Curs 8

Transformata Laplace. Aplicaţii

8.1 Proprietăţi ale transformatei Laplace

Teorema 8.1.1 *(Derivarea imaginii)*
Dacă $f \in \mathcal{O}$ şi $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ pentru $\operatorname{Re} s > s_0$ atunci

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\}(s) = F'(s) \tag{8.1}$$

În general, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ are loc relaţia

$$\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}(s) = F^{(n)}(s) \tag{8.2}$$

Demonstraţie. Deoarece funcţia $h(t,s) = e^{-st} f(t)$ este continuă în variabilele t şi s, există şi este continua $\frac{\partial h}{\partial s}$ şi $|h(t,s)| \leq e^{-(s-a)t}M$ şi $\left|\frac{\partial h}{\partial s}(t,s)\right| \leq se^{-(s-a)t}M_1$ atunci funcţia F este derivabilă în raport cu s (admite chiar derivate de orice ordin) şi în plus

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st} f(t)\right) dt = \int_0^\infty (-t)e^{-st} f(t)\, dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s).$$

Prin inducţie se demonstrează relaţia (8.2).■

Exerciţiul 1 Să se calculeze transformata Laplace a funcţiilor $t^n e^{at}\theta(t), t^n\theta(t), \forall n \in \mathbb{N}$ şi $t^\alpha\theta(t), \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. $\mathcal{L}\{t^n e^{at}\theta(t)\}(s) = (-1)^n\mathcal{L}\{(-t)^n e^{at}\theta(t)\}(s) = \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{e^{at}\theta(t)\}(s) =$
$= \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ pentru $\operatorname{Re} s > a$.

În particular, luând $a = 0$ în relaţia precedentă regăsim rezultatul dintrun exempl din cursul anterior, obţinem:

$\mathcal{L}\{t^n\theta(t)\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ pentru $\operatorname{Re} s > 0$.

În general,

$\mathcal{L}\{t^\alpha\theta(t)\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ pentru $\operatorname{Re} s > 0$,

unde $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin relaţia

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$$

se numeşte funcţia Gamma. Subliniem proprietatea funcţiei Gamma $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, de unde rezultă că dacă $\alpha = n \in \mathbb{N}$ atunci $\Gamma(n+1) = n!$ (funcţia Gamma generalizează factorialul).▼

Teorema 8.1.2 ***(Integrarea imaginii)*** *Dacă* $f \in \mathcal{O}$ *şi* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ *pentru* $\operatorname{Re} s > s_0$ *şi* $\frac{f(t)}{t} \in \mathcal{O}$*, atunci*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(p)dp. \tag{8.3}$$

Demonstraţie. Fie $g(t) = \frac{f(t)}{t}, t > 0$, deci $f(t) = tg(t)$. Conform teoremei derivării imaginii, rezultă

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{tg(t)\}(s) = -\mathcal{L}\{(-t)g(t)\}(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{g(t)\}(s). \tag{8.4}$$

Dacă notăm $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ şi $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = G(s)$, din (8.4) rezultă că $F(s) = -G'(s)$.

Integrând de la s la ∞, obţinem: $\int_s^\infty G'(p)dp = -\int_s^\infty F(p)dp \Rightarrow \lim_{p\to\infty} G(p) - G(s) = -\int_s^\infty F(p)dp$, folosind rezultatul unei observaţii din cursul anterior rezultă (8.3).■

Teorema se poate formula astfel: integrarea funcţiei imagine corespunde unei împărţiri prin t a funcţiei original.

Exerciţiul 2 Să se determine transformata Laplace a funcţiilor $\frac{\sin t}{t}\theta(t)$ şi $\int_0^t \frac{\sin u}{u}du$ pentru $t > 0$.

Rezolvare. $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\theta(t)\right\}(s) = \int_s^\infty \mathcal{L}\{(\sin t)\theta(t)\}(p)dp = \int_s^\infty \frac{1}{p^2+1}dp = \operatorname{arctg} p|_s^\infty = = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$.

$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}du\right\}(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s\right)$.▼

Exerciţiul 3 Să se determine originalul funcţiei: $F(s) = \ln\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)$.

Rezolvare. $F'(s) = \frac{d}{ds}\left(\ln\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)\right) = \frac{s^2}{s^2+\omega^2}\cdot\left(-\frac{2\omega^2}{s^3}\right) = -\frac{2\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$. Dar, conform unui exerciţiu din cursul precedent, $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)\right\}(s) = \frac{1}{s(s^2+\omega^2)}$, rezultă că $\frac{2\omega^2}{s(s^2+\omega^2)} = \mathcal{L}\{2(1-\cos\omega t)\}(s) \Longrightarrow F(s) = \int_s^\infty \frac{2\omega^2}{p(p^2+\omega^2)} = \mathcal{L}\left\{\frac{2(1-\cos\omega t)}{t}\right\}(s) \Rightarrow$

$f(t) = \frac{2(1-\cos\omega t)}{t}\theta(t)$.▼

Teorema 8.1.3 ***(Teorema valorii iniţiale)***

Dacă $f(t) = (a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + \cdots)\theta(t)$ *are transformata Laplace* $F(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{2! a_3}{s^3} + \cdots$, *dezvoltările fiind convergente în jurul lui* $t = 0$ *şi respectiv* $s = \infty$ *şi dacă există* $\lim_{t \searrow 0} f(t)$, $\lim_{s\to\infty} F(s)$, *atunci* $\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0+0)$.

Demonstraţie. Într-adevăr, $\lim_{s\to\infty} sF(s) = a_1$ şi $\lim_{t\searrow 0} f(t) = a_1$.■

Exemplul 8.1.4 Verificaţi teorema valorii iniţiale pentru funcţia $f(t) = 5 + 2\cos 3t$.

Observăm că $\lim_{t\searrow 0} f(t) = 7$, $F(s) = \frac{5}{s} + \frac{2s}{s^2+9}$, $\lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} s(\frac{5}{s} + \frac{2s}{s^2+9}) = 7$.

Teorema 8.1.5 ***(Teorema valorii finale)***

Dacă $f \in \mathcal{O}$ *şi* $f' \in \mathcal{O}$ *şi există* $L = \lim_{t\to\infty} f(t)$, *atunci*

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = L. \tag{8.5}$$

Demonstraţie. Integrând prin părţi obţinem relaţia:

$$\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = sF(s) - f(0+0)$$

de unde, făcând pe $s \to 0$ rezultă

$$\int_0^\infty f'(t)\, dt = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0+0)$$

deci rezultă (8.5).■

Exemplul 8.1.6 Verificaţi teorema valorii finale pentru funcţia $f(t) = 3e^{-4t}$. Observăm că $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} 3e^{-4t} = 0$, $F(s) = \frac{3}{s+4}$, $\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{3}{s+4} = 0$.

8.1.1 Transformatele Laplace ale functiilor elementare

Denumirea funcţiei	$f(t)$	$F(s)$
Impuls unitar (Dirac)	$\delta(t)$	1
Treapta unitate	$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
Funcţia polinomiala	$t^n\theta(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

Funcţia exponenţiala	$e^{at}\theta(t)$	$\dfrac{1}{s-a}$
Semnale armonice	$\sin(\omega t)\theta(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
	$\cos(\omega t)\theta(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
Armonice modulate în amplitudine	$e^{-at}\sin(\omega t)\theta(t)$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
	$e^{-at}\cos(\omega t)\theta(t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
Semnale polinomiale modulate	$e^{-at}t^n\theta(t)$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
Semnale hiperbolice	$sh(\omega t)\theta(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
	$ch(\omega t)\theta(t)$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
Semnale hiperbolice modulate	$e^{-at}sh(\omega t)\theta(t)$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2-\omega^2}$
	$e^{-at}ch(\omega t)\theta(t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2-\omega^2}$

8.1.2 Inversa transformatei Laplace

Problema care se pune în continuare este de a determina funcţia original dacă se cunoaşte funcţia imagine, iar rezolvarea sa se bazează pe faptul că între mulţimea originalelor şi mulţimea imaginilor există o corespondenţă biunivocă.

Dacă $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ atunci $f(t)$ se numeşte inversa transformatei Laplace sau originalul funcţiei imagine $F(s)$ şi se notează $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$.

De exemplu dacă $\mathcal{L}\{\theta(t)\}(s) = \frac{1}{s}$ atunci $\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t)$. Analog dacă $\mathcal{L}\{(\sin t)\theta(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$ atunci $(\sin t)\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(t)$.

Inversele transformatelor Laplace (originalele) functiilor elementare

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$
1	$\delta(t)$
$\dfrac{1}{s}$	$\theta(t)$
$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n\theta(t)$
$\dfrac{1}{s-a}$	$e^{at}\theta(t)$
$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$(\sin(\omega t))\,\theta(t)$
$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$(\cos(\omega t))\,\theta(t)$

$F(s)=\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(t)$
$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\left(e^{-at}\sin(\omega t)\right)\theta(t)$
$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\left(e^{-at}\cos(\omega t)\right)\theta(t)$
$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\left(e^{-at}t^n\right)\theta(t)$
$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\left(sh(\omega t)\right)\theta(t)$
$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$\left(ch(\omega t)\right)\theta(t)$
$\dfrac{\omega}{(s+a)^2-\omega^2}$	$\left(e^{-at}sh(\omega t)\right)\theta(t)$
$\dfrac{s+a}{(s+a)^2-\omega^2}$	$\left(e^{-at}ch(\omega t)\right)\theta(t)$

Determinarea orginalelor unor funcţii simple cu ajutorul tabelului.

Exemplul 8.1.7 Să se determine originalele funcţiilor de mai jos, utilizând tabelul:

a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-3}\right\}(t)=e^{3t}\theta(t)$,

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{2s-3}\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{2\left(s-\frac{3}{2}\right)}\right\}(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}t}\theta(t)$,

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+3^2}\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{3\left(s^2+3^2\right)}\right\}(t)=\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s^2+3^2}\right\}(t)=\frac{1}{3}\left(\sin 3t\right)\theta(t)$,

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3}\right\}(t)=\frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2!}{s^3}\right\}(t)=\frac{t^2}{2}\theta(t)$,

e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3!}{(s-2)^4}\right\}(t)=e^{2t}t^3\theta(t)$.

Determinarea originalului folosind descompunerea în fracţii simple a funcţiei imagine.

Să determinăm originalul imaginii $F(s)=P(s)/Q(s)$, în care P şi Q sunt polinoame în variabila s şi gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului utilizând **descompunerea în fracţii simple**. Restricţia asupra gradelor celor două polinoame este impusă de cerinţa ca $F(s)\to 0$ când $s\to\infty$. O funcţie care este raportul a două polinoame se numeşte fracţie raţională. Aşadar, dacă presupunem că Q are descompunerea

$$Q(s)=(s-s_1)^{n_1}(s-s_2)^{n_2}\dots(s-s_m)^{n_m}$$

în care $s_i\neq s_j$ pentru $i\neq j$, se ştie că are loc o descompunere unică de forma următoare

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A_1}{(s-s_1)^{n_1}}+\frac{A_2}{(s-s_1)^{n_1-1}}+\dots+\frac{A_{n_1}}{s-s_1}+\dots$$

în care termenii ce nu au fost scrişi corespund rădăcinilor $s_2,s_3,\dots,s_m$. După înmulţirea identităţii precedente cu $(s-s_1)^{n_1}$ se obţine identitatea

$$(s-s_1)^{n_1}F(s)=A_1+A_2(s-s_1)+\dots+A_k(s-s_1)^{k-1}+\dots+A_{n_1}(s-s_1)^{n_1-1}+\dots$$

în care termenii nescrişi conţin $(s-s_1)^{n_1}$ şi nu au singularitate în punctul $s=s_1$. Prin trecere la limită pentru $s\to s_1$, aflăm coeficientul A_1. Apoi, prin derivări succesive, făcând $s\to s_1$, aflăm toţi coeficienţii A_i, cu $i=\overline{1,n_1}$. Deci, vom avea

$$A_k=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{s\to s_1}\left((s-s_1)^{n_1}F(s)\right)^{(k-1)},\quad k=\overline{1,n_1}$$

care, în cazul $k = 1$, se obţine

$$A_1 = \lim_{s \to s_1} (s - s_1)^{n_1} F(s)$$

Coeficienţii termenilor nescrişi se află în mod asemănător. Notând cu f originalul fracţiei raţionale F, vom avea

$$f(t) = \frac{A_1}{(n_1 - 1)!} t^{n_1 - 1} e^{s_1 t} + \frac{A_2}{(n_1 - 2)!} t^{n_1 - 2} e^{s_1 t} + \ldots + A_n e^{s_1 t} + \ldots \tag{8.6}$$

în care termenii nescrişi reprezintă contribuţia celorlalte rădăcini ale polinomului $Q(s)$ în expresia funcţiei $f = f(t)$.

Dacă Q are toate rădăcinile simple, adică dacă

$$Q(s) = (s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_m)$$

descompunerea este de forma

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \ldots + \frac{A_m}{s - s_m}$$

unde

$$A_i = \lim_{s \to s_i} ((s - s_i) \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s_i)}{Q'(s_i)}, \quad i = \overline{1, m}$$

şi deci vom avea, în acest caz

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{P(s_i)}{Q'(s_i)} e^{s_i t}, \quad t > 0$$

Exemplul 8.1.8 Să se determine originalele funcţiilor de mai jos, utilizând descompunerea în fracţii simple:

a) $F(s) = \dfrac{4s - 5}{s^2 - s - 2}$

$\dfrac{4s - 5}{s^2 - s - 2} = \dfrac{4s - 5}{(s + 1)(s - 2)} = \dfrac{3}{s + 1} + \dfrac{1}{s - 2}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s + 1}\right\}(t) = e^{-t}\theta(t),$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s - 2}\right\}(t) = e^{2t}\theta(t)$

$f(t) = e^{-t}\theta(t) + e^{2t}\theta(t),$

b) $F(s) = \dfrac{3s^3 + s^2 + 12s + 2}{(s - 3)(s + 1)^3}$

$\dfrac{3s^3 + s^2 + 12s + 2}{(s - 3)(s + 1)^3} = \dfrac{1}{s + 1} - \dfrac{4}{(s + 1)^2} + \dfrac{3}{(s + 1)^3} + \dfrac{2}{s - 3}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s + 1}\right\}(t) = e^{-t}\theta(t),$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{-4}{(s + 1)^2}\right\}(t) = -4te^{-t}\theta(t),$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{(s + 1)^3}\right\}(t) = \dfrac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2!}{(s + 1)^3}\right\}(t) = \dfrac{3}{2}t^2 e^{-t}\theta(t),$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s - 3}\right\}(t) = 2e^{3t}\theta(t),$

$f(t) = e^{-t}\theta(t) - 4te^{-t}\theta(t) + \dfrac{3}{2}t^2e^{-t}\theta(t) + 2e^{3t}\theta(t)$.

c) $F(s) = \dfrac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)}$

$\dfrac{5s^2+8s-1}{(s+3)(s^2+1)} = \dfrac{3s-1}{s^2+1} + \dfrac{2}{s+3}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s+3}\right\}(t) = 2e^{-3t}\theta(t)$,

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-1}{s^2+1}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{3\dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{1}{s^2+1}\right\}(t) = 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\}(t) =$ $(3\cos t)\,\theta(t) - (\sin t)\,\theta(t)$.

8.2 Aplicaţii ale transformatei Laplace

8.2.1 Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale liniare de ordin n cu coeficienţi constanţi

Transformata Laplace se arată deosebit de utilă la rezolvarea ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi, precum şi a unor tipuri de ecuaţii integrale sau cu derivate parţiale.

Să se afle soluţia ecuaţiei

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_nx(t) = f(t), \quad t > 0$$

care satisface condiţiile iniţiale

$$x(0) = c_1,\ x'(0) = c_2, \ldots, x^{(n-1)}(0) = c_n$$

Presupunem că f este o funcţie original şi că coeficienţii $a_i,\ i = \overline{0,n}$ sunt constanţi. Soluţia căutată $x = x(t)$ este unic determinată şi se poate arăta că este o funcţie original.

Rezolvarea ecuaţiei implică următoarele etape:

I. *Transformarea ecuaţiei diferenţiale în ecuaţie algebrică liniară de ordin întâi.*

Se aplică transformata Laplace ambilor membrii ai ecuaţiei diferenţiale. Se folosesc

- proprietatea de liniaritate a transformatei Laplace,

- teoremele pentru calculul transformatei Laplace a derivatelor funcţiei necunoscute şi se utilizează condiţiile iniţiale,

$$\mathcal{L}\left\{x^{(i)}(t)\right\}(s) = s^iX(s) - s^{i-1}c_1 - \ldots - s\,c_{i-1} - c_i,\ \ i = \overline{1,m}$$

- tabelul transformatelor şi teoremele studiate pentru calculul transformatei Laplace a membrului doi.

Notând imaginea lui $x(t)$ cu $X(s)$ şi cu $F(s)$ imaginea lui $f(t)$ obţinem:

$s^nX(s) - s^{n-1}c_1 - \ldots - s\,c_{n-1} - c_n + a_1\left(s^{n-1}X(s) - s^{n-2}c_1 - \ldots - s\,c_{n-2} - c_{n-1}\right) + \ldots$ $+a_{n-1}\left(sX(s) - c_1\right) + a_nX(s) = F(s) \Leftrightarrow$

$P(s)X(s) = Q(s)$,

unde

$P(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n, Q(s) = F(s) + s^{n-1}c_1 + \ldots + s\,c_{n-1} + c_n +$ $a_1\left(s^{n-2}c_1 + \ldots + s\,c_{n-2} + c_{n-1}\right) + \ldots + a_{n-1}c_1$.

Obervăm că polinomul $Q(s)$ are gradul cel mult $n-1$.

II. *Rezolvarea ecuaţiei algebrice.*

$P(s)X(s) = Q(s) \Rightarrow X(s) = \dfrac{1}{P(s)}Q(s).$

III. *Determinarea originalului soluţiei ecuaţiei algebrice.*

$X(s)$ este o fracţie raţională în variabila s şi aflarea originalului este o problemă cunoscută.

Exerciţiul 4 Să se afle soluţia ecuaţiei

$$x''(t) + x(t) = (\cos t)\,\theta(t), \quad t > 0$$

care satisface condiţiile iniţiale $x(0) = 0, \;\; x'(0) = 1.$

Rezolvare. Aplicând transformata Laplace ecuaţiei şi ţinând seama că:

$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s),$

$\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) = s^2X(s) - sx(0+0) - x'(0+0) = sX(s) - 1,$

$\mathcal{L}\{\cos t\theta(t)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+1},$

obţinem $(s^2+1)X(s) = \dfrac{s}{s^2+1} + 1 \Rightarrow X(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2} + \dfrac{1}{s^2+1}$, deci

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2} + \dfrac{1}{s^2+1}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\}(t)$

Pentru calculul $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}(t)$ folosim Teorema lui Borel

$\dfrac{s}{(s^2+1)^2} = \dfrac{s}{(s^2+1)}\dfrac{1}{(s^2+1)} = \mathcal{L}\{(\cos t)\,\theta(t)\}(s)\mathcal{L}\{(\sin t)\,\theta(t)\}(s) =$

$\mathcal{L}\{(\cos t)\,\theta(t) * (\sin t)\,\theta(t)\}(s)$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}(t) = (\cos t)\,\theta(t) * (\sin t)\,\theta(t) = \int_0^t \cos(t-u)\sin u\,du = \left(\frac{1}{2}t\sin t\right)\theta(t).$

Rezultă

$$x(t) = \theta(t)\frac{1}{2}(\sin t)\,t + \theta(t)\sin t, \quad t > 0.$$

8.2.2 Rezolvarea ecuaţiilor integrale Voltera

O altă aplicaţie a transformatei Laplace o întâlnim la rezolvarea ecuaţiei integrale Volterra, de speţa întâi, anume

$$\int_0^t k(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = f(t), \quad t > 0$$

în care k şi f sunt funcţii original continue, iar x este funcţia necunoscută. Căutând soluţia tot în clasa originalelor şi notând imaginile lui k, x, f cu K, X, F, vom obţine relaţia

$$K(s)X(s) = F(s) \quad \text{unde } X(s) = \frac{F(s)}{K(s)}$$

Dacă raportul $F(s)/K(s)$ este imaginea unei funcţii cunoscute, soluţia $x = x(t)$ va fi egală cu această funcţie şi este unică în clasa originalelor.

Exemplul 8.2.1 Să se rezolve ecuaţia integrală

$$\int_0^t (\cos(t-\tau))x(\tau)\,d\tau = \theta(t)\sin^2 t, \quad t > 0$$

Rezolvare. Ştiind că

$$\mathcal{L}\left\{\sin^2 t\theta(t)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\theta(t)\right\}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

vom avea

$$X(s) = \frac{2(s^2+1)}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{s^2+4}$$

deci soluţia căută este

$$x(t) = \theta(t)\frac{1}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t\theta(t).$$

De fapt, în acest caz particular, ecuaţia din enunţ este verificată de funcţia $x = x(t)$ găsită, pe toată axa reală, adică pentru $t \in (-\infty,\ \infty)$.

Ecuaţia integrală Volterra de speţa a doua are forma

$$x(t) = f(t) + \int_0^t k(t-\tau)x(\tau)\,d\tau, t > 0 \tag{8.7}$$

în care k şi f sunt funcţii original continue, cunoscute. Necunoscuta este funcţia $x = x(t)$, pe care o căutăm de asemenea în clasa originalelor. Observând, ca şi în cazul precedent, că în partea dreaptă a egalităţii (8.7) apare un produs de convoluţie, vom putea scrie

$$X(s) = F(s) + K(s)X(s)$$

de unde rezultă

$$X(s) = \frac{F(s)}{1-K(s)}$$

pentru $\operatorname{Re} s =$ suficient de mare. Dacă raportul obţinut este imaginea unei funcţii cunoscute, soluţia căutată este unică şi coincide cu această funcţie. Dacă nu se poate afirma că raportul obţinut este imaginea unei funcţii cunoscute, vom scrie

$$X(s) = F(s) + \frac{K(s)}{1-K(s)}F(s)$$

Despre raportul $K(s)/(1-K(s))$ se poate demonstra că este imaginea unei anumite funcţii original, pe care o vom nota $r = r(t)$, adică

$$\mathcal{L}\left\{\theta(t)r(t)\right\}(s) = \frac{K(s)}{1-K(s)}$$

şi atunci, folosind din nou Teorema lui Borel, obţinem pentru soluţia căutată expresia

$$x(t) = f(t) + \int_0^t r(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau, \quad t > 0$$

care în acelaşi timp, ne arată şi unicitatea ei. Funcţia de două variabile $k(t-\tau)$ se numeşte nucleul ecuaţiei Volterra, iar funcţia de două variabile $r(t-\tau)$ se numeşte nucleul rezolvant al acestei ecuaţii.

Cu ajutorul transformatei Laplace, se pot rezolva şi sisteme de ecuaţii integrale Volterra de speţa a doua, în care apar mai multe funcţii necunoscute. Un astfel de sistem, ce conţine numai două funcţii necunoscute y_1 şi y_2 este de forma

$$\begin{cases} y_1(t) = f_1(t) + \displaystyle\int_0^t k_{11}(t-\tau)\,y_1(\tau)\,d\tau + \int_0^t k_{12}(t-\tau)\,y_2(\tau)\,d\tau \\[2ex] y_2(t) = f_2(t) + \displaystyle\int_0^t k_{21}(t-\tau)\,y_1(\tau)\,d\tau + \int_0^t k_{22}(t-\tau)\,y_2(\tau)\,d\tau \end{cases}$$

în care $f_i, i = 1,2$ şi $k_{ij}, i,j = 1,2$ sunt funcţii original date. Aplicând transformata Laplace, se va obţine un sistem liniar algebric de două ecuaţii cu două necunoscute şi anume $Y_1(s), Y_2(s)$. După aflarea lor, se vor căuta originalele $y_1(t)$ şi $y_2(t)$, făcând în principal apel din nou la formula fundamentală (8.6).

Există însă şi ecuaţii de tip mixt, numite integro-diferenţiale, care conţin şi derivatele, dar şi integralele funcţiei (sau funcţiilor) necunoscute, care pot fi abordate prin metoda descrisă în acest paragraf, numită, numită uneori şi metoda operaţională.

8.2.3 Rezolvarea sistemelor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Definiţia 8.2.2 *Se numeşte* ***sistem diferenţial liniar de ordinul întâi cu coeficienţi constanţi*** *un sistem de forma:*

$$\begin{cases} y_1'(t) = a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) = a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + \cdots + a_{2n}y_n(t) + b_2(t) \\ \cdots \\ y_n'(t) = a_{n1}y_1(t) + a_{n2}y_2(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t) + b_n(t) \end{cases} \tag{8.8}$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i,j = \overline{1,n}, \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ *iar* $y_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I},\mathbb{R}), i = \overline{1,n}$, *sunt funcţii necunoscute.*

Definiţia 8.2.3 *Dacă în (8.8)* $b_1(t) = b_2(t) = ... = b_n(t) = 0$ *pe* $\mathbb{I}$ *sistemul (8.8) se numeşte* ***omogen***, *iar în caz contrar* ***neomogen***.

Una din proprietăţile remarcabile ale sistemelor liniare este aceea că orice soluţie a lor este definită pe întreg intervalul $\mathbb{I}$.

Rezolvarea ecuaţiei implică următoarele etape:

I. *Transformarea sistemului diferenţial în sistem liniar algebric*

Se aplică transformata Laplace fiecărei ecuaţii a sistemului diferenţial. Se folosesc teoremele enunţate la ecuaţii diferenţiale. Se obţine un sistem algebric liniar.

II. *Rezolvarea sistemului algebric.*

III. *Determinarea originalului funcţiilor soluţie a sistemului algebric.*

Exerciţiul 5 Să se afle soluţia sistemului

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2y_1(t) - y_2(t) + \sin t \\ y_2'(t) = 4y_1(t) + 2y_2(t) + \cos t \end{cases}$$

cu condiţiile iniţiale $y_1(0) = 0, \;\; y_2(0) = 1, t > 0$.

Rezolvare.

I. *Transformarea sistemului diferenţial în sistem algebric.*

Aplicăm transformata Laplace ecuaţiilor sistemului:

$\mathcal{L}\{y_1'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{-2y_1(t) - y_2(t) + \sin t\}(s)$

$\mathcal{L}\{y_2'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{4y_1(t) + 2y_2(t) + \cos t\}(s)$.

Notăm $\mathcal{L}\{y_1(t)\}(s) = Y_1(s)$,

$\mathcal{L}\{y_2(t)\}(s) = Y_2(s)$,

$\mathcal{L}\{y_1'(t)\}(s) = sY_1(s) - y_1(0) = sY_1(s)$,

$\mathcal{L}\{y_2'(t)\}(s) = sY_2(s) - y_2(0) = sY_2(s) - 1$

$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$,

$\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$.

Obţinem

$$\begin{cases} sY_1(s) = -2Y_1(s) - Y_2 + \frac{1}{s^2+1} \\ sY_2(s) - 1 = 4Y_1(s) + 2Y_2(s) + \frac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+2)Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{1}{s^2+1} \\ -4Y_1(s) + (s-2)Y_2(s) = 1 + \frac{s}{s^2+1} \end{cases}.$$

II. *Rezolvarea sistemului algebric.*

$$\begin{cases} Y_1(s) = -\frac{s^2+3}{s^4+s^2} = -\frac{3}{s^2} + \frac{2}{s^2+1} \\ Y_2(s) = \frac{s^3+3s^2+3s+6}{s^4+s^2} = \frac{6}{s^2} + \frac{3}{s} - \frac{2s+3}{s^2+1} \end{cases}$$

III. *Determinarea originalului soluţiilor sistemului algebric.*

$$\begin{cases} y_1(t) = -3t + 2\sin t, t > 0, \\ y_2(t) = 6t + 3 - 2\cos t - 3\sin t, t > 0. \end{cases}$$

Exerciţiul 6 Utilizând transformata Laplace să se rezolve următoarul sistem diferenţial:

$$\begin{cases} x'(t) - x(t) + 2y(t) = 0 \\ x''(t) + 2y'(t) = (2t - \cos 2t)\theta(t) \\ x(0) = 0, x'(0) = 2, y(0) = -1. \end{cases}$$

I. *Transformarea sistemului diferenţial în sistem algebric.*

$\mathcal{L}\{x'(t)\}(s) - \mathcal{L}\{x(t)\}(s) - 2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \mathcal{L}\{0\}(s)$
$\mathcal{L}\{x''(t)\}(s) + 2\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = \mathcal{L}\{(2t - \cos 2t)\theta(t)\}(s)$
$\mathcal{L}[x(t)](s) = X(s),$
$\mathcal{L}[y(t)](s) = Y(s)$
$\mathcal{L}[x'(t)](s) = sX(s) - 0,$
$\mathcal{L}[x''(t)](s) = s^2X(s) - s \cdot 0 - 2$
$\mathcal{L}[y'(t)](s) = sY(s) + 1$
$\mathcal{L}\{(2t - \cos 2t)\theta(t)\}(s) = \dfrac{2}{s^2} - \frac{s}{s^2+4}$

$$\begin{cases} sX(s) - X(s) + 2Y(s) = 0 \\ s^2X(s) - 2 + 2sY(s) + 2 = \dfrac{2}{s^2} - \frac{s}{s^2+4} \end{cases}$$

II. *Rezolvarea sistemului algebric.*

$$\begin{cases} sX(s) - X(s) + 2Y(s) = 0 \\ s^2X(s) - 2 + 2sY(s) + 2 = \dfrac{2}{s^2} - \frac{s}{s^2+4} \end{cases}$$

$$X(s) = \frac{-s^3 + 2s^2 + 8}{4s^3 + s^5}$$

$$Y(s) = \frac{s^4 - 3s^3 + 2s^2 - 8s + 8}{8s^3 + 2s^5}.$$

III. *Determinarea originalului soluţiilor sistemului algebric.*

$$X(s) = \frac{-s^3 + 2s^2 + 8}{4s^3 + s^5} = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s^2 + 4} \Rightarrow$$

$x(t) = \left(t^2 - \frac{1}{2}\sin 2t\frac{1}{2}\right)\theta(t)$

$$Y(s) = \frac{s^4 - 3s^3 + 2s^2 - 8s + 8}{8s^3 + 2s^5} = \frac{s-1}{2(s^2+4)} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}$$

$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{1}{2}\cos 2t - t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t^2\right)\theta(t).$