t) = 0, \forall\, t < 0$;

(ii) pe orice interval compact, f are cel mult un număr finit de discontinuităţi iar în punctele de discontinuitate există limite laterale finite.

(iii) f are cel mult o ***creştere de tip exponenţial****, adică există două constante reale $M \geq 0$ şi α astfel încât:*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, t > 0. \tag{7.1}$$

Observaţia 7.1.2 *Condiţia (i) este naturală şi corespunde faptului că multe funcţii de timp (semnale) devin semnificative din punct de vedere fizic începând de la un anumit moment de timp (ales $t = 0$). Din condiţia (ii) rezultă că f este integrabilă pe orice interval compact.*

Observaţia 7.1.3 *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ şi $f = f_1 + if_2$, atunci f este, prin definiţie, continuă pe porţiuni dacă f_1 şi f_2 au această proprietate; în plus, pentru orice $a < b$:*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt.$$

Observaţia 7.1.4 *Dacă funcţia $f = f(t)$ satisface (7.1) pentru $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci această inegalitate va fi satisfăcută pentru orice $s \in \mathbb{C}$ cu $\operatorname{Re} s > \alpha$. Notăm cu*

$s_0 = \inf \{\alpha \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq Me^{\alpha t}, t > 0\}$

*şi s_0 se numeşte **abscisă de convergenţă (indice de creştere** sau **indice).***

Notăm cu θ funcţia $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0, \\ 1, & \text{dacă } t \geq 0, \end{cases}$, numită **treapta unitate** sau **funcţia lui Heaviside**.

Observaţia 7.1.5 *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie elementară continuă (de exemplu $f(t) = e^{at}$, $f(t) = \sin \omega t$, $f(t)$ funcţie polinomială) atunci $f\theta$ îndeplineşte condiţiile (i) şi (ii).*

Dacă există $\beta \geq 0$ astfel încât $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)e^{-\beta t} = 0$, atunci este îndeplinită şi condiţia (iii).

Exemplul 7.1.6 Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \notin (0,1), \\ 1, & \text{dacă } t \in (0,1) \end{cases}$, este o funcţie original cu $s_0 = 0$.

Exemplul 7.1.7 Funcţia lui Heaviside este o funcţie original cu $s_0 = 0$.

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{at}\theta(t)$ este o funcţie original cu abscisa de convergenţă egală cu $\max\{a, 0\}$.

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{t^2}\theta(t)$ nu este o funcţie original deoarece nu este satisfăcută condiţia (iii).▼

Definiţia 7.1.8 *Fie $f \in \mathcal{O}$ o funcţie original cu abscisa de convergenţă s_0.*

Fie $\Delta = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > s_0\}$. Funcţia $F : \Delta \to \mathbb{C}$, definită prin

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{7.2}$$

*se numeşte **transformata Laplace** a funcţiei f sau **imaginea** prin transformarea Laplace a funcţiei f şi se notează $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$.*

Notaţie. Funcţiile original sunt notate cu litere mici, $f, g, ...$, funcţiile imagine cu literele mari corespunzătoare $F, G, ...$. Funcţiile original depind de variabila independentă t iar cele imagine de variabila independentă s.

Teorema 7.1.9 *Fie $f \in \mathcal{O}$ o funcţie original cu abscisa de convergenţă s_0 şi notăm $\Delta = \{s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > s_0\}$. Atunci pentru orice $s \in \Delta$, integrala improprie (7.2) este absolut convergentă.*

Demonstraţie. Conform Definiţiei 7.1.1, există două constante reale $M \geq 0$ şi s_0 astfel încât:

$|f(t)| \leq Me^{s_0 t}, \quad t > 0.$

Fie $s \in \Delta$, $s = \lambda + i\mu$, rezultă că $f(t)e^{-st} = f(t)e^{-(\lambda+i\mu)t} = f(t)e^{-\lambda t}e^{-i\mu t}$, deci $|f(t)e^{-st}| \leq |f(t)|e^{-\lambda t} \leq Me^{(s_0-\lambda)t}$, $\forall t \geq 0$. (am folosit faptul că $|e^{-i\mu t}| = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$). Aplicând criteriul de comparaţie de la integrale improprii, este suficient să observăm că integrala $\int_0^\infty e^{(s_0-\lambda)t} dt =$

$\left.\dfrac{e^{(s_0-\lambda)t}}{s_0-\lambda}\right|_0^\infty$ este convergentă pentru $\lambda = \operatorname{Re} s > s_0$, având valoarea $\dfrac{1}{s_0-\lambda}$. Reţinem, în plus, că

$$|F(s)| = \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right| = \left|\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st} f(t)\, dt\right| \le \frac{M}{\lambda - s_0}. \tag{7.3}$$

■

Observaţia 7.1.10 *Din relaţia (7.3) rezultă că dacă $f \in \mathcal{O}$ şi $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ atunci* $\lim\limits_{\operatorname{Re} s\to\infty} F(s) = 0.$

Calculul transformatei Laplace se poate face cu ajutorul definiţiei, dar acest lucru se realizează pentru funcţii elementare, în rest se aplică o serie de rezultate denumite teoremele transformatei Laplace.

Exerciţiul 1 Să se calculeze transformata Laplace a lui $f(t) = e^{at}\theta(t)$.

Rezolvare. $\mathcal{L}\{e^{at}\theta(t)\}(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = -\left.\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right|_0^\infty = \frac{1}{s-a}$

pentru $\operatorname{Re} s > a$. Pentru $a = 0$ obţinem transformata Laplace a funcţiei Heaviside

$\mathcal{L}\{\theta(t)\}(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s}$ pentru $\operatorname{Re} s > 0$.▼

Exerciţiul 2 Să se calculeze transformata Laplace a funcţiei:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \notin [0,1], \\ 1, & \text{dacă } t \in [0,1] \end{cases}.$

Rezolvare. $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \displaystyle\int_0^1 e^{-st}dt = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$.▼

7.1.1 Proprietăţi ale transformatei Laplace

Problema pe care o punem în continuare este dacă transformatele Laplace ale diferitelor funcţii care vor apărea în aplicaţii le vom putea calcula pornind de la definiţie de fiecare dată. Răspunsul este negativ. Vom obţine noi transformate plecând de la unele cunoscute şi folosind unele proprietăţi şi teoreme legate de transformata Laplace pe care le vom prezenta în continuare.

Teorema 7.1.11 *(**Proprietatea de liniaritate a transformatei Laplace**) Transformata Laplace este o funcţie liniară, adică $\forall f, g \in \mathcal{O}$ iar $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ atunci*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}(s).$$

Demonstraţie. Într-adevăr, $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right) dt =$

$= \alpha\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt + \beta\int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}(s).$■

Exerciţiul 3 Ca aplicaţie a proprietăţii de liniaritate să se calculeze transformata Laplace a funcţiei $f(t) = (\sin t)\theta(t)$.

Rezolvare. $\mathcal{L}\{(\sin t)\theta(t)\}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\sin t dt = \frac{1}{2i}\int\limits_0^\infty e^{-st}(e^{it} - e^{-it})dt = \frac{1}{2i(s-i)} - \frac{1}{2i(s+i)} = \frac{1}{s^2+1}$, pentru $\operatorname{Re} s > 0$. Analog se obţine $\mathcal{L}\{(\cos t)\theta(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$ pentru $\operatorname{Re} s > 0$.▼

Teorema 7.1.12 ***(Teorema asemănării)*** *Dacă* $f \in \mathcal{O}$ *şi* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ *pentru* $\operatorname{Re} s > s_0$ *atunci pentru* $\omega \in \mathbb{R}_+$ *are loc relaţia*

$$\mathcal{L}\{f(\omega t)\}(s) = \frac{1}{\omega}F(\frac{s}{\omega}) \tag{7.4}$$

pentru $\operatorname{Re} s > s_0\omega$.

Demonstraţie. Facem schimbarea de variabilă $\omega t = \tau$ în integrala următoare $\int\limits_0^\infty e^{-st}f(\omega t)\,dt = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{s}{\omega}\tau}f(\tau)d\tau = \frac{1}{\omega}F(\frac{s}{\omega})$.■

Exerciţiul 4 Ca o aplicaţie a teoremei asemănării calculăm transformata Laplace a funcţiei $f(t) = \sin(\omega t)\theta(t)$.

Rezolvare. $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\theta(t)\}(s) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\sin t\theta(t)\}(\frac{s}{\omega}) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

Analog obţinem $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\theta(t)\}(s) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{(\cos t)\,\theta(t)\}(\frac{s}{\omega}) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$.▼

Teorema 7.1.13 ***(Teorema deplasării)*** *Dacă* $f \in \mathcal{O}$ *şi* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ *pentru* $\operatorname{Re} s > s_0$ *atunci pentru* $\lambda \in \mathbb{C}$ *şi* $\operatorname{Re} s > s_0 - \operatorname{Re}\lambda$ *are loc relaţia*

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}f(t)\}(s) = F(s+\lambda). \tag{7.5}$$

Demonstraţie. Observăm că dacă $f \in \mathcal{O} \Rightarrow e^{-\lambda t}f \in \mathcal{O}$ în care λ este un număr real sau complex, fixat. Dacă $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, t > 0$ atunci $|e^{-\lambda t}f(t)| \leq Me^{-\lambda t}e^{\alpha t}, t > 0$ şi rezultă că indicele de creştere al funcţiei $e^{-\lambda t}f(t)$ este $s_0 - \operatorname{Re}\lambda$. În adevăr, avem $\int\limits_0^\infty e^{-st}\,e^{-\lambda t}\,f(t)\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}\,f(t)\,dt = F(s+\lambda)$ valabilă pentru Re $s > s_0 -$ Re λ.■

Exerciţiul 5 Ca aplicaţie a teoremei deplasării, să se calculeze transformata Laplace a funcţiei $f(t) = e^{-\lambda t}\sin(\omega t)\theta(t)$.

Rezolvare. $\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\sin(\omega t)\theta(t)\}(s) = \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\theta(t)\}(s+\lambda) = \frac{\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$.

Analog $\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\cos(\omega t)\theta(t)\}(s) = \frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$.▼

Teorema 7.1.14 ***(Teorema întârzierii argumentului)*** *Dacă* $f \in \mathcal{O}$ *şi* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ *pentru* $\operatorname{Re} s > s_0$ *atunci pentru* $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *are loc relaţia*

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\}(s) = e^{-t_0 s}F(s). \tag{7.6}$$

Demonstraţie. Observăm că $f(t) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } t < t_0, \\ f(t-t_0)\,, \text{ dacă } t \geq t_0. \end{cases}$ Cu schimbarea de variabilă $t - t_0 = \tau$, obţinem:

$$\mathcal{L}\{f(t-t_0)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, f(t-t_0)\, dt = e^{-t_0 s}\int_0^\infty e^{-s\tau}\, f(\tau)\, d\tau = e^{-t_0 s}F(s), \text{ pentru } \operatorname{Re} s > s_0. \blacksquare$$

Exerciţiul 6 Ca aplicaţie a teoremei întârzierii argumentului, să se calculeze transformata Laplace a funcţiei

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } t < t_0, \\ \sin(t-t_0)\,, \text{ dacă } t \geq t_0. \end{cases}$$

Rezolvare. $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}\{\sin t\theta(t)\}(s) = e^{-t_0 s}\dfrac{1}{s^2+1}.\blacktriangledown$

Teorema 7.1.15 *Dacă $f \in \mathcal{O}$ şi este o funcţie periodică de perioadă $T > 0$, atunci*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\, dt.$$

Demonstraţie. Într-adevăr, $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st}f(t)\, dt,$

iar cu schimbarea de variabilă $\tau = t - kT$ obţinem

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^T e^{-s(\tau+kT)}f(\tau+kT)\, d\tau = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-sT}\right)^k\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)\, d\tau =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-sT}\right)^k\right]\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\, dt.\blacksquare$$

Exerciţiul 7 Să se calculeze transformata Laplace a funcţiei

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } t < 0, \\ |\sin t|\,, \text{ dacă } t \geq 0. \end{cases}$$

Rezolvare. $F(s) = \dfrac{1}{1-e^{-\pi s}}\displaystyle\int_0^\pi e^{-st}\sin t\, dt = \dfrac{1}{1-e^{-\pi s}}\dfrac{1+e^{-s\pi}}{1+s^2} = \dfrac{1}{1+s^2}\operatorname{cth}\dfrac{\pi s}{2}.\blacktriangledown$

Teorema 7.1.16 ***(Derivarea originalului)**. Dacă f este o funcţie continuă pentru $t > 0$ şi $f, f' \in \mathcal{O}$ cu abscisele de convergenţă s_0, respectiv s_{01}, atunci*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0+0), \text{ pentru } \operatorname{Re} s > \max\{s_0, s_{01}\}. \tag{7.7}$$

în care F este imaginea lui f, iar $f(0+0)$ este limita la dreapta a funcţiei f în punctul $t = 0$.

Demonstraţie. Putem scrie

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, f'(t)\, dt = [e^{-st}\, f(t)]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\, f(t)\, dt$$

aplicând integrarea prin părţi. Deoarece pentru Re $s > s_0$ suficient de mare, avem:
$\displaystyle\lim_{t\to\infty} e^{-st}\, f(t) = 0$ şi în mod evident $\displaystyle\lim_{t\searrow 0} e^{-st}f(t) = f(0+0)$ rezultă că formula (7.7) este demonstrată. $\blacksquare$

Observaţia 7.1.17 *Trebuie însă subliniat că această formulă nu este adevărată dacă f are discontinuitate într-un punct $t_0 > 0$. În adevăr, în acest caz ar trebui să scriem*

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \int_0^{t_0} e^{-st} f'(t)\,dt + \int_{t_0}^\infty e^{-st} f'(t)\,dt =$$

$$= [e^{-st} f(t)]_0^{t_0} + s\int_0^{t_0} e^{-st} f(t)dt + [e^{-st} f(t)]_{t_0}^\infty + s\int_{t_0}^\infty e^{-st} f(t)dt =$$

$$= sF(s) - f(0+0) - e^{-t_0 s}(f(t_0+0) - f(t_0-0)),$$

iar diferenţa din ultima paranteză este $\neq 0$ şi se numeşte saltul funcţiei în punctul $t_0 > 0$. Se notează $\sigma_0 = f(t_0+0) - f(t_0-0)$. Obţinem:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - \sigma_0 e^{-t_0 s} - f(0+0).$$

Exerciţiul 8 În ipoteza că f şi f' sunt funcţii original, iar f are discontinuitate în punctele $t_1 > 0$ şi $t_2 > 0$, să se calculeze imaginea lui f', în raport de imaginea lui f.

Rezolvare. Notând cu σ_1 şi σ_2 salturile funcţiei f în punctele t_1, respectiv t_2, vom găsi $\mathcal{L}\{f'(t)(s) = sF(s) - f(0+0) - \sigma_1 e^{-t_1 s} - \sigma_2 e^{-t_2 s}$.▼

Teorema 7.1.18 *Dacă f şi primele sale n derivate sunt funcţii original, iar f şi primele $n-1$ derivate sunt continue pentru $t > 0$, atunci are loc formula*

$$\begin{gathered}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = \\ = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+0) - s^{n-2} f'(0+0) - \ldots - s\, f^{(n-2)}(0+0) - f^{(n-1)}(0+0).\end{gathered} \tag{7.8}$$

Demonstraţie. Demonstraţia se face prin inducţie. Pentru $n = 1$ se obţine formula (7.7). Presupunem formula adevărată pentru k şi o demonstrăm pentru $k+1$.

$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\}(s) = s^k F(s) - s^{k-1} f(0+0) - s^{k-2} f'(0+0) - \ldots -$
$- s\, f^{(k-2)}(0+0) - f^{(k-1)}(0+0)$.

Dar, aplicând Teorma 7.1.16 funcţiei $f^{(k)}(t)$ obţinem:

$$\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left(f^{(k)}(t)\right)'\right\}(s) = s\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\}(s) - f^{(k)}(0_+) =$$

$$= s\left\{s^k F(s) - s^{k-1} f(0+0) - s^{k-2} f'(0+0) - \ldots - s\, f^{(k-2)}(0+0) - f^{(k-1)}(0+0)\right\} -$$
$$- f^{(k)}(0+0),$$

care reprezintă tocmai relaţia (7.8).■

Observaţia 7.1.19 *Formula precedentă poate fi uşor memorată, dacă se ţine seama că în partea dreaptă apar puterile descrescătoare ale lui s şi ordinele de derivare ale funcţiei f cresc astfel încât suma lor să fie $n-1$. În cazul particular $f(0+0) = f'(0+0) = \ldots = f^{n-1}(0+0) = 0$, avem*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s)$$

în care n este un număr natural oarecare. În acest caz, se mai poate spune că derivarea de n ori a originalului are ca efect înmulţirea imaginii cu s^n.

Teorema care urmează ne va arăta ce efect are asupra imaginii integrarea originalului.

Teorema 7.1.20 ***(Integrarea originalului)***

Dacă $f \in \mathcal{O}$ şi $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ pentru $\operatorname{Re} s > s_0$ *atunci*

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(u)\,du\}(s) = \frac{1}{s} F(s). \tag{7.9}$$

Mai general,
$$\mathcal{L}\{\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n\}(s) = \frac{1}{s^n}F(s), \tag{7.10}$$
adică integrarea repetată de n ori a originalului are ca efect împărţirea imaginii sale cu s^n.

Demonstraţie. Notăm $f(t) = g'(t) \Rightarrow g(t) = \int_0^t f(u)du, g(0) = 0$

Înlocuindu-l pe f în relaţia (7.7) obţinem
$\mathcal{L}\{g'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{g(t)\}(s) \Rightarrow$
$\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \mathcal{L}\{\int_0^t f(u)du\}(s) \Rightarrow$
$\mathcal{L}\{\int_0^t f(u)du\}(s) = \frac{1}{s}F(s).$

Concluzie: integrarea originalului are ca efect împărţirea imaginii prin s. Aplicând încă o dată teorema, obţinem:
$\mathcal{L}\{\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2)dt_2\}(s) = \frac{1}{s^2}F(s).$

Prin inducţie se obţine relaţia (7.10).■

Exerciţiul 9 Să se calculeze originalul funcţiilor
$F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$ şi $G(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$.

Rezolvare. Ştim că $\mathcal{L}\left\{(\sin(\omega t))\theta(t)\right\}(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ conform exerciţiului 4. Rezultă, conform teoremei de integrarea a originalului, că
$$\frac{1}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{s}\frac{1}{\omega}\mathcal{L}\left\{(\sin(\omega t))\theta(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega}\int_0^t (\sin(\omega u))\, du\right\}(s) \Rightarrow$$
$$f(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t (\sin(\omega u))\, du = \theta(t)\, -\frac{1}{\omega^2}\left.(\cos(\omega u))\right|_0^t = \frac{1}{\omega^2}(1-\cos(\omega t))\theta(t).$$

Conform teoremei de integrarea a originalului putem obţine, în continuare,
$$\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)\right\}(s) = \left\{\frac{1}{\omega^2}\int_0^t (1-\cos(\omega u))du\right\}(s) \Rightarrow$$
$$g(t) = \frac{1}{\omega^2}\int_0^t (1-\cos(\omega u))du = \theta(t)\frac{1}{\omega^2}\left.(u - \frac{\sin(\omega u)}{\omega})\right|_0^t = \frac{1}{\omega^2}(t - \frac{\sin\omega t}{\omega})\theta(t).▼$$

7.1.2 Produsul de convoluţie

Produsul de convoluţie este legat de inmulţirea transformatelor Laplace. Adunarea transformatelor Laplace nu ridică probleme. Stim că $\mathcal{L}\left\{f(t)+g(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(s)$. Înmulţirea transformatelor Laplace apare adesea în rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale. De multe ori cunoaştem $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$ şi $\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(s)$ şi dorim să aflăm funcţia a cărei transformată Laplace este $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)\cdot\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}(s)$. Am putea presupune că este $f(t)g(t)$, dar este fals. În general $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\}(s) \neq \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$. Pentru a confirma aceasta considerăm $f(t) = e^t\theta(t), g(t) = e^{2t}\theta(t), f(t)g(t) = e^{3t}\theta(t)$, $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\}(s) = \dfrac{1}{s-3}$, $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \dfrac{1}{s-1}$, $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \dfrac{1}{s-2}$. Rezultă $\mathcal{L}\{f(t)g(t)\}(s) = \dfrac{1}{s-3} \neq \dfrac{1}{s-1} \cdot \dfrac{1}{s-2} = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$.

Definiţia 7.1.21 *Se numeşte* ***produs de convoluţie*** *a două originale f şi g, notat $f * g$, funcţia definită prin relaţia*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du = \int_0^t f(t-v)\, g(v)\, dv \tag{7.11}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$.

Este evidentă comutativitatea produsului de convoluţie, adică avem $f * g = g * f$ pentru orice pereche de funcţii original făcând schimbarea de variabilă $u = t - v$. De asemenea se poate demonstra că $f * g$ este tot o funcţie original, observând că este continuă şi are o creştere de tip exponenţial. Importanţa noţiunii de produs de convoluţie este pusă în evidenţă de următoarea teoremă

Teorema 7.1.22 ***(Imaginea produsului de convoluţie a două originale-Teorema lui Borel)***

Dacă $f, g \in \mathcal{O}$ abscisa de convergenţă s_1 respectiv s_2 şi cu imaginile F, respectiv G, atunci

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = F(s)\, G(s) \tag{7.12}$$

pentru $\operatorname{Re} s > \max\{s_1, s_2\}$

Demonstraţie. Pornind de la definiţia transformatei Laplace aplicată produsului de convoluţie şi ţinând seama de schimbarea ordinii de integrare pe domeniul $\mathcal{D}$ este domeniul (nemărginit) din planul variabilelor independente t şi u, şi făcând schimbarea de variabilă $t - u = v$ obţinem:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}(f * g)(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty g(u) \left(\int_\tau^\infty e^{-st} f(t-u) dt \right) d\tau = \int_0^\infty g(u) \left(\int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(v) dv \right) du =$$

$$= \int_0^\infty e^{-su} g(u) \left(\int_0^\infty e^{-sv} f(v) dv \right) du = \int_0^\infty e^{-su} g(u) F(s) du = F(s)G(s).$$

adică tocmai ceea ce trebuia demonstrat. ■

Conţinutul acestei teoreme poate fi redat astfel: imaginea produsului de convoluţie a două funcţii este produsul imaginilor funcţiilor sau transformta Laplace a produsului de convoluţie a două funcţii este produsul transformatelor Laplace a celor două funcţii.

Exerciţiul 10 Să se calculeze originalul funcţiilor $F(s) = \dfrac{1}{s(s-a)}$ şi $G(s) = \dfrac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$.

Rezolvare. Ştim că $\dfrac{1}{s-a} = \mathcal{L}\left\{e^{at}\theta(t)\right\}(s)$, $\dfrac{1}{s} = \mathcal{L}\left\{\theta(t)\right\}(s)$. Conform teoremei lui Borel $F(s) = \dfrac{1}{s(s-a)} = \mathcal{L}\left\{e^{at}\theta(t)\right\}(s)\mathcal{L}\left\{\theta(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{e^{at}\theta(t) * \theta(t)\right\}(s)$. Rezultă că $f(t) = \int\limits_0^t e^{a(t-u)}\theta(t-u)\theta(u)du = \int\limits_0^t e^{a(t-u)}du = -\dfrac{1}{a}e^{a(t-u)}\theta(t)\Big|_0^t = \dfrac{1}{a}(e^{at}-1)\theta(t)$.

$G(s) = \dfrac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} = \dfrac{1}{s^2+\omega^2}\cdot\dfrac{1}{s^2+\omega^2} = \mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}\theta(t)\right\}(s)\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}\theta(t)\right\}(s) =$
$= \mathcal{L}\left\{\left(\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}\theta(t)\right) * \left(\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}\theta(t)\right)\right\}(s)$.

Rezultă că $g(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\sin(\omega(t-u))}{\omega}\theta(t-u)\dfrac{\sin(\omega u)}{\omega}\theta(u)du = \int\limits_0^t \dfrac{\sin(\omega(t-u))}{\omega}\cdot\dfrac{\sin(\omega u)}{\omega}du =$
$= \frac{1}{\omega^2}\int_0^t \left(\frac{1}{2}\cos(t\omega - 2u\omega) - \frac{1}{2}\cos t\omega\right)du = \frac{1}{2\omega^2}\left(-\frac{1}{2}\sin(t\omega - 2u\omega) - u\cos(t\omega)\right)\theta(t)\Big|_0^t =$
$= \frac{1}{2\omega^2}\left(\frac{1}{\omega}\sin(t\omega) - t\cos\omega t\right)\theta(t)$.▼