Analiză matematică - curs 11
Integrale curbilinii

Facultatea de Mecanică

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iași

Curbe în $\mathbb{R}^k$

Definiția 1.1

Fie I un interval de numere reale. O funcție continuă

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^k, \qquad \gamma(t) = (f_1(t), ..., f_k(t)).$$

se numește **curbă** în $\mathbb{R}^k$.

Curbe în $\mathbb{R}^k$

Definiţia 1.1

Fie I un interval de numere reale. O funcţie continuă

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^k, \qquad \gamma(t) = (f_1(t), ..., f_k(t)).$$

se numeşte **curbă** în $\mathbb{R}^k$.

În cele ce urmează vom discuta numai despre două tipuri de curbe:

Curbe în $\mathbb{R}^k$

Definiția 1.1

Fie I un interval de numere reale. O funcție continuă

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^k, \qquad \gamma(t) = (f_1(t), ..., f_k(t)).$$

se numește **curbă** în $\mathbb{R}^k$.

În cele ce urmează vom discuta numai despre două tipuri de curbe:

- $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, numite **curbe plane**;

Curbe în $\mathbb{R}^k$

Definiția 1.1

Fie I un interval de numere reale. O funcție continuă

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^k, \qquad \gamma(t) = (f_1(t), ..., f_k(t)).$$

se numește **curbă** în $\mathbb{R}^k$.

În cele ce urmează vom discuta numai despre două tipuri de curbe:

- $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, numite **curbe plane**;
- $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, numite **curbe în spațiu**;

Curbe în $\mathbb{R}^k$

Definiţia 1.1

Fie I un interval de numere reale. O funcţie continuă

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^k, \qquad \gamma(t) = (f_1(t), ..., f_k(t)).$$

se numeşte **curbă** în $\mathbb{R}^k$.

În cele ce urmează vom discuta numai despre două tipuri de curbe:

- $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, numite **curbe plane**;
- $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, numite **curbe în spaţiu**;

Observaţie

Fie $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ o curbă în spaţiu. Aceasta este descrisă prin aşa numitele ecuaţii parametrice:

$$(\gamma) \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t), \quad t \in [a, b], \end{cases} \tag{1}$$

unde f, g, h sunt funcţii continue pe $[a, b]$.

Definiții

Definiția 1.2

1. Curba γ se numește **închisă** dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, adică $f(a) = f(b)$, $g(a) = g(b)$, $h(a) = h(b)$.

Definiții

Definiția 1.2

1. Curba γ se numește **închisă** dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, adică $f(a) = f(b)$, $g(a) = g(b)$, $h(a) = h(b)$.
2. Curba γ se numește **simplă** dacă nu există două puncte distincte $t', t'' \in [\,a, b\,]$, $a \leq t' < t'' \leq b$, cu cel puțin una din inegalitățile extreme stricte, astfel încât $\gamma(t) = \gamma(t')$ (nu se autointersectează).

Definiții

Definiția 1.2

1. Curba γ se numește **închisă** dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, adică $f(a) = f(b)$, $g(a) = g(b)$, $h(a) = h(b)$.
2. Curba γ se numește **simplă** dacă nu există două puncte distincte $t', t'' \in [\,a, b\,]$, $a \leq t' < t'' \leq b$, cu cel puțin una din inegalitățile extreme stricte, astfel încât $\gamma(t) = \gamma(t')$ (nu se autointersectează).
3. Curba γ se numește **netedă** dacă funcțiile f, g, h sunt de clasă C^1 pe $[\,a, b\,]$ (sunt funcții continue cu derivate continue). O curbă se numește **netedă pe porțiuni**, dacă există un număr finit de subintervale ale intervalului $[\,a, b\,]$ determinate de $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ astfel ca restricția curbei la $[\,t_{i-1}, t_i\,]$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$ să fie netedă.

Definiții

Definiția 1.2

1. Curba γ se numește **închisă** dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, adică $f(a) = f(b)$, $g(a) = g(b)$, $h(a) = h(b)$.
2. Curba γ se numește **simplă** dacă nu există două puncte distincte $t', t'' \in [\,a, b\,]$, $a \leq t' < t'' \leq b$, cu cel puțin una din inegalitățile extreme stricte, astfel încât $\gamma(t) = \gamma(t')$ (nu se autointersectează).
3. Curba γ se numește **netedă** dacă funcțiile f, g, h sunt de clasă C^1 pe $[\,a, b\,]$ (sunt funcții continue cu derivate continue). O curbă se numește **netedă pe porțiuni**, dacă există un număr finit de subintervale ale intervalului $[\,a, b\,]$ determinate de $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ astfel ca restricția curbei la $[\,t_{i-1}, t_i\,]$, $\forall\ i = 1, \ldots, n$ să fie netedă.
4. Numim **lungime** a curbei γ, elementul $L(\gamma) \in [0, +\infty]$ definit prin

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \mid a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b,\ \ n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

unde marginea superioară se face după toate numerele naturale n și toate diviziunile intervalului $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.
Dacă lungimea unei curbe este finită spunem că respectiva curbă este **rectificabilă**.

Exemple de curbe și parametrizările acestora

1. **Cercul**
   Ecuația generală a unui cerc de rază r cu centrul în origine este
   $$x^2 + y^2 = r^2.$$
   Ecuațiile parametrice sunt date de:
   $$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases} \tag{2}$$

Exemple de curbe şi parametrizările acestora

1. **Cercul**
   Ecuaţia generală a unui cerc de rază r cu centrul în origine este
   $$x^2 + y^2 = r^2.$$
   Ecuaţiile parametrice sunt date de:
   $$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases} \tag{2}$$

2. **Elipsa**
   Ecuaţia generală a unei elipse cu centrul în origine şi de semiaxe egale cu $a > 0$ şi $b > 0$ este
   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
   Ecuaţiile parametrice sunt date de:
   $$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases} \tag{3}$$

Exemple de curbe şi parametrizările acestora

3. **Parabola**
   Ecuaţia generală a unei parabole este

$$y^2 = 2ax, \qquad a > 0.$$

Ecuaţiile parametrice sunt date de:

$$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2a} t^2 \\ y = t \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

Exemple de curbe și parametrizările acestora

3. **Parabola**
   Ecuația generală a unei parabole este

$$y^2 = 2ax, \qquad a > 0.$$

   Ecuațiile parametrice sunt date de:

$$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2a} t^2 \\ y = t \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

4. **Spirala cilindrică**
   Ecuațiile parametrice sunt date de:

$$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = t, \quad t \in [a, b]. \end{cases} \tag{5}$$

Lungimea unei curbe

Teorema 1.3

Dacă γ *definită de* (1) *este o curbă netedă, atunci ea este rectificabilă și lungimea ei este dată de:*

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2 + (h')^2}\, dt. \tag{6}$$

Lungimea unei curbe

Teorema 1.3

Dacă γ definită de (1) este o curbă netedă, atunci ea este rectificabilă și lungimea ei este dată de:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2 + (h')^2}\, dt. \tag{6}$$

Expresia

$$ds = \sqrt{(f')^2 + (g')^2 + (h')^2}\, dt \tag{7}$$

se numește **elementul de arc** al curbei γ.

Exemplu

Exemplul 1.4

Calculați lungimea curbei

$$(\gamma) : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2} \cdot \ln(\cos t) \\ z = tgt - t \end{cases} , t \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$$

Exemplu

Exemplul 1.4

Calculaţi lungimea curbei

$$(\gamma):\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2}\cdot \ln\left(\cos t\right) \\ z = tgt - t \end{cases}, t \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$$

A **orienta** o curbă înseamnă a alege un sens de parcurs pe ea. O asemanea curbă se numeşte **orientată**. Unul dintre sensuri îl numim pozitiv, iar sensul contrar se numeşte negativ. De obicei orientăm curba pozitiv în sensul creşterii parametrului t.

Exemplu

Exemplul 1.4

Calculați lungimea curbei

$$(\gamma):\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2}\cdot \ln(\cos t) \\ z = tgt - t \end{cases}, t \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$$

A **orienta** o curbă înseamnă a alege un sens de parcurs pe ea. O asemanea curbă se numește **orientată**. Unul dintre sensuri îl numim pozitiv, iar sensul contrar se numește negativ. De obicei orientăm curba pozitiv în sensul creșterii parametrului t.

Dacă curba γ este închisă și mărginește un domeniu oarecare, vom spune că *parcurgem curba* în **sens direct** sau *sens trigonometric* dacă prin deplasarea de-a lungul curbei domeniul mărginit este lăsat la stânga.

Integrala curbilinie de speța I.

Definiția 2.1

Fie γ o curbă netedă definită de ecuațiile și fie $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe domeniul D ce conține pe γ. Numim **integrala curbilinie de speța I** sau **integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului**

$$\int_\gamma F(x,y,z)\,ds = \int_a^b F(f(t),g(t),h(t)) \cdot \sqrt{(f')^2 + (g')^2 + (h')^2}\,dt. \tag{8}$$

Integrala curbilinie de speța I.

Definiția 2.1

Fie γ o curbă netedă definită de ecuațiile și fie $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe domeniul D ce conține pe γ. Numim **integrala curbilinie de speța I** sau **integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului**

$$\int_\gamma F(x,y,z)\,ds = \int_a^b F(f(t),g(t),h(t)) \cdot \sqrt{(f')^2+(g')^2+(h')^2}\,dt. \tag{8}$$

Propoziția 2.2

i. *Dacă γ este o curbă netedă și $F_1, F_2 : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe domeniul D ce conține pe γ iar $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci*

$$\int_\gamma [F_1(x,y,z)+F_2(x,y,z)]\,ds = \int_\gamma F_1(x,y,z)\,ds + \int_\gamma F_2(x,y,z)\,ds;$$

$$\int_\gamma \alpha F_1(x,y,z)\,ds = \alpha \int_\gamma F_1(x,y,z)\,ds.$$

ii. *Fie $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, cu γ_1, γ_2 curbe netede și fie $F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe domeniul D ce conține pe γ. Atunci*

$$\int_\gamma F(x,y,z)\,ds = \int_{\gamma_1} F(x,y,z)\,ds + \int_{\gamma_2} F(x,y,z)\,ds.$$

Exemplu

Observaţia 2.3

Valoarea integralei curbilinii de speţa I nu depinde nici de orientarea curbei γ., nice de parametrizarea aleasă pentru curbă.

Exemplul 2.4

1) Calculaţi $I = \int_C y \cdot e^{-x} ds$, unde

$$(C) : \begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right) \\ y = 2arctgt - t + 1 \end{cases} ; t \in [0, 1]$$

Interpretări fizice

Semnificații fizice ale integralei curbilinii de speța întâi. Dacă $\rho = \rho(x, y, z) > 0$ este o funcție continuă ce reprezintă densitatea de masă a unui fir material γ, atunci:

Interpretări fizice

Semnificații fizice ale integralei curbilinii de speța întâi. Dacă $\rho = \rho(x, y, z) > 0$ este o funcție continuă ce reprezintă densitatea de masă a unui fir material γ, atunci:

1. masa firului material γ este

$$M = \int_\gamma \rho(x, y, z)\, ds. \tag{9}$$

Interpretări fizice

Semnificații fizice ale integralei curbilinii de speța întâi. Dacă $\rho = \rho(x, y, z) > 0$ este o funcție continuă ce reprezintă densitatea de masă a unui fir material γ, atunci:

1. masa firului material γ este

$$M = \int_\gamma \rho(x, y, z)\, ds. \tag{9}$$

2. coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G, z_G)$ sunt

$$x_G = \frac{1}{M}\int_\gamma x\cdot\rho(x, y, z)\, ds, \quad y_G = \frac{1}{M}\int_\gamma y\cdot\rho(x, y, z)\, ds, \quad z_G = \frac{1}{M}\int_\gamma z\cdot\rho(x, y, z)\, ds \tag{10}$$

Interpretări fizice

3. momentele de inerție ale curbei γ în raport cu un plan (α), o dreaptă (d) sau un punct P se exprimă prin integrale de forma

$$I = \int_{\gamma} r^2 \cdot \rho(x, y, z)\, ds$$

unde r este distanța punctului curent (x, y, z) de pe curbă la planul (α), dreapta (d) și respectiv, la punctul P.

Interpretări fizice

3. momentele de inerție ale curbei γ în raport cu un plan (α), o dreaptă (d) sau un punct P se exprimă prin integrale de forma

$$I = \int_\gamma r^2 \cdot \rho(x, y, z)\, ds$$

unde r este distanța punctului curent (x, y, z) de pe curbă la planul (α), dreapta (d) și respectiv, la punctul P.

- Momentele de inerție ale curbei γ în raport cu planele de coordonate sunt date de:

$$I_{xoy} = \int_\gamma z^2 \rho(x, y, z) ds, \quad I_{yoz} = \int_\gamma x^2 \rho(x, y, z) ds, \quad I_{zox} = \int_\gamma y^2 \rho(x, y, z) ds. \tag{11}$$

Interpretări fizice

3. momentele de inerție ale curbei γ în raport cu un plan (α), o dreaptă (d) sau un punct P se exprimă prin integrale de forma

$$I = \int_\gamma r^2 \cdot \rho(x, y, z)\, ds$$

unde r este distanța punctului curent (x, y, z) de pe curbă la planul (α), dreapta (d) și respectiv, la punctul P.

- Momentele de inerție ale curbei γ în raport cu planele de coordonate sunt date de:

$$I_{xoy} = \int_\gamma z^2\, \rho(x, y, z) ds, \quad I_{yoz} = \int_\gamma x^2\, \rho(x, y, z) ds, \quad I_{zox} = \int_\gamma y^2\, \rho(x, y, z) ds. \tag{11}$$

- Momentele de inerție ale curbei γ în raport cu axele de coordonate sunt date de:

$$I_{ox} = \int_\gamma (y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z) ds, \quad I_{oy} = \int_\gamma (x^2 + z^2)\, \rho(x, y, z) ds. \tag{12}$$

Interpretări fizice

3. momentele de inerție ale curbei γ în raport cu un plan (α), o dreaptă (d) sau un punct P se exprimă prin integrale de forma

$$I = \int_\gamma r^2 \cdot \rho(x, y, z)\, ds$$

unde r este distanța punctului curent (x, y, z) de pe curbă la planul (α), dreapta (d) și respectiv, la punctul P.

- Momentele de inerție ale curbei γ în raport cu planele de coordonate sunt date de:

$$I_{xoy} = \int_\gamma z^2\, \rho(x, y, z) ds, \quad I_{yoz} = \int_\gamma x^2\, \rho(x, y, z) ds, \quad I_{zox} = \int_\gamma y^2\, \rho(x, y, z) ds. \tag{11}$$

- Momentele de inerție ale curbei γ în raport cu axele de coordonate sunt date de:

$$I_{ox} = \int_\gamma (y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z) ds, \quad I_{oy} = \int_\gamma (x^2 + z^2)\, \rho(x, y, z) ds. \tag{12}$$

- Momentul de inerție al curbei γ în raport cu originea axelor de coordonate este

$$I_o = \int_\gamma (x^2 + y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z) ds. \tag{13}$$

Exemplu

Exercițiul 2.5

Să se calculeze masa și să se determine centrul de greutate ale firului material omogen

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Definiție

Definiția 3.1

Fie $\gamma = \widehat{AB}$ o curbă netedă dată de

$$(\gamma) \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t), \quad t \in [\,a, b\,], \end{cases} \tag{14}$$

orientată de la $A(t = a)$ la $B(t = b)$ în sensul de creștere al parametrului t de la a la b. Fie P, Q, $R : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funcții continue pe domeniul D ce conține curba γ. Numim **integrala curbilinie de speța II**

$$\int_\gamma P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_a^b \left[P(f(t), g(t), h(t)) \cdot f'(t) + Q(f(t), g(t), h(t)) \cdot g'(t) + R(f(t), g(t), h(t)) \cdot h'(t)\right] \, dt. \tag{15}$$

Proprietăți

Propoziția 3.2

i. *Dacă γ este o curbă netedă și P_i, Q_i, $R_i : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$ sunt funcții continue pe domeniul D ce conține pe γ iar $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci*

$$\int_\gamma (P_1+P_2)\,dx+(Q_1+Q_2)\,dy+(R_1+R_2)\,dz = \int_\gamma P_1\,dx+Q_1\,dy+R_1\,dz+\int_\gamma P_2\,dx+Q_2\,dy+R_2\,dz;$$

$$\int_\gamma (\alpha P_1)\,dx + (\alpha Q_1)\,dy + (\alpha R_1)\,dz = \alpha \int_\gamma P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz.$$

ii. *Fie $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, cu γ_1, γ_2 curbe netede și fie funcțiile continue $P, Q, R : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\gamma \subset D$. Atunci*

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Aplicații

Observație

Valoarea integralei curbilinii de speța II depinde de orientarea curbei γ. Mai precis

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Aplicaţii

Observaţie

Valoarea integralei curbilinii de speţa II depinde de orientarea curbei γ. Mai precis

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

1. Aria unui domeniu plan D, mărginit de o curbă netedă, închisă, simplă γ este:

$$\text{Aria}(D) = \frac{1}{2}\oint_{\gamma} xdy - ydx. \tag{16}$$

Aplicații

Observație

Valoarea integralei curbilinii de speța II depinde de orientarea curbei γ. Mai precis

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

1. Aria unui domeniu plan D, mărginit de o curbă netedă, închisă, simplă γ este:

$$\text{Aria}(D) = \frac{1}{2}\oint_\gamma xdy - ydx. \tag{16}$$

2. Lucrul mecanic $\mathcal{L}$, al câmpului vectorial

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}, \quad \text{unde } \overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}, \tag{17}$$

de-a lungul curbei γ este:

$$\mathcal{L} = \int_\gamma \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r})\cdot d\overrightarrow{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{18}$$

Dacă curba este închisă, lucrul mecanic se mai numește **circulația** câmpului $\overrightarrow{F}$ de-a lungul curbei γ:

$$\mathcal{C} = \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{19}$$

Exemplu

Exemplul 3.3

Calculați următoarea integrală curbilinie de speța a II-a:

$$I = \int_C y dx - x dy + \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dz, \quad \text{unde}\,(C) : \begin{cases} x = -t\cos t + \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \\ z = t + 1 \end{cases}, \quad t \in [0; \pi]$$

Definirea conceptului

Definiția 3.4

Fie $D \subset R^3$ un domeniu și fie $P,\ Q,\ R : D \to \mathbb{R}$ funcții continue pe D. Integrala $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ se numește **independentă de drum** pe domeniul D dacă pentru orice $A, B \in D$ și orice două curbe simple $\gamma_1,\ \gamma_2$ din D care unesc punctele A și B, are loc relația

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{20}$$

Independența de drum

Propoziția 3.5

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu și fie $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$ funcții continue pe D. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Integrala $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este independentă de drum;

(ii) pentru orice curbă C simplă și închisă conținută în D are loc:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0. \tag{21}$$

Diferențiale totale exacte

Definiția 3.6

Expresia $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ se numește **diferențială totală exactă** dacă există o funcție diferențiabilă $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, astfel încât

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz. \tag{22}$$

Observație

Dacă avem în vedere formula diferențialei

$$dF(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\,dz$$

deducem că relația (22) revine la

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z), \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z), \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z), \quad \forall\,(x,y,z) \in D. \end{cases} \tag{23}$$

Cazul plan

Teorema 3.7

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu plan în care funcţiile P, $Q : D \to \mathbb{R}$ sunt continue. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) Integrala $\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum;

(ii) Expresia $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ este o diferenţială totală exactă adică există $F : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă astfel încât

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \quad \forall\,(x,y) \in D. \tag{24}$$

Aceasta este dată de

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{25}$$

pe orice curbă netedă cu extremităţile (x_0,y_0), $(x,y) \in D$.

Calculul integralei

Dacă $\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F(x_B, y_B) - F(x_A, y_A) \tag{26}$$

unde F este o primitivă pentru $\int P\,dx + Q\,dy$.

Calculul integralei

Dacă $\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F(x_B, y_B) - F(x_A, y_A) \tag{26}$$

unde F este o primitivă pentru $\int P\,dx + Q\,dy$.

F este dată de

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt, \quad \forall\,(x,y) \in D, \tag{27}$$

unde $(x_0, y_0) \in D$ este un punct oarecare.

O condiție necesară și suficientă

Teorema 3.8

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu plan simplu conex în care funcțiile $P, Q : D \to \mathbb{R}$ sunt continue cu derivatele parțiale continue. Atunci integrala $\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum dacă și numai dacă

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in D. \tag{28}$$

Cazul spaţial

Teorema 3.9

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu în care funcţiile P, Q, $R : D \to \mathbb{R}$ sunt continue. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) Integrala $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este independentă de drum;
(ii) Expresia $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ este diferenţială totală exactă, adică există o funcţie $F : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă astfel încât

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz, \quad \forall\,(x,y,z) \in D. \tag{29}$$

Cazul spațial

Teorema 3.9

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu în care funcțiile P, Q, $R : D \to \mathbb{R}$ sunt continue. Următoarele afirmații sunt echivalente:
(i) Integrala $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este independentă de drum;
(ii) Expresia $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ este diferențială totală exactă, adică există o funcție $F : D \to \mathbb{R}$ diferențiabilă astfel încât

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz, \quad \forall\ (x,y,z) \in D. \tag{29}$$

Funcția F, dacă există, este dată de

$$F(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)\,dt \tag{30}$$

unde $(x_0,y_0,z_0) \in D$ este un punct oarecare și F este unic determinată până la o constantă aditivă.

Cazul spațial

Teorema 3.9

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu în care funcțiile P, Q, $R : D \to \mathbb{R}$ sunt continue. Următoarele afirmații sunt echivalente:
(i) Integrala $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este independentă de drum;
(ii) Expresia $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ este diferențială totală exactă, adică există o funcție $F : D \to \mathbb{R}$ diferențiabilă astfel încât

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz, \quad \forall\ (x,y,z) \in D. \tag{29}$$

Funcția F, dacă există, este dată de

$$F(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)\,dt \tag{30}$$

unde $(x_0,y_0,z_0) \in D$ este un punct oarecare și F este unic determinată până la o constantă aditivă.
Dacă integrala este independentă de drum atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = F(x_B,y_B,z_B) - F(x_A,y_A,z_A). \tag{31}$$

O condiţie necesară şi suficientă - cazul spaţial

Teorema 3.10

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu conex în care funcţiile $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$ sunt continue cu derivatele parţiale continue. Atunci integrala $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este independentă de drum dacă şi numai dacă, pentru orice $(x, y, z) \in D$, au loc egalităţile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z). \end{cases} \tag{32}$$

Rotorul unei funcții vectoriale

Definiția 3.11

Considerăm funcția vectorială de clasă C^1 $\overrightarrow{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

definită și continuă în toate punctele domeniului D care conține curba (C). Vom nota

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

și vom numi acest determinant formal **rotorul** funcției vectoriale $\overrightarrow{F}$. Așadar, avem

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{i} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \overrightarrow{j} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \overrightarrow{k} \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Exemplu

Exemplul 3.12

Fie $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^2 \cdot \overrightarrow{i} - xz \cdot \overrightarrow{j} + yz^2 \cdot \overrightarrow{k}$. Atunci

$$\text{rot}\, \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} \cdot (z^2 + x) - \overrightarrow{j} \cdot 0 + \overrightarrow{k} \cdot (-z) = (x + z^2) \cdot \overrightarrow{i} - z \cdot \overrightarrow{k}.$$

Un câmp vectorial $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x,y,z)$ se numește **irotațional** dacă

$$\text{rot}\, \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}.$$

Observație

Condiția necesară și suficientă ca integrala curbilinie de speța a II-a să fie independentă de drum într-un domeniu simplu conex este deci, folosind Teorema 3.10, ca funcția vectorială $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x,y,z)$ să aibă rot $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ (câmpul vectorial $\overrightarrow{F}$ să fie irotațional).

Exercitiu

Exerciţiu

Verificând în prealabil independenţa de drum, calculaţi:

$$I = \int_{(1,1,1,)}^{(a,b,c)} yz \cdot dx + xz \cdot dy + xy \cdot dz$$