Analiză matematică - curs 10
Integrale improprii

Facultatea de Mecanică

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iași

Punerea problemei

În cadrul studiului integrabilității Riemann a unei funcții f s-au evidențiat două condiții esențiale:

Punerea problemei

În cadrul studiului integrabilității Riemann a unei funcții f s-au evidențiat două condiții esențiale:

1. funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este definită pe interval închis și mărginit (interval compact);

Punerea problemei

În cadrul studiului integrabilității Riemann a unei funcții f s-au evidențiat două condiții esențiale:

1. funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este definită pe interval închis și mărginit (interval compact);
2. funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este mărginită pe $[a, b]$.

Punerea problemei

În cadrul studiului integrabilităţii Riemann a unei funcţii f s-au evidenţiat două condiţii esenţiale:

1. funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este definită pe interval închis şi mărginit (interval compact);
2. funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este mărginită pe $[a, b]$.

În cele ce urmează vom renunţa pe rând la cele două condiţii şi vom defini integralele Riemann în sens generalizat sau integrale improprii. Se impun astfel două generalizări:

Punerea problemei

În cadrul studiului integrabilităţii Riemann a unei funcţii f s-au evidenţiat două condiţii esenţiale:

1. funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este definită pe interval închis şi mărginit (interval compact);
2. funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este mărginită pe $[a, b]$.

În cele ce urmează vom renunţa pe rând la cele două condiţii şi vom defini integralele Riemann în sens generalizat sau integrale improprii. Se impun astfel două generalizări:

1. funcţia este definită pe interval nemărginit;

Punerea problemei

În cadrul studiului integrabilității Riemann a unei funcții f s-au evidențiat două condiții esențiale:

1. funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este definită pe interval închis și mărginit (interval compact);
2. funcția $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este mărginită pe $[a, b]$.

În cele ce urmează vom renunța pe rând la cele două condiții și vom defini integralele Riemann în sens generalizat sau integrale improprii. Se impun astfel două generalizări:

1. funcția este definită pe interval nemărginit;
2. funcția este nemărginită pe $[a, b]$.

Punerea problemei

În cadrul studiului integrabilităţii Riemann a unei funcţii f s-au evidenţiat două condiţii esenţiale:

1. funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este definită pe interval închis şi mărginit (interval compact);
2. funcţia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este mărginită pe $[a, b]$.

În cele ce urmează vom renunţa pe rând la cele două condiţii şi vom defini integralele Riemann în sens generalizat sau integrale improprii. Se impun astfel două generalizări:

1. funcţia este definită pe interval nemărginit;
2. funcţia este nemărginită pe $[a, b]$.

Evident mai apare şi situaţia cumulată a unei funcţii nemărginite definită pe interval nemărginit.

Integrala improprie de speța întâi - Definiții

Definiția 1.1

Fie $f : [\,a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Funcția f se numește **integrabilă pe** $[\,a, +\infty)$ dacă
1. f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, $\forall\ b \in \mathbb{R},\ \ b > a$

Integrala improprie de speța întâi - Definiții

Definiția 1.1

Fie $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Funcția f se numește **integrabilă pe** $[a, +\infty)$ dacă
1. f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, $\forall\ b \in \mathbb{R},\ b > a$
2. există și este finită limita

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Integrala improprie de speţa întâi - Definiţii

Definiţia 1.1

Fie $f : [\,a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte **integrabilă pe** $[\,a, +\infty)$ dacă
1. f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, $\forall\ b \in \mathbb{R},\ b > a$
2. există şi este finită limita

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Notăm

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Dacă limita din relaţia (1) există şi este finită spunem că integrala $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ este **convergentă** iar, dacă limita nu există sau este infinită spunem că integrala este **divergentă**.

Integrala improprie de speța întâi - Definiții

Analog se introduc următoarele integrale:

Definiția 1.2

Fie $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$. Funcția f se numește **integrabilă pe** $(-\infty, b]$ dacă
1. f este integrabilă pe intervalul $[a, b]$, $\forall\ a \in \mathbb{R},\ a < b$
2. există și este finită limita

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Notăm

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Dacă limita din relația (2) există și este finită spunem că integrala este **convergentă** iar, în caz contrar spunem că integrala este **divergentă**.

Integrala improprie de speța întâi - Definiții

Definiția 1.3

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Funcția f se numește **integrabilă pe** $\mathbb{R}$ dacă
1. f este integrabilă pe orice interval compact $[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$
2. există și este finită limita

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

În acest caz integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ se numește **convergentă**.

Exemple

Exemplul 1.4

1. Pentru $a > 0$,

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{este} \quad \begin{cases} \text{convergentă,} & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă,} & \text{dacă } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Exemple

Exemplul 1.4

1. Pentru $a > 0$,

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \ \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă,} & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă,} & \text{dacă } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

2. Integrala $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ este divergentă, deoarece

$$\int_0^b \sin x\ dx = 1 - \cos b$$

și nu există $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \cos b$.

Exemple

Exemplul 1.4

1. Pentru $a > 0$,

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \quad \text{este} \quad \begin{cases} \text{convergentă}, & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă}, & \text{dacă } \alpha \le 1. \end{cases}$$

2. Integrala $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ este divergentă, deoarece

$$\int_0^b \sin x\; dx = 1 - \cos b$$

și nu există $\displaystyle\lim_{b \to +\infty} \cos b$.

3. Integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$ este convergentă, deoarece există

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a \to -\infty} (1 - e^a) = 1.$$

Exemple

Exemplul 1.4

1. Pentru $a > 0$,

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \ \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă,} & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă,} & \text{dacă } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

2. Integrala $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ este divergentă, deoarece

$$\int_0^b \sin x\ dx = 1 - \cos b$$

și nu există $\lim\limits_{b \to +\infty} \cos b$.

3. Integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$ este convergentă, deoarece există

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a \to -\infty} (1 - e^a) = 1.$$

4. Integrala $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ este convergentă, deoarece există

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \operatorname{arctg} x \Big|_a^b = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) = \pi.$$

Formula Leibniz - Newton

Teorema 1.5 (Leibniz-Newton)

Fie $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$*. Dacă* f *admite o primitivă* F *pe intervalul* $[a, +\infty)$ *atunci*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} F(x) - F(a).$$

Proprietăți

Teorema 1.6

Fie $f_1, f_2 : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *și fie integralele improprii*

$$\int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx, \qquad \int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx. \tag{4}$$

Proprietăți

Teorema 1.6

Fie $f_1, f_2 : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *și fie integralele improprii*

$$\int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx, \qquad \int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx. \tag{4}$$

1. Dacă integralele (4) sunt ambele convergente, atunci funcția $f_1 + f_2$ *este integrabilă pe* $[a, +\infty)$ *și*

$$\int_a^{+\infty} [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx;$$

Proprietăți

Teorema 1.6

Fie $f_1, f_2 : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *și fie integralele improprii*

$$\int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx, \qquad \int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx. \tag{4}$$

1. Dacă integralele (4) sunt ambele convergente, atunci funcția $f_1 + f_2$ *este integrabilă pe* $[a, +\infty)$ *și*

$$\int_a^{+\infty} [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx;$$

2. Dacă $\lambda \neq 0$ *atunci integralele* $\int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx$ *și* $\int_a^{+\infty} \lambda f_1(x)\,dx$ *au aceeași natură și are loc*

$$\int_a^{+\infty} \lambda f_1(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx;$$

Proprietăți

Teorema 1.6

Fie $f_1, f_2 : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ și fie integralele improprii

$$\int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx, \qquad \int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx. \tag{4}$$

1. Dacă integralele (4) sunt ambele convergente, atunci funcția $f_1 + f_2$ este integrabilă pe $[a, +\infty)$ și

$$\int_a^{+\infty} [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = \int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx;$$

2. Dacă $\lambda \neq 0$ atunci integralele $\int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx$ și $\int_a^{+\infty} \lambda f_1(x)\,dx$ au aceeași natură și are loc

$$\int_a^{+\infty} \lambda f_1(x)\,dx = \lambda \cdot \int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx;$$

3. Dacă integralele (4) sunt convergente și $f_1(x) \leq f_2(x)$, $\forall\, x \geq a$, atunci

$$\int_a^{+\infty} f_1(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} f_2(x)\,dx.$$

Observații

Observația 1.7

Proprietățile 1. și 2. de mai sus demonstrează faptul că mulțimea funcțiilor integrabile pe $[a, +\infty)$ este subspațiu liniar al spațiului de funcții reale definite pe $[a, +\infty)$.

Observații

Observația 1.7

Proprietățile 1. și 2. de mai sus demonstrează faptul că mulțimea funcțiilor integrabile pe $[a, +\infty)$ este subspațiu liniar al spațiului de funcții reale definite pe $[a, +\infty)$.

Observația 1.8

Dacă una dintre integralele (4) este convergentă și cealaltă divergentă, atunci suma lor este divergentă. Dacă ambele integrale (4) sunt divergente suma lor poate fi divergentă sau convergentă.

Observații

Observația 1.7

Proprietățile 1. și 2. de mai sus demonstrează faptul că mulțimea funcțiilor integrabile pe $[a, +\infty)$ este subspațiu liniar al spațiului de funcții reale definite pe $[a, +\infty)$.

Observația 1.8

Dacă una dintre integralele (4) este convergentă și cealaltă divergentă, atunci suma lor este divergentă. Dacă ambele integrale (4) sunt divergente suma lor poate fi divergentă sau convergentă.

Exemplul 1.9

Integralele

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1}\,dx = \ln(x-1)\Big|_2^{+\infty} \quad \text{și} \quad -\int_2^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,dx = -\ln(x+1)\Big|_2^{+\infty}$$

sunt divergente, dar suma lor este convergentă:

$$\int_2^{+\infty} \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int_2^{+\infty} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right] dx = \ln \frac{x-1}{x+1}\Big|_2^{+\infty} = \ln 3$$

Aditivitate față de interval

Teorema 1.10

Dacă integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *este convergentă atunci, pentru orice număr real* $c \in \mathbb{R}$, *integralele* $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ *și* $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ *sunt convergente și are loc*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{5}$$

Aditivitate față de interval

Teorema 1.10

Dacă integrala $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *este convergentă atunci, pentru orice număr real* $c \in \mathbb{R}$, *integralele* $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ *și* $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ *sunt convergente și are loc*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{5}$$

Dacă există $c \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ *și* $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ *să fie convergente, atunci integrala* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *este convergentă și are loc (5). Dacă cel puțin una dintre* $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ *este divergentă atunci* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *este divergentă.*

Valoare principală

Dacă $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ este divergentă, dar există și este finită $\lim\limits_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ atunci spunem că f este **integrabilă pe $\mathbb{R}$ în sensul valorii principale (Cauchy)** iar

$$\mathrm{vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx \tag{6}$$

se numește **valoare principală** (în sens Cauchy) a integralei $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Valoare principală

Dacă $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ este divergentă, dar există și este finită $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ atunci spunem că f este **integrabilă pe $\mathbb{R}$ în sensul valorii principale (Cauchy)** iar

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \qquad (6)$$

se numește **valoare principală** (în sens Cauchy) a integralei $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exemplul 1.11

Integrala $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ este divergentă dar are valoarea principală π.

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\left(\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_{-a}^{+a} = \pi.$$

Valoare principală

Dacă $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ este divergentă, dar există și este finită $\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ atunci spunem că f este **integrabilă pe $\mathbb{R}$ în sensul valorii principale (Cauchy)** iar

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \tag{6}$$

se numește **valoare principală** (în sens Cauchy) a integralei $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Exemplul 1.11

Integrala $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ este divergentă dar are valoarea principală π.

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\left(\mathrm{arctg}x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_{-a}^{+a} = \pi.$$

Exercițiul 1.12

Arătați că integrala $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$ este divergentă dar are valoarea principală 0.

Criterii de convergență

Teorema 1.13 (Criteriul de comparație cu inegalități)

Fie $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ *astfel încât*

$$f(x) \leq g(x), \; \forall \, x \in [\, a, +\infty).$$

a) Dacă $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *este convergentă atunci integrala* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *converge.*

b) Dacă $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *este divergentă atunci integrala* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *diverge.*

Criterii de convergență

Teorema 1.13 (Criteriul de comparație cu inegalități)

Fie $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ *astfel încât*

$$f(x) \leq g(x),\ \forall\, x \in [\,a, +\infty).$$

a) Dacă $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *este convergentă atunci integrala* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *converge.*

b) Dacă $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *este divergentă atunci integrala* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *diverge.*

Teorema 1.14 (Criteriul de comparație cu limită)

Fie $f, g : [\,a, +\infty) \to \mathbb{R}_+$. *Admitem că există*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

a) Dacă $\ell \in (0, +\infty)$ *atunci integralele* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *și* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *au aceeași natură (converg sau diverg simultan).*

b) Dacă $\ell = 0$ *și* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *converge atunci* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *este convergentă.*

c) Dacă $\ell = +\infty$ *și* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *diverge atunci* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *este divergentă.*

Criterii de convergență

Teorema 1.15 (Criteriul în α)

Fie $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}_+$.
1) Dacă există $\alpha > 1$ astfel încât

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} f(x) = \ell \in [0, +\infty)$$

atunci $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ este convergentă.
2) Dacă există $\alpha \leq 1$ astfel încât

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} f(x) = \ell \in (0, +\infty]$$

atunci $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ este divergentă.

Exemple

Exemplul 1.16

1. Integralele de forma

$$\int_a^{+\infty} P(x)e^{-\lambda x^2}\,dx$$

unde $P(x)$ este un polinom, sunt convergente. Într-adevăr, oricare ar fi gradul polinomului $P(x)$, avem

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}P(x)e^{-\lambda x^2} = 0, \quad \alpha > 1.$$

2. Integralele de funcții raționale

$$\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

unde în care $Q(x)$ nu are rădăcini în intervalul $[\,a, +\infty)$, iar gradul polinomuluii $Q(x)$ de la numitor este mai mare cu cel puțin două unități dacât gradul polinomului $P(x)$, sunt convergente. Aceasta deoarece

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\frac{P(x)}{Q(x)} = \ell \text{ finit},$$

dacă $\alpha \geq 2$.

Exerciții

Exercițiul 1.17

Studiați convergența și în caz afirmativ calculați

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(2x^2+1)}$$

Exerciții

Exercițiul 1.17

Studiați convergența și în caz afirmativ calculați

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(2x^2+1)}$$

Funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(2x^2+1)}$$

satisface inegalitatea $f(x) > 0, (\forall)\, x \in [0, \infty)$.
Studiem convergența folosind criteriul în α.

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)(2x^2+1)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{2x^3+2x^2+x+1} = \frac{1}{2} < \infty \text{ pentru } \alpha = 3 > 1.$$

Deci, integrala este convergentă.
Pentru a o calcula, descompunem $f(x)$ în fracții simple.

Criterii de convergență

Teorema 1.18 (Criteriul lui Abel)

Fie $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. *Dacă*

(i) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *este convergentă,*

(ii) *funcția* g *este monotonă și mărginită pe* $[a, \infty)$,

atunci $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *este convergentă.*

Criterii de convergență

Teorema 1.18 (Criteriul lui Abel)

Fie $f, g : [\,a, +\infty) \to \mathbb{R}$. *Dacă*

(i) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *este convergentă,*

(ii) *funcția* g *este monotonă și mărginită pe* $[a, \infty)$,

atunci $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *este convergentă.*

Teorema 1.19 (Criteriul lui Dirichlet)

Fie $f, g : [\,a, +\infty) \to \mathbb{R}$. *Dacă*

(i) f *este integrabilă Riemann pe orice interval* $[a, b]$ *și există* $k > 0$ *astfel ca*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq k, \forall b > a,$$

(ii) *funcția* g *este monoton descrescătoare pe* $[a, \infty)$ *cu* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

atunci $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *este convergentă.*

Exemple

Exemplul 1.20

Integralele

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx, \qquad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx, \qquad a > 0,\ \alpha > 0$$

sunt convergente.

Exemple

Exemplul 1.20

Integralele

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx, \qquad \int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\, dx, \qquad a > 0,\ \alpha > 0$$

sunt convergente.

Exemplul 1.21 (Integralele lui Fresnel)

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx, \qquad \int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx$$

sunt convergente.

Definiții

Fie $f : [\,a, b\,) \to \mathbb{R}$ o funcție nemărginită în vecinătatea punctului b.

Definiția 1.22

Funcția f se numește **integrabilă** pe $[a, b)$, dacă *1.* f este integrabilă pe orice interval $[a, b - \varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$ *2.* există și este finită limita $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$. Spunem că integrala

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx. \tag{7}$$

este **convergentă**. Dacă limita de mai sus nu există sau este infinită spunem că f nu este integrabilă pe $[a, b)$ sau că integrala $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ este **divergentă**.

Definiții

Analog se introduc integralele

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Definiții

Analog se introduc integralele

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

pentru o funcție $f : (\, a, b\,] \to \mathbb{R}$ nemărginită în vecinătatea punctului a și

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Definiții

Analog se introduc integralele

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

pentru o funcție $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ nemărginită în vecinătatea punctului a și

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

pentru o funcție $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ nemărginită în vecinătățile punctelor a și respectiv b.

Definiții

Analog se introduc integralele

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

pentru o funcție $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ nemărginită în vecinătatea punctului a și

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

pentru o funcție $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ nemărginită în vecinătățile punctelor a și respectiv b.
Dacă $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ și f nu este mărginită în vecinătatea punctului c, studiul convergenței se reduce la cazurile precedente, scriind integrala

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Definiții

Analog se introduc integralele

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

pentru o funcție $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ nemărginită în vecinătatea punctului a și

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

pentru o funcție $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ nemărginită în vecinătățile punctelor a și respectiv b.
Dacă $f:[a,b]\setminus\{c\}\to\mathbb{R}$ și f nu este mărginită în vecinătatea punctului c, studiul convergenței se reduce la cazurile precedente, scriind integrala

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dacă ambele integrale din membrul drept sunt convergente, integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă, în caz contrar integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

Definiții

Analog se introduc integralele

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

pentru o funcție $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ nemărginită în vecinătatea punctului a și

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

pentru o funcție $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ nemărginită în vecinătățile punctelor a și respectiv b.
Dacă $f : [a, b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ și f nu este mărginită în vecinătatea punctului c, studiul convergenței se reduce la cazurile precedente, scriind integrala

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dacă ambele integrale din membrul drept sunt convergente, integrala $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă, în caz contrar integrala $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.Pentru ultima situație se definește de asemenea noțiunea de **valoare principală** (în sens Cauchy) prin următoarea limită (dacă există și este finită)

$$\mathrm{vp}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right) \qquad (8)$$

Exemple

Exemplul 1.23

1. Integrala

$$\int_0^b \frac{1}{x^\lambda}\,dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă,} & \text{dacă } \lambda < 1 \\ \text{divergentă,} & \text{dacă } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

Exemple

Exemplul 1.23

1. Integrala
$$\int_0^b \frac{1}{x^\lambda}\, dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă}, & \text{dacă } \lambda < 1 \\ \text{divergentă}, & \text{dacă } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

2. Integrala
$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\lambda}\, dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă}, & \text{dacă } \lambda < 1 \\ \text{divergentă}, & \text{dacă } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

Exemple

Exemplul 1.23

1. Integrala
$$\int_0^b \frac{1}{x^\lambda}\,dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă}, & \text{dacă } \lambda < 1 \\ \text{divergentă}, & \text{dacă } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

2. Integrala
$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\lambda}\,dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă}, & \text{dacă } \lambda < 1 \\ \text{divergentă}, & \text{dacă } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

3.
$$\int_0^b \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(x\ln x - x)\Big|_\varepsilon^b = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(b\ln b - b - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon\big) = b\ln b - b.$$

Exemple

Exemplul 1.23

1. Integrala

$$\int_0^b \frac{1}{x^\lambda}\,dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă}, & \text{dacă } \lambda < 1 \\ \text{divergentă}, & \text{dacă } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

2. Integrala

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\lambda}\,dx \text{ este } \begin{cases} \text{convergentă}, & \text{dacă } \lambda < 1 \\ \text{divergentă}, & \text{dacă } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

3.

$$\int_0^b \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}(x\ln x - x)\Big|_\varepsilon^b = \lim_{\varepsilon\to 0}(b\ln b - b - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon) = b\ln b - b.$$

4.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

este divergentă, după cum rezultă din 1., dar are valoarea principală 0.

Criteriu de convergență

Teorema 1.24 (Criteriul în λ)

Fie $f : [\,a, b\,) \to \mathbb{R}_+$.

1) *Dacă există* $\lambda < 1$ *astfel încât*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b - x)^{\lambda} f(x) = \ell \in [\,0, +\infty)$$

atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ *este convergentă.*

Criteriu de convergență

Teorema 1.24 (Criteriul în λ)

Fie $f : [\,a, b\,) \to \mathbb{R}_+$.

1) *Dacă există* $\lambda < 1$ *astfel încât*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b-x)^{\lambda} f(x) = \ell \in [\,0, +\infty)$$

atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *este convergentă.*

2) *Dacă există* $\lambda \geq 1$ *astfel încât*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} (b-x)^{\lambda} f(x) = \ell \in (\,0, +\infty]$$

atunci $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *este divergentă.*

Metode de calcul

Teorema 1.25 (Formula de integrare prin părți)

Dacă $f, g : [\,a, b\,) \to \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $b > a$ *sau* $b = +\infty$ *sunt funcții derivabile cu derivate continue pe* (a, b) *și există și este finită*

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)g(x),$$

atunci existența uneia dintre integralele $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ *și* $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ *antrenează existența celeilalte și are loc*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx. \tag{9}$$

Metode de calcul

Teorema 1.26 (Formula de schimbare de variabilă)

Fie $f : [c, d) \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}, c > d$ *sau* $c = +\infty$ *o funcție continuă pe* $[c, d)$.
Fie $\varphi : [a, b) \to [c, d)$, $b \in \mathbb{R}, b > a$ *sau* $b = +\infty$ *o funcție strict crescătoare, derivabilă, cu derivata continuă pe* $[a, b)$ *cu* $\varphi(a) = c$ *și* $\lim\limits_{\substack{t \to b \\ t < b}} \varphi(t) = d$.

Dacă una dintre integralele $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt$ *sau* $\displaystyle\int_c^d f(x)\, dx$ *este convergentă atunci converge și cealaltă și are loc formula*

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_c^d f(x)\, dx. \tag{10}$$

Exemplu

Exemplul 1.27

Să se studieze convergența, iar în caz afirmativ să se calculeze

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt{|x^2-1|}}$$