Analiză matematică - curs 12
Integrale duble

Facultatea de Mecanică

Universitatea Tehnică “Gh. Asachi”, Iași

Sume Riemann

- $D \subset \mathbb{R}^2$ - un domeniu compact (închis şi mărginit)

Sume Riemann

- $D \subset \mathbb{R}^2$ - un domeniu compact (închis şi mărginit)
- $D_1, D_2, ..., D_n$ - *o descompunere a domeniului* D şi notăm cu $\Delta := \{D_i\}_{i=\overline{1,n}}$: şir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n. \tag{1}$$

Sume Riemann

- $D \subset \mathbb{R}^2$ - un domeniu compact (închis și mărginit)
- $D_1, D_2, ..., D_n$ - *o descompunere a domeniului* D și notăm cu $\Delta := \{D_i\}_{i=\overline{1,n}}$: șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n. \tag{1}$$

- Cel mai mare dintre diametrele mulțimilor $D_1, ..., D_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ și se numește *diametrul descompunerii* Δ.

Sume Riemann

- $D \subset \mathbb{R}^2$ - un domeniu compact (închis și mărginit)
- $D_1, D_2, ..., D_n$ - *o descompunere a domeniului* D și notăm cu $\Delta := \{D_i\}_{i=\overline{1,n}}$: șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n. \tag{1}$$

- Cel mai mare dintre diametrele mulțimilor $D_1, ..., D_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ și se numește *diametrul descompunerii* Δ.
- Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Considerăm, în fiecare subdomeniu D_i, câte un punct $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, iar apoi formăm suma

$$\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \mathrm{Aria}(D_i). \tag{2}$$

Sume Riemann

- $D \subset \mathbb{R}^2$ - un domeniu compact (închis și mărginit)
- $D_1, D_2, ..., D_n$ - *o descompunere a domeniului* D și notăm cu $\Delta := \{D_i\}_{i=\overline{1,n}}$: șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n. \tag{1}$$

- Cel mai mare dintre diametrele mulțimilor $D_1, ..., D_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ și se numește *diametrul descompunerii* Δ.
- Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Considerăm, în fiecare subdomeniu D_i, câte un punct $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, iar apoi formăm suma

$$\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \mathrm{Aria}(D_i). \tag{2}$$

- numită *suma Riemann asociată funcției* f, *domeniului* D, *descompunerii* Δ *și punctelor* $\{(\xi_i, \eta_i)\}_{i=\overline{1,n}}$.

Integrale duble. Definiții

Definiția 1.1

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact și $f : D \to \mathbb{R}$. Funcția f se numește **integrabilă Riemann pe domeniul** D dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice descompunere Δ cu $\|\Delta\| < \delta$ și orice ar fi punctele $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ este satisfăcută relația:

$$|\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i) - I| < \varepsilon.$$

În această situație, numărul I se numește **integrala dublă în sens Riemann** a funcției f pe domeniul D și se notează prin

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Integrale duble. Definiții

Definiția 1.1

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact și $f : D \to \mathbb{R}$. Funcția f se numește **integrabilă Riemann pe domeniul** D dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice descompunere Δ cu $\|\Delta\| < \delta$ și orice ar fi punctele $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ este satisfăcută relația:

$$|\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i) - I| < \varepsilon.$$

În această situație, numărul I se numește **integrala dublă în sens Riemann** a funcției f pe domeniul D și se notează prin

$$I = \iint_D f(x, y)dxdy.$$

Rezultă, luând $f \equiv 1$, că f este integrabilă Riemann pe D și

$$\mathrm{Aria}(D) = \iint_D dxdy. \tag{3}$$

Domenii simple în raport cu axele

Definiţia 1.2

1. Domeniul D se numeşte **simplu în raport cu axa** Oy dacă poate fi reprezentat sub forma:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\}, \tag{4}$$

unde $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}(x)$ sunt funcţii continue pe $[a, b]$ cu $\varphi(x) < \psi(x)$, $x \in (a, b)$.

Domenii simple în raport cu axele

Definiția 1.2

1. Domeniul D se numește **simplu în raport cu axa** Oy dacă poate fi reprezentat sub forma:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\right\}, \tag{4}$$

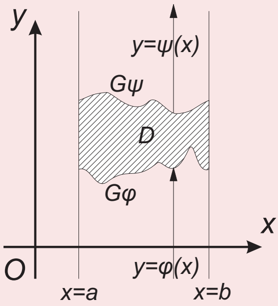
unde $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}(x)$ sunt funcții continue pe $[a, b]$ cu $\varphi(x) < \psi(x)$, $x \in (a, b)$.

2. Domeniul D se numește **simplu în raport cu axa** Ox dacă poate fi reprezentat sub forma:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\right\}, \tag{5}$$

unde $\varphi, \psi : [c, d] \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue pe $[c, d]$ cu $\varphi(y) < \psi(y)$, $y \in (c, d)$.

Domenii simple în raport cu axele. Exemple



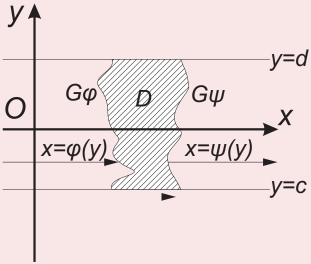


Figura: Domeniu simplu în raport cu Oy Domeniu simplu în raport cu Ox

Domenii simple în raport cu axele. Exemple

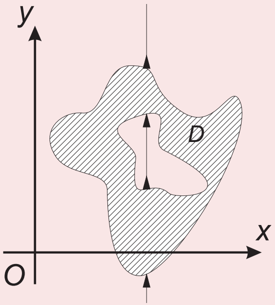


Figura: Domeniu care nu este simplu nici în raport cu Oy, nici în raport cu Ox

Formule de integrare pentru domenii simple în raport cu axele

Teorema 1.3

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *integrabilă Riemann pe domeniul* D. *Dacă:*
1. D *este simplu în raport cu axa* Oy *și are reprezentarea (4), atunci are loc formula*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{6}$$

2. D *este simplu în raport cu axa* Ox *și are reprezentarea (5), atunci are loc formula*

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{7}$$

Formule de integrare pentru domenii simple în raport cu axele

Teorema 1.3

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, integrabilă Riemann pe domeniul D. Dacă:
1. D este simplu în raport cu axa Oy și are reprezentarea (4), atunci are loc formula

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx. \tag{6}$$

2. D este simplu în raport cu axa Ox și are reprezentarea (5), atunci are loc formula

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy. \tag{7}$$

Observația 1.4

Uneori, pentru ușurarea scrierii, preferăm notațiile:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \overset{not}{=} \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy,$$
$$\int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \overset{not}{=} \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx.$$

Cazul domeniilor dreptunghiulare

În cazul unui domeniu dreptunghiular, $D = [a, b] \times [c, d]$, se observă faptul că acesta este simplu și în raport cu Oy, și cu Ox, putând fi reprezentat sub oricare din formele (4) și (5). În acest caz, formulele (6) și (7) devin, respectiv,

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy, \tag{8}$$

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{9}$$

Cazul domeniilor dreptunghiulare

În cazul unui domeniu dreptunghiular, $D = [a, b] \times [c, d]$, se observă faptul că acesta este simplu și în raport cu Oy, și cu Ox, putând fi reprezentat sub oricare din formele (4) și (5). În acest caz, formulele (6) și (7) devin, respectiv,

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy, \tag{8}$$

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx. \tag{9}$$

Mai mult, dacă f este o funcție cu variabile separate, adică f se poate scrie sub forma $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ pentru orice $(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, atunci integrala dublă se calculează ca un produs efectiv de două integrale Riemann simple, adică:

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx \right) \cdot \left(\int_c^d f_2(y)\,dy \right).$$

Proprietăți ale integralei duble

Teorema 1.5 (Proprietatea de liniaritate în raport cu integrandul)

Fie D un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$, f, g două funcții integrabile pe D și α un număr nenul. Atunci funcțiile $f+g$, $\alpha \cdot f$ sunt integrabile pe D și, în plus:

$$\iint_D (f+g)(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy,$$

$$\iint_D (\alpha \cdot f)(x,y)dxdy = \alpha \cdot \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Proprietăţi ale integralei duble

Teorema 1.5 (Proprietatea de liniaritate în raport cu integrandul)

Fie D un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$, f, g două funcţii integrabile pe D şi α un număr nenul. Atunci funcţiile $f+g$, $\alpha \cdot f$ sunt integrabile pe D şi, în plus:

$$\iint_D (f+g)(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy,$$
$$\iint_D (\alpha \cdot f)(x,y)dxdy = \alpha \cdot \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Teorema 1.6 (Proprietatea de aditivitate în raport cu domeniul)

Dacă $D = D_1 \cup D_2$ şi $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ şi sunt separate printr-o curbă netedă, iar f este integrabilă pe D, atunci f este integrabilă pe D_i, $i = 1, 2$ şi rezultă

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Reciproc, dacă f este integrabilă pe D_i atunci f este integrabilă pe D şi are loc aceeaşi relaţie.

Proprietăți ale integralei duble

Teorema 1.7 (monotonie)

Dacă $f, g : D \to \mathbb{R}$ *sunt integrabile pe* D *și* $f(x,y) \leq g(x,y)$, $\forall (x,y) \in D$, *atunci*

$$\iint_D f(x,y)dxdy \leq \iint_D g(x,y)dxdy.$$

Dacă pentru orice $(x,y) \in D$ *are loc*

$$m \leq f(x,y) \leq M$$

atunci este adevărată și inegalitatea

$$m \cdot aria(D) \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq M \cdot aria(D).$$

Proprietăți ale integralei duble

Teorema 1.8

Fie D un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$,iar f o funcție integrabilă pe D. Atunci funcțiile $|f|$ este integrabilă pe D și are loc:

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dxdy.$$

Proprietăți ale integralei duble

Teorema 1.8

Fie D un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$,iar f o funcție integrabilă pe D. Atunci funcțiile $|f|$ este integrabilă pe D și are loc:

$$\left| \iint_D f(x,y)\, dxdy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\, dxdy.$$

Teorema 1.9 (de medie pentru integrala dublă)

Fie D un domeniu compact din $\mathbb{R}^2$ și $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe D. Atunci există un punct $(x_0, y_0) \in D$ astfel încât

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = f(x_0, y_0) \cdot \mathrm{Aria}(D).$$

Exemple

Exercițiul 1.10

Calculați următoarea integrală dublă pe domeniul indicat:

1. $I = \iint_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, unde $D = [0,1] \times [0,1]$.

Exemple

Exercițiul 1.10

Calculați următoarea integrală dublă pe domeniul indicat:

1. $I = \iint_D \dfrac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, unde $D = [0,1] \times [0,1]$.

Soluție. Obținem

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(x+y+1)^2},$$

$$I(x) = \int_0^1 \frac{dy}{(x+y+1)^2} = \frac{-1}{x+y+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2},$$

de unde

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln\left(\frac{4}{3}\right).$$

Exemple

Exercițiul 1.11

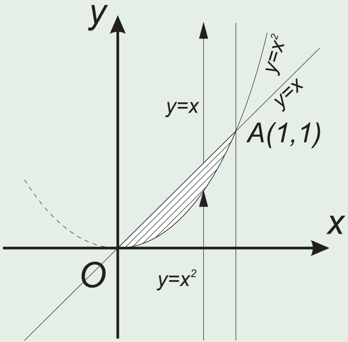
2. $I = \iint_D (x+y)\,dxdy$, unde D este domeniul plan mărginit de parabola de ecuație $y = x^2$ și dreapta de ecuație $y = x$.

Exemple

Exercițiul 1.11

2. $I = \iint_D (x+y)\, dxdy$, unde D este domeniul plan mărginit de parabola de ecuație $y = x^2$ și dreapta de ecuație $y = x$.

Soluție.



Exemple

Obținem

$$I = \iint_D (x + y)\, dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x + y)\, dy,$$

Exemple

Obținem

$$I = \iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x+y)\,dy,$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{x^2}^{x} (x+y)\,dy = x \cdot y\Big|_{x^2}^{x} + \frac{1}{2}y^2\Big|_{x^2}^{x} \\ &= \frac{3}{2}\cdot x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4. \end{aligned}$$

Exemple

Obținem

$$I = \iint_D (x+y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x+y)\,dy,$$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{x^2}^{x} (x+y)\,dy = x\cdot y\Big|_{x^2}^{x} + \frac{1}{2}y^2\Big|_{x^2}^{x} \\ &= \frac{3}{2}\cdot x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4. \end{aligned}$$

În final,

$$I = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4\right) dx = \frac{3}{20}.$$

Exemple

Exercițiul 1.12

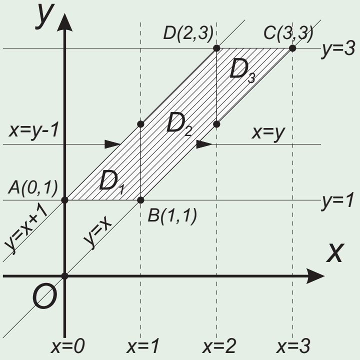
3. $I = \iint_D (x^2 + y^2) \cdot dxdy$, unde D este domeniul plan mărginit de dreptele de ecuații: $y = x$, $y = x + 1$, $y = 1$ și $y = 3$.

Exemple

Exercițiul 1.12

3. $I = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot dxdy$, unde D este domeniul plan mărginit de dreptele de ecuații: $y = x$, $y = x + 1$, $y = 1$ și $y = 3$.

Soluție.



Dacă privim domeniul D în raport cu axa Oy, trebuie să-l descompunem acest domeniu în trei domenii D_1, D_2 și D_3, simple în raport cu această axă.

Exemple

Domeniul D (mărginit de paralelogramul $ABCD$) este însă simplu în raport cu axa Ox, putând fi scris sub forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [1,3], y-1 \leq x \leq y\}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 dy \int_{y-1}^{y} (x^2+y^2)\, dx, \\ I(y) &= \int_{y-1}^{y} (x^2+y^2)\, dx = \frac{1}{3}y^3 - \frac{(y-1)^3}{3} + y^2, \end{aligned}$$

deci

$$I = \frac{1}{3}\int_1^3 y^3 dy - \frac{1}{3}\int_1^3 (y-1)^3 + \int_1^3 y^2 dy = 14.$$

Interpretarea mecanică a integralei duble

Considerăm o placă plană D, de grosime neglijabilă, având în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcție continuă și pozitivă $\rho(x, y)$.

1. **masa** plăcii materiale este:

$$M = \iint_D \rho(x, y)\, dxdy.$$

Interpretarea mecanică a integralei duble

Considerăm o placă plană D, de grosime neglijabilă, având în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcție continuă și pozitivă $\rho(x, y)$.

1. **masa** plăcii materiale este:

$$M = \iint_D \rho(x, y)\, dxdy.$$

2. **coordonatele centrului de greutate** al plăcii materiale sunt date de formulele:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M} \cdot \displaystyle\iint_D x \cdot \rho(x, y)\, dxdy, \\ y_G = \dfrac{1}{M} \cdot \displaystyle\iint_D y \cdot \rho(x, y)\, dxdy. \end{cases}$$

Interpretarea mecanică a integralei duble

3. **momentul de inerție** al plăcii materiale D, situată în planul xOy, în raport cu o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iint_D r^2(x,y) \cdot \rho(x,y)\, dxdy$$

unde $r = r(x,y)$ este distanța de la un punct curent al plăcii, $M(x,y)$, la dreapta d, respectiv la punctul P.

Interpretarea mecanică a integralei duble

3. **momentul de inerție** al plăcii materiale D, situată în planul xOy, în raport cu o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iint_D r^2(x,y) \cdot \rho(x,y)\, dxdy$$

unde $r = r(x,y)$ este distanța de la un punct curent al plăcii, $M(x,y)$, la dreapta d, respectiv la punctul P.
În particular, momentele de inerție I_{Ox} și I_{Oy} ale plăcii materiale D în raport cu axele de coordonate Ox, respectiv Oy, sunt:

$$I_{Ox} = \iint_D y^2 \cdot \rho(x,y)\, dxdy \quad \text{și} \quad I_{Oy} = \iint_D x^2 \cdot \rho(x,y)\, dxdy.$$

Interpretarea mecanică a integralei duble

3. **momentul de inerţie** al plăcii materiale D, situată în planul xOy, în raport cu o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iint_D r^2(x,y) \cdot \rho(x,y)\, dxdy$$

unde $r = r(x,y)$ este distanţa de la un punct curent al plăcii, $M(x,y)$, la dreapta d, respectiv la punctul P.
În particular, momentele de inerţie I_{Ox} şi I_{Oy} ale plăcii materiale D în raport cu axele de coordonate Ox, respectiv Oy, sunt:

$$I_{Ox} = \iint_D y^2 \cdot \rho(x,y)\, dxdy \quad \text{şi} \quad I_{Oy} = \iint_D x^2 \cdot \rho(x,y)\, dxdy.$$

De asemenea, momentul de inerţie al plăcii materiale D în raport cu originea axelor de coordonate este:

$$I_O = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho(x,y)\, dxdy.$$

Evident, are loc:

$$I_O = I_{Ox} + I_{Oy}.$$

Interpretarea mecanică. Exemple

Exercițiul 1.13

Să se calculeze masa plăcii plane materiale care ocupă domeniul plan:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y^2 \geq 7, y \leq 7 - 2x\right\}$$

și care are densitatea $\rho(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{2y^2 + 7}}$.

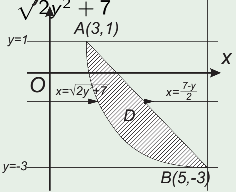
Interpretarea mecanică. Exemple

Exercițiul 1.13

Să se calculeze masa plăcii plane materiale care ocupă domeniul plan:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2y^2 \geq 7, y \leq 7 - 2x\right\}$$

și care are densitatea $\rho(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2y^2+7}}$. **Soluție.**



Avem

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{2y^2+7}}$$

$$= \int_{-3}^{1} dy \int_{\sqrt{2y^2+7}}^{\frac{7-y}{2}} \frac{dx}{\sqrt{7+2y^2}} = \int_{-3}^{1} \left(\frac{7-y}{2\sqrt{7+2y^2}} - 1 \right) dy = \frac{7}{2\sqrt{2}}.$$

Interpretarea mecanică. Exemple

Exercițiul 1.14

Să se calculeze momentele de inerție in raport cu axele de coordonate și momentul de inerție față de origine pentru placa materială plană care ocupă domeniul

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}$$

și care are densitatea materială de masă dată de $\rho(x, y) = 1 + xy$.

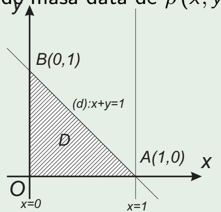
Interpretarea mecanică. Exemple

Exercițiul 1.14

Să se calculeze momentele de inerție in raport cu axele de coordonate și momentul de inerție față de origine pentru placa materială plană care ocupă domeniul

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\right\}$$

și care are densitatea materială de masă dată de $\rho(x,y)=1+xy$. **Soluție.**



Obținem

$$I_{Ox}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} y^2(1+xy)\,dy=\frac{11}{120},$$

$$I_{Oy}=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x^2(1+xy)dy=\frac{11}{120},$$

$$I_O=I_{Ox}+I_{Oy}=\frac{11}{60}.$$

Schimbarea de variabilă în integrale duble

Considerăm două domenii compacte D și D' din $\mathbb{R}^2$ și o transformare $T : D' \to D$, de forma

$$\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}, \quad (u,v) \in D', \tag{10}$$

unde:

1. x, y sunt de clasă $C^1(D')$;
2. T este surjectivă;
3. Jacobianul $J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ pe D'.

O funcție cu aceste proprietăți va fi numită **schimbare de variabile** sau de **coordonate**.

Schimbarea de variabilă în integrale duble

Considerăm două domenii compacte D și D' din $\mathbb{R}^2$ și o transformare $T : D' \to D$, de forma

$$\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}, \quad (u,v) \in D', \tag{10}$$

unde:

1. x, y sunt de clasă $C^1(D')$;
2. T este surjectivă;
3. Jacobianul $J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ pe D'.

O funcție cu aceste proprietăți va fi numită **schimbare de variabile** sau de **coordonate**.

Teorema de schimbare de variabilă în integrala dublă

Dacă f este integrabilă pe D, atunci are loc

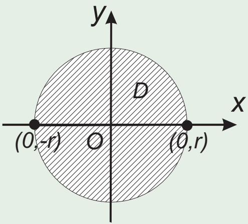
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\, dudv. \tag{11}$$

Schimbări de variabilă frecvent utilizate

1. Coordonate polare

Se folosește în cazul în care domeniul D este un disc circular, un sector circular, o coroană circulară, etc. În cazul discului de rază r, transformarea de coordonate este dată prin

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}, (\rho,\theta) \in D', \text{ unde } D' = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq r,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}.$$



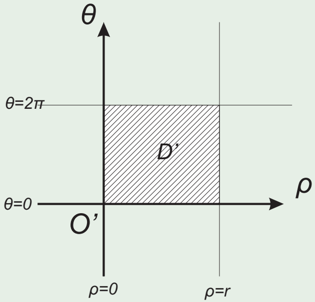


Figura: Schimbarea de coordonate polare

Jacobianul transformării este: $J(\rho,\theta) = \rho$.

Schimbări de variabilă frecvent utilizate

2. Coordonate polare generalizate

Dacă domeniul D este un disc eliptic, un sector eliptic, o coroană eliptică, etc. trecem la coordonate polare generalizate. În cazul discului eliptic definit prin

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},$$

vom avea transformarea

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}, (\rho, \theta) \in D', \text{ unde } D' = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

În acest caz jacobianul transformării este $J(\rho, \theta) = ab\rho$.

Exemple

Exercițiul 1.15

1. $I = \iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\right\}$.

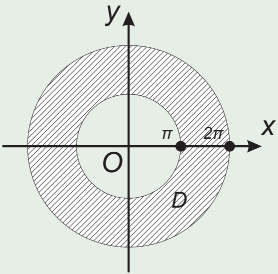
Exemple

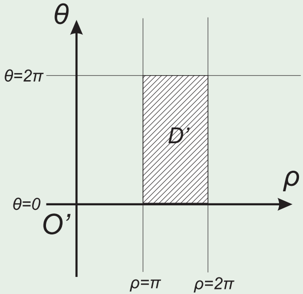
Exerciţiul 1.15

1. $I = \iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\right\}$.

Soluţie. Trecem la coordonate polare. Vom avea

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \rho \in [\pi, 2\pi], \\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{array}$$





Exemple

Jacobianul este

$$J(\rho, \theta) = \rho,$$

deci

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \\ &= \iint\limits_{D'} \frac{\sin\rho}{\rho} \cdot \rho \cdot d\rho d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \cdot \left(\int_\pi^{2\pi} \sin\rho \cdot d\rho\right) = -4\pi. \end{aligned}$$

Exemple

Exercițiul 1.16

2. $I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot dxdy$, unde: $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

Exemple

Exercițiul 1.16

2. $I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot dxdy$, unde: $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

Soluție. Domeniul D este discul eliptic de semiaxe $a, b > 0$. Trecem la coordonate polare generalizate. Vom avea

$$I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy = \iint\limits_{D'} \sqrt{1 - \rho^2} ab\rho d\rho d\theta$$

$$= ab \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^1 \rho \cdot \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \right)$$

$$= 2\pi ab \cdot \int_0^1 \left(1 - \rho^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \rho d\rho$$

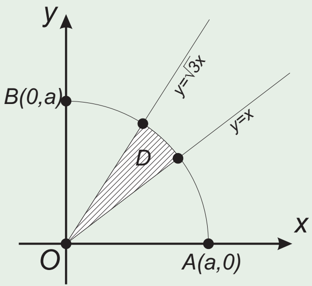
$$= -\frac{2\pi ab}{3} \cdot \left(1 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2\pi ab}{3}.$$

Exemple

Exercițiul 1.17

3. $I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy$, unde D este domeniul plan mărginit de curbele de ecuații:
$x^2 + y^2 = a^2; y = x; y = \sqrt{3}x,\ a > 0, x \geq 0.$

Soluție. Domeniul de integrare este sectorul circular din figura de mai jos.



Exemple

Trecem la coordonate polare.
Domeniul D se transformă în domeniul D' al noilor variabile, unde $\rho \in [0, a]$ și $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ (dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate).
Obținem:

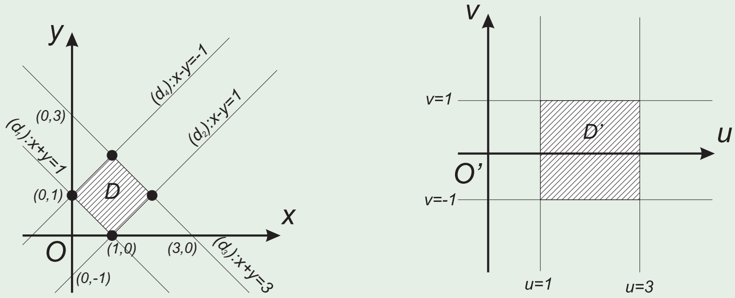
$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} \sqrt{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\right) \cdot \left(\int_0^a \rho\sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho\right) \\ &= \frac{\pi a^3}{36}. \end{aligned}$$

Exemple

Exercițiul 1.18

4. $I = \iint_D (x+y)^3 \cdot (x-y)^2 \cdot dxdy$, unde D este domeniul plan mărginit de dreptele $(d_1) : x+y=1$, $(d_2) : x-y=1$, $(d_3) : x+y=3$ și $(d_4) : x-y=-1$.

Soluție.



Exemple

Schimbăm variabilele prin:

$$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\cdot(u+v) \\ y=\dfrac{1}{2}(u-v) \end{cases} ;\, u\in[1,3]\,, v\in[-1,1]\,.$$

Atunci jacobianul va fi

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

iar integrala devine

$$I=\iint_{D'} u^3\cdot v^2\cdot\frac{1}{2}\cdot dudv = \frac{1}{2}\cdot\left(\int_1^3 u^3\cdot du\right)\cdot\left(\int_{-1}^1 v^2\cdot dv\right)=\frac{20}{3}.$$