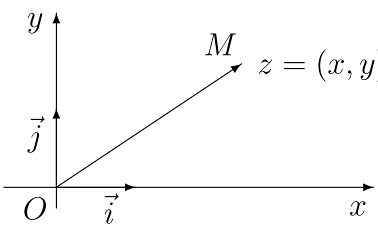
FUNCŢII COMPLEXE DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ
1. Structura algebrică şi topologică a mulţimii numerelor complexe

Un număr complex este o pereche ordonată de numere reale (x, y). Mulţimea numerelor complexe, notată $\mathbb{C}$, poate fi identificată cu $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$. Deci, două numere complexe $z_1 = (x_1, y_1)$ şi $z_2 = (x_2, y_2)$ sunt egale dacă şi numai dacă $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$.

1.1. Reprezentarea numerelor complexe în plan. Raportăm mulţimea punctelor dintr-un plan ω la un sistem de axe ortogonale cu originea într-un punct O.



Aplicaţia $f : \mathbb{C} \to \omega$, $f(x, y) = M$, unde $M(x, y) \in \omega$, este o bijecţie. M se numeşte afixul numărului complex $z = (x, y)$ în ω. Uneori, în loc de M, vom nota tot z. Fie $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ vectorul de poziţie al punctului M. Dacă $z = (x, y)$, atunci $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

Poziţia punctului M în planul ω mai poate fi dată prin coordonatele sale polare r, ϕ, unde $r = \|\overrightarrow{r}\| = d(O, M)$, iar $\phi \in [0, 2\pi)$ este unghiul cu care trebuie rotit versorul $\overrightarrow{i}$ al axei Ox, în sens pozitiv (trigonometric sau direct), pentru a obţine orientarea lui $\overrightarrow{r}$. Uneori vom lua $\phi \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$ convenabil sau $\phi \in \mathbb{R}$.

Definiţia 1. Numim *modulul* numărului complex $z = (x, y)$, numărul real pozitiv

$$r = \mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Numim *argument al* lui $z \neq (0, 0)$, orice număr real ϕ care satisface

$$\cos\phi = x/\mid z \mid, \qquad \sin\phi = y/\mid z \mid . \tag{2}$$

Numărul complex $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$ are argumentul nedeterminat.

Observaţia 1. 1) În orice interval $[\alpha, \alpha + 2\pi)$, sistemul de mai sus are soluţie unică, pe care o notăm $\arg_\alpha z$ şi pe care, prin abuz de limbaj o numim *argumentul lui* z *în* $[\alpha, \alpha + 2\pi)$. Pentru $\alpha = 0$, $\arg_0 z$ se numeşte *argumentul redus* al numărului complex z.

2) Se notează $Arg\, z$ mulţimea tuturor argumentelor lui z, care este de forma

$$Arg\ z = \{\arg_0\ z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

sau

$$Argz = \{\arg_\alpha\ z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

3) Două numere complexe nenule z_1 şi z_2 sunt egale dacă şi numai dacă modulele lor coincid şi $Arg\ z_1 = Arg\ z_2$ (în sensul că argumentele lor diferă prin $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Exemple.

$z_1 = (-1, \sqrt{3}) \Longrightarrow \mid z_1 \mid = 2,\ \arg_0 z_1 = 2\pi/3,\ Arg\ z_1 = \{(2\pi/3) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

$z_2 = (0, -5) \Longrightarrow \mid z_2 \mid = 5,\ \arg_0 z_2 = 3\pi/2,\ Arg\ z_2 = \{(3\pi/2) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$
$z_3 = (-2, 0) \Longrightarrow \mid z_3 \mid = 2,\ \arg_0 z_3 = \pi,\ Arg\ z_3 = \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

1.2. Structura algebrică a lui $\mathbb{C}$

Definiţia 2. *Adunarea* pe $\mathbb{C}$ este o lege de compoziţie internă pe $\mathbb{C}$ care asociază oricărei perechi $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, un număr complex notat $z_1 + z_2$, numit suma lor, dat de

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \tag{3}$$

Definiţia 3. *Înmulţirea pe* $\mathbb{C}$ este o lege de compoziţie internă, care asociază oricărei perechi de numere complexe (z_1, z_2), cu $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, un număr complex notat $z_1 z_2$, numit *produsul lor,* definit prin

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + y_1 x_2)\,. \tag{4}$$

Teorema 1. $(\mathbb{C}, +, .)$ *este corp comutativ. Elementele* $(0, 0)$ *şi* $(1, 0)$ *sunt elemente neutre la adunarea şi înmulţirea din* $\mathbb{C}$.

Observaţia 2. Fie $\mathbb{R}^{\mathbb{C}} = \{(x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$. Imaginile în plan ale elementelor acestei mulţimi sunt situate pe Ox şi reciproc, orice punct al axei Ox este imaginea unui element din $\mathbb{R}^{\mathbb{C}}$. Observăm că $\mathbb{R}$ este izomorf cu $\mathbb{R}^{\mathbb{C}}$ prin aplicaţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{C}},\ f(x) = (x, 0)$. Prin această bijecţie, $0_{\mathbb{C}}$ se identifică cu numărul real 0.

Observaţia 3. Convenim să notăm $(1, 0)$ cu 1 (şi îl numim *unitatea reală)* şi $(0, 1)$ cu i (numit *unitatea imaginară).* Atunci orice număr complex $z = (x, y)$ se scrie $z = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, deci

$$z = x + iy. \tag{5}$$

Aceasta se numeşte *forma algebrică* a numărului complex z. Apoi, x şi y se numesc *partea reală,* respectiv *partea imaginară* a lui z.

Observaţia 4. Dacă $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, atunci notând $r = \mid z \mid$, $\phi = \arg_\alpha z$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrar), din (2) rezultă că $x = r \cos\phi$, $y = r \sin\phi$. Din (5) obţinem

$$z = r(\cos\phi + i \sin\phi), \tag{6}$$

numită *forma trigonometrică* a numărului z.

Observaţia 5. a) Dacă $z_i = r_i(\cos\phi_i + i \sin\phi_i),\ i = 1, 2$, atunci

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)]. \tag{7}$$

b) Dacă $z = r(\cos\phi + i \sin\phi) \neq 0$, atunci

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\phi + i \sin\phi)} = \frac{1}{r}(\cos\phi - i \sin\phi) = \frac{1}{r}\left[\cos(-\phi) + i \sin(-\phi)\right], \tag{8}$$

deci $Arg\,(1/z) = -Arg\ z$ (egalitate ca mulţimi).

Definiţia 4. Numim *conjugatul numărului complex* z, numărul $\overline{z}= x - iy$.

Imaginile lui z şi $\overline{z}$ în plan sunt puncte simetrice faţă de axa reală. Avem $|\overline{z}| = \sqrt{x^2+y^2} =| z |$, $\arg_0 \overline{z} = -\arg_0 z \pmod{2\pi}$.

Observaţia 6. Dacă $z \neq 0$ şi $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, atunci

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi), n \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Pentru $r =| z |= 1$, obţinem aşa-numita *formulă a lui Moivre:*

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi, n \in \mathbb{Z}, \phi \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Câtul a două numere complexe $z_1 \in \mathbb{C}$ şi $z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $z_i = r_i(\cos\phi_i + i\sin\phi_i), i = 1, 2$, $r_2 \neq 0$, este

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)] \tag{11}$$

1.3 Topologia lui $\mathbb{C}$. Limită. Continuitate

O funcţie $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se numeşte *funcţie complexă de variabilă complexă* $z = x+iy \in E$.

Separând partea reală de cea imaginară a numărului complex $f(z)$, obţinem $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $(\forall)z = x + iy \in E$. Notăm $u = \mathrm{Re}\, f$, $v = \mathrm{Im}\, f$.

Pe mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe se introduce metrica $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ dată de $d(z_1, z_2) =| z_1 - z_2 |, (\forall)\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dacă $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$, atunci $d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. S-a obţinut astfel distanţa euclidiană. Deci $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{R}^2$ pot fi identificate şi ca spaţii metrice.

Definiţia 5. Numim *disc (deschis)* în $\mathbb{C}$ *de centru* z_0 *şi rază* $r > 0$, mulţimea tuturor punctelor $z \in \mathbb{C}$ situate la distanţă mai mică decât r faţă de punctul z_0. Se notează $\Delta(z_0, r)$:

$$\Delta(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} / \mid z - z_0 \mid < r\}.$$

Observaţia 7. Noţiunile de *limită a unei funcţii într-un punct de acumulare şi de continuitate a unei funcţii într-un punct din domeniu* sunt cazuri particulare ale noţiunilor similare din spaţii metrice oarecare. Ele sunt presupuse cunoscute. Reamintim doar câteva rezultate imediate, identificând $z = x + iy$ cu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Propoziţia 1. *Fie* $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *şi* z_0 *un punct de acumulare al mulţimii* E*. Atunci* f *are limită în* $z_0 = x_0 + iy_0$ *dacă şi numai dacă* $u = \mathrm{Re}\, f$ *şi* $v = \mathrm{Im}\, f$ *au limite în* (x_0, y_0)*. În acest caz,*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x, y).$$

Propoziţia 2. *Funcţia* $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ *este continuă în* $z_0 = x_0 + iy_0 \in E$ *dacă şi numai dacă* u *şi* v *sunt continue în* (x_0, y_0)*.*

2. Funcţii monogene. Funcţii olomorfe. Condiţiile Cauchy-Riemann

2.1. Funcţii monogene

Fie $z_0 \in D$, D un domeniu şi $f : D \to \mathbb{C}$ o funcţie dată. Construim funcţia $R : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $R(z) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

Definiţia 1. Se spune că funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ este *derivabilă* sau *monogenă în* $z_0 \in D$, dacă R are limită finită în punctul z_0. Această limită, dacă există, se numeşte *derivata funcţiei* f *în* z_0 şi se notează $f'(z_0)$. Deci,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{1}$$

Observaţia 1. Orice funcţie $f : D \to \mathbb{C}$ monogenă în $z_0 \in D$ este continuă în z_0, pentru că, oricare ar fi $z \in D \setminus \{z_0\}$, putem scrie

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0).$$

Definiţia 2. Fie D un domeniu. Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ se numeşte *diferenţiabilă în* $z_0 \in D$ dacă există o constantă $c \in \mathbb{C}$ şi o funcţie $g : D \to \mathbb{C}$ astfel încât $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0) = 0$ şi

$$f(z) - f(z_0) = c(z - z_0) + g(z)|z - z_0|, \ (\forall)\ z \in D. \tag{2}$$

Propoziţia 1. *Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ este monogenă în $z_0 \in D$ dacă şi numai dacă este diferenţiabilă în z_0. În acest caz, în (2) avem $c = f'(z_0)$ şi g este unic determinată.*

Demonstraţie. Necesitatea. Fie f monogenă în z_0. Luăm $c = f'(z_0)$ şi

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{|z - z_0|} - f'(z_0)\dfrac{z - z_0}{|z - z_0|}, & z \in D \setminus \{z_0\} \\ 0, & z = z_0 \ . \end{cases}$$

Evident, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0) = 0$ şi are loc (2), adică g este diferenţiabilă în z_0. În plus, g este unică.

Suficienţa. Presupunem că are loc (2) cu c şi g ca în Definiţia 2. Atunci, pentru orice $z \in D \setminus \{z_0\}$,

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c + g(z)\frac{|z - z_0|}{z - z_0} \ .$$

Cum $|z - z_0| \,/\, (z - z_0)$ este mărginit şi $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$, rezultă că există

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = c,$$

deci f este derivabilă în z_0 şi $f'(z_0) = c$.

Dăm în continuare un rezultat fundamental pentru acest paragraf. El furnizează condiţii necesare şi suficiente de monogenitate într-un punct pentru o funcţie dată.

Teorema 1.(Cauchy-Riemann) *Fie D un domeniu în $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ şi $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ o funcţie dată. Atunci f este monogenă în z_0 dacă şi numai dacă u şi v sunt diferenţiabile în z_0 şi au loc condiţiile de monogenitate Cauchy-Riemann în z_0:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases} \tag{CR}$$

În plus, în acest caz, are loc formula de derivare

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\right]. \tag{3}$$

Demonstraţie. Conform Propoziţiei 1, f este monogenă în z_0 dacă şi numai dacă este diferenţiabilă în z_0. Scriind în (2), $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $c = c_1 + ic_2$ şi $g(z) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$, se obţine

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)] =$$
$$= (c_1 + ic_2)[(x - x_0) + i(y - y_0)] + [\alpha(x, y) + i\beta(x, y)]|z - z_0|. \tag{4}$$

Egalând părţile reale între ele şi cele imaginare între ele, putem scrie în mod echivalent

$$\begin{cases} u(x, y) - u(x_0, y_0) = c_1(x - x_0) - c_2(y - y_0) + \alpha(x, y)|z - z_0|, \\ v(x, y) - v(x_0, y_0) = c_2(x - x_0) + c_1(y - y_0) + \beta(x, y)|z - z_0|, \end{cases}$$

cu $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \alpha(x, y) = \alpha(x_0, y_0) = 0$ şi $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \beta(x, y) = \beta(x_0, y_0) = 0$. Aceste relaţii sunt echivalente cu diferenţiabilitatea funcţiilor u şi v în (x_0, y_0) şi

$$c_1 = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \ -c_2 = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0), \ c_2 = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \ c_1 = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0),$$

adică au loc condiţiile Cauchy-Riemann.

Împărţind (4) prin $(x - x_0) + i(y - y_0)$ şi trecând la limită pentru $z \to z_0$, se obţin formulele de derivare (3).

Consecinţa 1. *În particular, dacă u, v admit derivate parţiale într-o vecinătate a punctului $z_0 \in D$, acestea sunt continue în z_0 şi au loc condiţiile (CR) în z_0, atunci f este monogenă în z_0.*

2.2. Funcţii olomorfe

Definiţia 3. Funcţia $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se numeşte *funcţie olomorfă pe o mulţime deschisă* $A \subseteq E$, dacă este monogenă în fiecare punct $z \in A$. Se notează $f \in \mathcal{O}(A)$.

Dăm în continuare, fără demonstraţie, următorul rezultat- variantă a Consecinţei 1 (consecinţă a Teoremei Cauchy-Riemann) pentru cazul funcţiilor olomorfe pe domenii. Observăm că, în acest caz, nu mai este necesară ipoteza de continuitate a derivatelor parţiale ale lui u şi v.

Teorema 2. *Dacă D este un domeniu în $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ este o funcţie dată, u, v admit derivate parţiale pe D şi au loc condiţiile Cauchy-Riemann pe D, atunci $f \in \mathcal{O}(D)$.*

2. Funcţii monogene. Funcţii olomorfe. Condiţiile Cauchy-Riemann

1. Funcţii olomorfe

Definiţia 1. Funcţia $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se numeşte *funcţie olomorfă pe o mulţime deschisă* $A \subseteq E$, dacă este monogenă în fiecare punct $z \in A$. Se notează $f \in \mathcal{O}(A)$.

Teorema 1. (Teorema Cauchy-Riemann, varianta globală) *Dacă D este un domeniu în $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ este o funcţie dată, u, v admit derivate parţiale pe D şi au loc condiţiile Cauchy-Riemann pe D, atunci $f \in \mathcal{O}(D)$.*

Vom prezenta în continuare câteva proprietăţi remarcabile ale funcţiilor olomorfe pe domenii. Ele reprezintă criterii practice de recunoaştere ale unor funcţii olomorfe. Începem cu noţiunea de funcţie armonică.

Definiţia 2. O funcţie de două variabile reale $u : E \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se numeşte *funcţie armonică pe E* dacă u admite derivate parţiale de ordinul 2 în raport cu x şi în raport cu y şi dacă $\Delta u = 0$, unde prin Δ am notat laplacianul, adică

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Vom stabili acum două rezultate ce dau o legătură între funcţii complexe olomorfe şi funcţii reale armonice.

Teorema 2. *Dacă $f = u + iv \in \mathcal{O}(D)$ (D domeniu în $\mathbb{C}$) şi dacă $u, v \in C^2(D)$, atunci u şi v sunt armonice pe D.*

Demonstraţie. Întrucât f este olomorfă pe D, există derivatele parţiale ale lui u şi v şi au loc condiţiile Cauchy-Riemann pe D. În plus,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}), (\forall) z = x + iy \in D. \tag{1}$$

Derivând (1) în raport cu x, apoi în raport cu y şi folosind egalitatea derivatelor parţiale mixte (conform Teoremei lui Schwarz), găsim

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}).$$

Egalând părţile reale între ele şi cele imaginare între ele, obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \end{cases}$$

deci u şi v sunt armonice.

Teorema 3. *Dacă u este o funcţie armonică pe un domeniu simplu conex $D \subseteq \mathbb{C}$, atunci există o funcţie $v : D \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f(z) = u + iv$ să fie olomorfă pe D (altfel spus, există $f \in \mathcal{O}(D)$ având partea reală u).*

Analog se poate afla partea reală u a funcţiei olomorfe f atunci când se cunoaşte partea imaginară v, funcţie armonică.

Teorema 3′. *Dacă v este o funcţie armonică pe un domeniu simplu conex $D \subseteq \mathbb{C}$, atunci există o funcţie $u : D \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f(z) = u + iv$ să fie olomorfă pe D.*

Exerciţiul 1. Să se determine o funcţie $f = u + iv$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, ştiind că partea sa imaginară este $v(x, y) = e^x \cos y$ şi că $f(0) = i$.

Etapa 1. Verificăm întâi că v este funcţie armonică. Observăm că $\partial^2 v/\partial x^2 = e^x \cos y$ şi $\partial^2 v/\partial y^2 = -e^x \cos y$, deci $\Delta v = 0$.

Etapa a 2-a. Conform condiţiilor Cauchy-Riemann, putem scrie

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy = -e^x \sin y dx - e^x \cos y dy.$$

De aici $u\,(x, y) = -e^x \sin y + k$, k constantă. Deci, $f(z) = u + iv = -e^x \sin y + ie^x \cos y + k$. Din condiţia $f(0) = i \Rightarrow k = 0$, deci $f(z) = ie^x(\cos y + i \sin y)$. Vom vedea ulterior că $z \mapsto e^x(\cos y + i \sin y)$ este funcţia exponenţială în planul complex. Deci $f(z) = ie^z$.

Exerciţiul 2. Fie $f \in \mathcal{O}\,(D)\,,\ f\,(z) \neq 0$ pe D. Arătaţi că f este constantă pe D dacă şi numai dacă arg f este constant.

Rezolvare. Prima implicaţie este evidentă. Să demonstrăm că dacă $\varphi =$ arg $f =$constant, atunci $f =$constant. Fie $\arg f =$ constant. Dar argumentul φ al lui f este dat de $arctg v/u$, pentru că avem:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{cases},$$

deci $tg\ \varphi = v/u$. Rezultă că v/u este constant. Derivăm această egalitate în raport cu x, apoi în raport cu y :

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u\dfrac{\partial v}{\partial y} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Conform relaţiilor Cauchy-Riemann,

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ v\dfrac{\partial v}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Cum $u^2 + v^2 \neq 0$, sistemul are soluţie unică $\partial u/\partial x = \partial v/\partial x = 0$, de unde avem şi $\partial u/\partial y = \partial v/\partial y = 0$, adică $u,\ v$ sunt constante, deci $f =$constantă.