Analiză matematică - curs 13
Integrale duble *(continuare)*
Integrale triple

Facultatea de Mecanică

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iași

Schimbarea de variabilă în integrale duble

Considerăm două domenii compacte D și D' din $\mathbb{R}^2$ și o transformare $T : D' \to D$, de forma

$$\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}, \quad (u,v) \in D', \tag{1}$$

unde:
1. x, y sunt de clasă $C^1(D')$;
2. T este surjectivă;
3. Jacobianul $J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ pe D'.

O funcție cu aceste proprietăți va fi numită **schimbare de variabile** sau de **coordonate**.

Schimbarea de variabilă în integrale duble

Considerăm două domenii compacte D și D' din $\mathbb{R}^2$ și o transformare $T : D' \to D$, de forma

$$\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array}, \quad (u,v) \in D', \tag{1}$$

unde:
1. x, y sunt de clasă $C^1(D')$;
2. T este surjectivă;
3. Jacobianul $J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ pe D'.

O funcție cu aceste proprietăți va fi numită **schimbare de variabile** sau de **coordonate**.

Teorema de schimbare de variabilă în integrala dublă

Dacă f este integrabilă pe D, atunci are loc

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\, dudv. \tag{2}$$

Schimbări de variabilă frecvent utilizate

1. Coordonate polare

Se folosește în cazul în care domeniul D este un disc circular, un sector circular, o coroană circulară, etc. În cazul discului de rază r, transformarea de coordonate este dată prin

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}, (\rho,\theta) \in D', \text{ unde } D' = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \rho \le r,\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}.$$

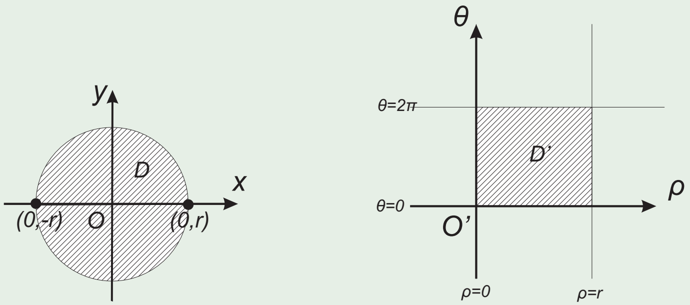


Figura: Schimbarea de coordonate polare

Jacobianul transformării este: $J(\rho,\theta) = \rho$.

Schimbări de variabilă frecvent utilizate

2. Coordonate polare generalizate

Dacă domeniul D este un disc eliptic, un sector eliptic, o coroană eliptică, etc. trecem la coordonate polare generalizate. În cazul discului eliptic definit prin

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\},$$

vom avea transformarea

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta \\ y = b\rho\sin\theta \end{cases}, (\rho, \theta) \in D', \text{ unde } D' = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

În acest caz jacobianul transformării este $J(\rho, \theta) = ab\rho$.

Exemple

Exercițiul 1.1

1. $I = \iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\right\}$.

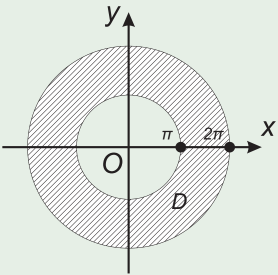
Exemple

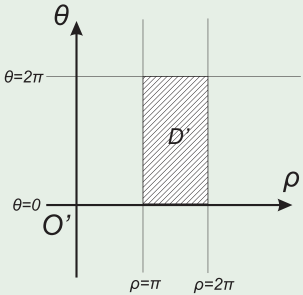
Exercițiul 1.1

1. $I = \iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\right\}$.

Soluție. Trecem la coordonate polare. Vom avea

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \rho \in [\pi, 2\pi], \\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{array}$$





Exemple

Jacobianul este

$$J(\rho, \theta) = \rho,$$

deci

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy \\ &= \iint\limits_{D'} \frac{\sin\rho}{\rho} \cdot \rho \cdot d\rho d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \cdot \left(\int_\pi^{2\pi} \sin\rho \cdot d\rho\right) = -4\pi. \end{aligned}$$

Exemple

Exercițiul 1.2

2. $I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot dxdy$, unde: $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$.

Exemple

Exercițiul 1.2

2. $I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \cdot dxdy$, unde: $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$.

Soluție. Domeniul D este discul eliptic de semiaxe $a, b > 0$. Trecem la coordonate polare generalizate. Vom avea

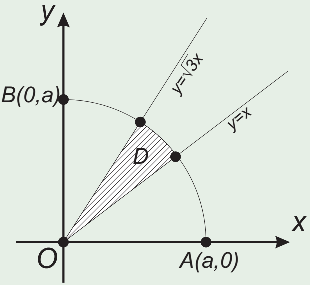
$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dxdy = \iint\limits_{D'} \sqrt{1 - \rho^2} ab\rho d\rho d\theta \\
&= ab \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^1 \rho \cdot \sqrt{1 - \rho^2} d\rho \right) \\
&= 2\pi ab \cdot \int_0^1 \left(1 - \rho^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \rho d\rho \\
&= -\frac{2\pi ab}{3} \cdot \left(1 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2\pi ab}{3}.
\end{aligned}
$$

Exemple

Exercițiul 1.3

3. $I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, unde D este domeniul plan mărginit de curbele de ecuații:
$x^2 + y^2 = a^2; y = x; y = \sqrt{3}x,\ a > 0, x \geq 0.$

Soluție. Domeniul de integrare este sectorul circular din figura de mai jos.



Exemple

Trecem la coordonate polare.
Domeniul D se transformă în domeniul D' al noilor variabile, unde $\rho \in [0, a]$ și $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ (dreptunghi cu laturile paralele cu axele de coordonate).
Obținem:

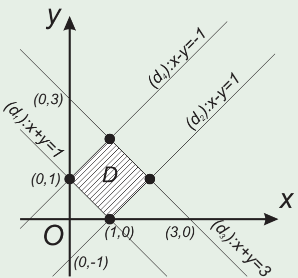
$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} \sqrt{a^2 - \rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \right) \cdot \left(\int_0^a \rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho \right) \\ &= \frac{\pi a^3}{36}. \end{aligned}$$

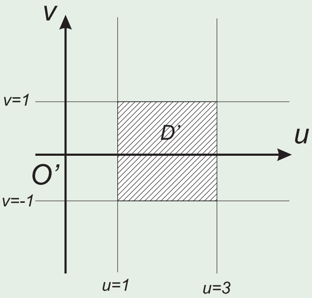
Exemple

Exercițiul 1.4

4. $I = \iint_D (x+y)^3 \cdot (x-y)^2 \cdot dxdy$, unde D este domeniul plan mărginit de dreptele $(d_1) : x+y=1$, $(d_2) : x-y=1$, $(d_3) : x+y=3$ și $(d_4) : x-y=-1$.

Soluție.





Exemple

Schimbăm variabilele prin:

$$\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\cdot(u+v) \\ y=\dfrac{1}{2}(u-v) \end{cases} ; u\in[1,3], v\in[-1,1].$$

Atunci jacobianul va fi

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

iar integrala devine

$$I=\iint_{D'} u^3\cdot v^2\cdot\frac{1}{2}\cdot dudv=\frac{1}{2}\cdot\left(\int_1^3 u^3\cdot du\right)\cdot\left(\int_{-1}^1 v^2\cdot dv\right)=\frac{20}{3}.$$

Definiția integralei triple

- Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact (închis și mărginit). Considerăm $V_1, V_2, ..., V_n$ un șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n. \tag{3}$$

Vom spune că relația (3) definește o *descompunere a domeniului V* și notăm cu $\Delta := \{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulțimilor ce formează această descompunere.

Definiția integralei triple

- Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact (închis și mărginit). Considerăm $V_1, V_2, \ldots, V_n$ un șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n. \tag{3}$$

  Vom spune că relația (3) definește o *descompunere a domeniului V* și notăm cu $\Delta := \{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulțimilor ce formează această descompunere.
- Cel mai mare dintre diametrele mulțimilor $V_1, \ldots, V_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ și se numește *diametrul descompunerii* Δ.

Definiția integralei triple

- Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact (închis și mărginit). Considerăm $V_1, V_2, \ldots, V_n$ un șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât
$$V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n. \tag{3}$$
Vom spune că relația (3) definește o *descompunere a domeniului* V și notăm cu $\Delta := \{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulțimilor ce formează această descompunere.
- Cel mai mare dintre diametrele mulțimilor $V_1, \ldots, V_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ și se numește *diametrul descompunerii* Δ.
- În fiecare subdomeniu V_i considerăm câte un punct $(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \in V_i$.

Definiția integralei triple

- Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact (închis și mărginit). Considerăm $V_1, V_2, \ldots, V_n$ un șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n. \tag{3}$$

Vom spune că relația (3) definește o *descompunere a domeniului* V și notăm cu $\Delta := \{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulțimilor ce formează această descompunere.

- Cel mai mare dintre diametrele mulțimilor $V_1, \ldots, V_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ și se numește *diametrul descompunerii* Δ.
- În fiecare subdomeniu V_i considerăm câte un punct $(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \in V_i$.
- Fiind dată o funcție $f : V \to \mathbb{R}$, formăm suma

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i, \delta_i\right) \cdot \mathrm{Vol}(V_i). \tag{4}$$

Definiția integralei triple

- Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact (închis și mărginit). Considerăm $V_1, V_2, ..., V_n$ un șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât
$$V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n. \tag{3}$$
Vom spune că relația (3) definește o *descompunere a domeniului V* și notăm cu $\Delta := \{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulțimilor ce formează această descompunere.
- Cel mai mare dintre diametrele mulțimilor $V_1, ..., V_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ și se numește *diametrul descompunerii* Δ.
- În fiecare subdomeniu V_i considerăm câte un punct $(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \in V_i$.
- Fiind dată o funcție $f : V \to \mathbb{R}$, formăm suma
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \cdot \mathrm{Vol}(V_i). \tag{4}$$
Această sumă se va numi *suma Riemann asociată funcției f, domeniului V, descompunerii* Δ *și punctelor* $\{(\xi_i, \eta_i, \delta_i)\}_{i=\overline{1,n}}$, și o notăm cu
$$\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i, \delta_i).$$

Definiția integralei triple

Definiția 2.1

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact și $f : V \to \mathbb{R}$. Funcția f se numește *integrabilă Riemann pe domeniul V* dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice descompunere Δ cu $\|\Delta\| < \delta$ și orice ar fi punctele $(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \in V_i$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ este satisfăcută relația:

$$|\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i, \delta_i) - I| < \varepsilon.$$

În această situație, numărul I se numește *integrala triplă în sens Riemann* a funcției f pe domeniul V și se notează prin

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dxdydz.$$

Se observă că dacă $f(x, y, z) = 1$, $\forall (x, y, z) \in V$, atunci f este integrabilă Riemann pe V și

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V dxdydz. \tag{5}$$

Integrarea pe un paralelipiped dreptunghic

Să considerăm cazul în care V este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, adică:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b],\ y \in [c, d],\ z \in [e, g]\} \tag{6}$$

Teorema 2.2

Fie $f : V \to \mathbb{R}$ continuă pe domeniul V. Atunci, funcția

$$F(x, y) = \int_e^g f(x, y, z)\, dz, \quad \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \tag{7}$$

este integrabilă pe $D = [a, b] \times [c, d]$. În plus,

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_D \left[\int_e^g f(x, y, z)\, dz\right] dxdy. \tag{8}$$

Observație

Observația 2.3

1. Dacă ținem cont că domeniul D este un dreptunghi, avem

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_e^g f\,(x,y,z)\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g f(x,y,z)\,dz, \qquad (9)$$

ordinea de integrare fiind de la dreapta la stânga.

Observație

Observația 2.3

1. Dacă ținem cont că domeniul D este un dreptunghi, avem

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_e^g f(x,y,z)\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g f(x,y,z)\,dz, \qquad (9)$$

ordinea de integrare fiind de la dreapta la stânga.
2. Întrucât funcția f este continuă pe V, se poate schimba ordinea de integrare în relația (8) și astfel obținem formule analoage:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{[a,b]\times[g,e]} dxdz \int_c^d f(x,y,z)\,dy = \int_a^b dx \int_g^e dz \int_c^d f(x,y,z)\,dy,$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{[c,d]\times[g,e]} dydz \int_a^b f(x,y,z)\,dx = \int_c^d dy \int_g^e dz \int_a^b f(x,y,z)\,dx.$$

Exemplu

Exemplu

Să se calculeze integrala

$$I = \iiint_V xy \; dxdydz, \text{ unde} V = [1,2] \times [-2,1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Integrarea pe domenii simple (în raport cu axele)

Definiția 2.4

Domeniul V se numește *simplu în raport cu axa Oz* dacă există un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ și două funcții continue $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\varphi(x, y) < \psi(x, y), \forall (x, y) \in D$, astfel încât

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), \forall\, (x, y) \in D\}. \qquad (10)$$

Analog, putem defini domeniile simple în raport cu axa Ox respectiv Oy.

Integrarea pe domenii simple (în raport cu axele)

Definiția 2.4

Domeniul V se numește *simplu în raport cu axa Oz* dacă există un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ și două funcții continue $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\varphi(x,y) < \psi(x,y), \forall (x,y) \in D$, astfel încât

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y), \forall\, (x,y) \in D\}. \tag{10}$$

Analog, putem defini domeniile simple în raport cu axa Ox respectiv Oy.

Din definiția de mai sus deducem că un domeniu $V \subset \mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa Oz dacă orice paralelă dusă prin puncte interioare lui D intersectează Fr V în exact două puncte. Analog pentru cazul domeniilor simple în raport cu Oy, respectiv Ox.

Integrarea pe domenii simple (în raport cu axele)

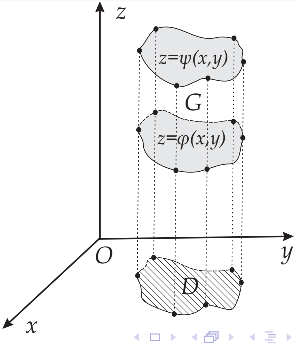
Definiția 2.4

Domeniul V se numește *simplu în raport cu axa Oz* dacă există un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ și două funcții continue $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\varphi(x, y) < \psi(x, y), \forall (x, y) \in D$, astfel încât

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), \forall\, (x, y) \in D\}. \tag{10}$$

Analog, putem defini domeniile simple în raport cu axa Ox respectiv Oy.

Din definiția de mai sus deducem că un domeniu $V \subset \mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa Oz dacă orice paralelă dusă prin puncte interioare lui D intersectează Fr V în exact două puncte. Analog pentru cazul domeniilor simple în raport cu Oy, respectiv Ox.



Integrarea pe domenii simple (în raport cu axele)

Teorema 2.5

Fie $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, continuă pe domeniul V. Atunci funcția

$$F(x,y) = \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz, \quad \forall (x,y) \in D \tag{11}$$

este integrabilă pe D și, în plus:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f\,(x,y,z)\,dz \right] dxdy. \tag{12}$$

Integrarea pe domenii simple (în raport cu axele)

Teorema 2.5

Fie $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, continuă pe domeniul V. Atunci funcția

$$F(x,y) = \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz, \quad \forall (x,y) \in D \tag{11}$$

este integrabilă pe D și, în plus:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f\,(x,y,z)\,dz\right] dxdy. \tag{12}$$

Observația 2.6

Pentru simplitatea scrierii, se mai folosește notația

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f\,(x,y,z)\,dz, \tag{13}$$

integrarea realizându-se de la dreapta la stânga.

Exemple

Exemplul 2.7

Să se calculeze integrala $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} dxdydz$, unde V este domeniul limitat de planele $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

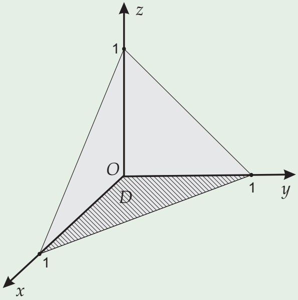
Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:

Exemple

Exemplul 2.7

Să se calculeze integrala $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}\, dxdydz$, unde V este domeniul limitat de planele $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:



Exemple

Exemplul 2.8

Să se calculeze integrala $I = \iiint_V (x^2 + y^2)z\, dxdydz$, unde V este domeniul limitat de paraboloidul de ecuație $z = x^2 + y^2$ și de sfera de ecuații $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $z \geq 0$.

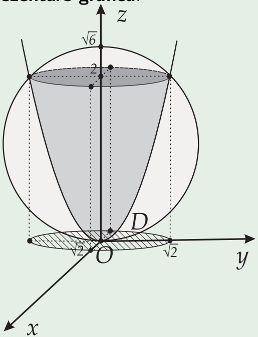
Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:

Exemple

Exemplul 2.8

Să se calculeze integrala $I = \iiint_V (x^2 + y^2) z \, dxdydz$, unde V este domeniul limitat de paraboloidul de ecuație $z = x^2 + y^2$ și de sfera de ecuații $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $z \geq 0$.

Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:



Proprietăți ale integralei triple

Teorema 2.9 (Proprietatea de liniaritate în raport cu integrandul)

Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, f, g două funcții integrabile pe V și α un număr nenul. Atunci funcțiile $f+g$, $\alpha \cdot f$ sunt integrabile pe V și, în plus:

$$\iiint_V (f+g)(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_V g(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$\iiint_V (\alpha \cdot f)(x,y,z)dxdydz = \alpha \cdot \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Proprietăți ale integralei triple

Teorema 2.9 (Proprietatea de liniaritate în raport cu integrandul)

Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, f, g două funcții integrabile pe V și α un număr nenul. Atunci funcțiile $f+g$, $\alpha \cdot f$ sunt integrabile pe V și, în plus:

$$\iiint_V (f+g)(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_V g(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$\iiint_V (\alpha \cdot f)(x,y,z)dxdydz = \alpha \cdot \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Teorema 2.10 (Proprietatea de aditivitate în raport cu domeniul)

Dacă $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ și sunt separate printr-o suprafață de volum nul, iar f este integrabilă pe V, atunci f este integrabilă pe V_i, $i = 1, 2$ și rezultă

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

Reciproc, dacă f este integrabilă pe V_i, $i = 1, 2$, atunci f este integrabilă pe V și are loc aceeași relație.

Proprietăți ale integralei triple

Teorema 2.11 (Pozitivitate)

Dacă $f : V \to \mathbb{R}$ *este integrabilă pe* V *și*

$$f(x, y, z) \geq 0, \ \forall (x, y, z) \in V,$$

atunci

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz \geq 0.$$

Proprietăți ale integralei triple

Teorema 2.11 (Pozitivitate)

Dacă $f : V \to \mathbb{R}$ *este integrabilă pe* V *și*

$$f(x,y,z) \geq 0, \ \forall (x,y,z) \in V,$$

atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

Teorema 2.12 (monotonie)

- *Dacă* $f, g : V \to \mathbb{R}$ *sunt integrabile pe* V *și*

  $$f(x,y,z) \leq g(x,y,z), \ \forall (x,y,z) \in V,$$

  atunci

  $$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$

Proprietăți ale integralei triple

Teorema 2.11 (Pozitivitate)

Dacă $f : V \to \mathbb{R}$ *este integrabilă pe* V *și*

$$f(x,y,z) \geq 0, \ \forall (x,y,z) \in V,$$

atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

Teorema 2.12 (monotonie)

- *Dacă* $f, g : V \to \mathbb{R}$ *sunt integrabile pe* V *și*

  $$f(x,y,z) \leq g(x,y,z), \ \forall (x,y,z) \in V,$$

  atunci

  $$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$

- *Dacă pentru orice* $(x,y,z) \in V$ *are loc*

  $$m \leq f(x,y,z) \leq M$$

  atunci este adevărată și inegalitatea

  $$m \cdot \mathrm{Vol}(V) \leq \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq M \cdot \mathrm{Vol}(V).$$

Proprietăți ale integralei triple

Teorema 2.13

Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, iar f o funcție integrabilă pe V. Atunci funcția $|f|$ este integrabilă pe V și are loc:

$$\left|\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz\right| \leq \iiint_V |f(x,y,z)|\,dxdydz.$$

Proprietăți ale integralei triple

Teorema 2.13

Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, iar f o funcția integrabilă pe V. Atunci funcția $|f|$ este integrabilă pe V și are loc:

$$\left|\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz\right| \leq \iiint_V |f(x,y,z)|\,dxdydz.$$

Teorema 2.14 (de medie pentru integrala triplă)

Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$ și $f : V \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe V. Atunci există un punct $(x_0, y_0, z_0) \in V$ astfel încât

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = f(x_0,y_0,z_0) \cdot \mathrm{Vol}(V).$$

Considerăm un corp de volum V, care are în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcție continuă și pozitivă $\rho(x, y, z)$.

1. masa corpului

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

Considerăm un corp de volum V, care are în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcție continuă și pozitivă $\rho(x, y, z)$.

1. **masa** corpului

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

2. **Centrului de greutate** are coordonatele

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M} \cdot \iiint_V x \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Considerăm un corp de volum V, care are în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcție continuă și pozitivă $\rho(x, y, z)$.

1. **masa** corpului

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

2. **Centrului de greutate** are coordonatele

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M} \cdot \displaystyle\iiint_V x \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz, \\ y_G = \dfrac{1}{M} \cdot \displaystyle\iiint_V y \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz, \\ \\ \end{cases}$$

Considerăm un corp de volum V, care are în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcție continuă și pozitivă $\rho(x, y, z)$.

1. masa corpului

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

2. Centrului de greutate are coordonatele

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M} \cdot \iiint_V x \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz, \\ y_G = \dfrac{1}{M} \cdot \iiint_V y \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz, \\ z_G = \dfrac{1}{M} \cdot \iiint_V z \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz. \end{cases}$$

Interpretarea mecanică a integralei triple

3. momentul de inerție al unui corp de volum V

în raport cu un plan π, o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iiint_V r^2(x,y,z) \cdot \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

unde $r = r(x,y,z)$ este distanța de la un punct curent al plăcii, $M(x,y,z)$, respectiv la planul π, dreapta d și punctul P.

În particular,

Interpretarea mecanică a integralei triple

3. momentul de inerție al unui corp de volum V

în raport cu un plan π, o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iiint_V r^2(x,y,z) \cdot \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

unde $r = r(x,y,z)$ este distanța de la un punct curent al plăcii, $M(x,y,z)$, respectiv la planul π, dreapta d și punctul P.

În particular,

- momentul de inerție al corpului V în raport cu planul xOy este

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2 \cdot \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

Interpretarea mecanică a integralei triple

3. **momentul de inerție** al unui corp de volum V

în raport cu un plan π, o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iiint_V r^2(x,y,z) \cdot \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

unde $r = r(x,y,z)$ este distanța de la un punct curent al plăcii, $M(x,y,z)$, respectiv la planul π, dreapta d și punctul P.

În particular,

- momentul de inerție al corpului V în raport cu planul xOy este

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2 \cdot \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

- momentul al corpului de volum V în raport cu axa Ox este

$$I_{Ox} = \iiint_V (y^2 + z^2) \cdot \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

Interpretarea mecanică a integralei triple

3. momentul de inerție al unui corp de volum V

în raport cu un plan π, o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iiint_V r^2 (x, y, z) \cdot \rho (x, y, z)\, dxdydz$$

unde $r = r(x, y, z)$ este distanța de la un punct curent al plăcii, $M(x, y, z)$, respectiv la planul π, dreapta d și punctul P.

În particular,

- momentul de inerție al corpului V în raport cu planul xOy este

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2 \cdot \rho (x, y, z)\, dxdydz$$

- momentul al corpului de volum V în raport cu axa Ox este

$$I_{Ox} = \iiint_V (y^2 + z^2) \cdot \rho (x, y, z)\, dxdydz$$

- momentul de inerție al corpului de volum V în raport cu originea O este

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho (x, y, z)\, dxdydz.$$

Exemplu

Exemplul 2.15

Să se determine masa regiunii V din cilindrul solid $x^2 + y^2 \leq 4$ situată deasupra planului xOy și sub planul $y = z$ știind că densitatea în fiecare punct al lui V este egală cu $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:

Exemplu

Exemplul 2.15

Să se determine masa regiunii V din cilindrul solid $x^2 + y^2 \leq 4$ situată deasupra planului xOy și sub planul $y = z$ știind că densitatea în fiecare punct al lui V este egală cu $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Domeniul V are următoarea reprezentare grafică: