Analiză matematică - curs 14
Integrale triple

FACULTATEA DE MECANICĂ

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iași

Definiția integralei triple

- Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact (închis și mărginit). Considerăm $V_1, V_2, ..., V_n$ un șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n. \tag{1}$$

Vom spune că relația (1) definește o *descompunere a domeniului V* și notăm cu $\Delta := \{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulțimilor ce formează această descompunere.

Definiția integralei triple

- Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact (închis și mărginit). Considerăm $V_1, V_2, ..., V_n$ un șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n. \tag{1}$$

  Vom spune că relația (1) definește o *descompunere a domeniului V* și notăm cu $\Delta := \{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulțimilor ce formează această descompunere.
- Cel mai mare dintre diametrele mulțimilor $V_1, ..., V_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ și se numește *diametrul descompunerii* Δ.

Definiția integralei triple

- Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact (închis și mărginit). Considerăm $V_1, V_2, \ldots, V_n$ un șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n. \tag{1}$$

  Vom spune că relația (1) definește o *descompunere a domeniului V* și notăm cu $\Delta := \{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulțimilor ce formează această descompunere.
- Cel mai mare dintre diametrele mulțimilor $V_1, \ldots, V_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ și se numește *diametrul descompunerii* Δ.
- În fiecare subdomeniu V_i considerăm câte un punct $(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \in V_i$.

Definiția integralei triple

- Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact (închis și mărginit). Considerăm $V_1, V_2, \ldots, V_n$ un șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n. \tag{1}$$

  Vom spune că relația (1) definește o *descompunere a domeniului V* și notăm cu $\Delta := \{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulțimilor ce formează această descompunere.
- Cel mai mare dintre diametrele mulțimilor $V_1, \ldots, V_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ și se numește *diametrul descompunerii* Δ.
- În fiecare subdomeniu V_i considerăm câte un punct $(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \in V_i$.
- Fiind dată o funcție $f : V \to \mathbb{R}$, formăm suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \cdot \mathrm{Vol}(V_i). \tag{2}$$

Definiția integralei triple

- Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact (închis și mărginit). Considerăm $V_1, V_2, ..., V_n$ un șir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât
$$V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n. \tag{1}$$
Vom spune că relația (1) definește o *descompunere a domeniului V* și notăm cu $\Delta := \{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulțimilor ce formează această descompunere.
- Cel mai mare dintre diametrele mulțimilor $V_1, ..., V_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ și se numește *diametrul descompunerii* Δ.
- În fiecare subdomeniu V_i considerăm câte un punct $(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \in V_i$.
- Fiind dată o funcție $f : V \to \mathbb{R}$, formăm suma
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \cdot \mathrm{Vol}(V_i). \tag{2}$$
Această sumă se va numi *suma Riemann asociată funcției f, domeniului V, descompunerii* Δ *și punctelor* $\{(\xi_i, \eta_i, \delta_i)\}_{i=\overline{1,n}}$, și o notăm cu
$$\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i, \delta_i).$$

Definiția integralei triple

Definiția 1.1

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact și $f : V \to \mathbb{R}$. Funcția f se numește *integrabilă Riemann pe domeniul* V dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice descompunere Δ cu $\|\Delta\| < \delta$ și orice ar fi punctele $(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \in V_i$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ este satisfăcută relația:

$$|\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i, \delta_i) - I| < \varepsilon.$$

În această situație, numărul I se numește *integrala triplă în sens Riemann* a funcției f pe domeniul V și se notează prin

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dxdydz.$$

Se observă că dacă $f(x, y, z) = 1$, $\forall (x, y, z) \in V$, atunci f este integrabilă Riemann pe V și

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V dxdydz. \tag{3}$$

Integrarea pe un paralelipiped dreptunghic

Să considerăm cazul în care V este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, adică:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [a, b],\ y \in [c, d],\ z \in [e, g]\} \tag{4}$$

Teorema 1.2

Fie $f : V \to \mathbb{R}$ continuă pe domeniul V. Atunci, funcția

$$F(x, y) = \int_e^g f(x, y, z)\, dz, \quad \forall (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \tag{5}$$

este integrabilă pe $D = [a, b] \times [c, d]$. În plus,

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_D \left[\int_e^g f(x, y, z)\, dz \right] dxdy. \tag{6}$$

Observație

Observația 1.3

1. Dacă ținem cont că domeniul D este un dreptunghi, avem

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_e^g f(x,y,z)\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g f(x,y,z)\,dz, \qquad (7)$$

ordinea de integrare fiind de la dreapta la stânga.

Observație

Observația 1.3

1. Dacă ținem cont că domeniul D este un dreptunghi, avem

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_e^g f(x,y,z)\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g f(x,y,z)\,dz, \tag{7}$$

ordinea de integrare fiind de la dreapta la stânga.
2. Întrucât funcția f este continuă pe V, se poate schimba ordinea de integrare în relația (6) și astfel obținem formule analoage:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{[a,b]\times[g,e]} dxdz \int_c^d f(x,y,z)\,dy = \int_a^b dx \int_g^e dz \int_c^d f(x,y,z)\,dy,$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{[c,d]\times[g,e]} dydz \int_a^b f(x,y,z)\,dx = \int_c^d dy \int_g^e dz \int_a^b f(x,y,z)\,dx.$$

Exemplu

Exemplu

Să se calculeze integrala

$$I = \iiint_V xy \; dxdydz, \text{ unde} V = [1,2] \times [-2,1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Integrarea pe domenii simple (în raport cu axele)

Definiția 1.4

Domeniul V se numește *simplu în raport cu axa Oz* dacă există un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ și două funcții continue $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\varphi(x,y) < \psi(x,y), \forall (x,y) \in D$, astfel încât

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y), \forall\,(x,y) \in D\}. \tag{8}$$

Analog, putem defini domeniile simple în raport cu axa Ox respectiv Oy.

Integrarea pe domenii simple (în raport cu axele)

Definiția 1.4

Domeniul V se numește *simplu în raport cu axa Oz* dacă există un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ și două funcții continue φ, $\psi : D \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\varphi(x,y) < \psi(x,y), \forall (x,y) \in D$, astfel încât

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y), \forall\, (x,y) \in D\}. \tag{8}$$

Analog, putem defini domeniile simple în raport cu axa Ox respectiv Oy.

Din definiția de mai sus deducem că un domeniu $V \subset \mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa Oz dacă orice paralelă dusă prin puncte interioare lui D intersectează Fr V în exact două puncte. Analog pentru cazul domeniilor simple în raport cu Oy, respectiv Ox.

Integrarea pe domenii simple (în raport cu axele)

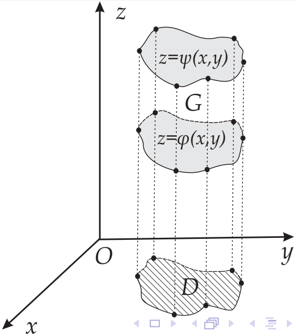
Definiția 1.4

Domeniul V se numește *simplu în raport cu axa Oz* dacă există un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ și două funcții continue $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\varphi(x,y) < \psi(x,y), \forall (x,y) \in D$, astfel încât

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y), \forall\, (x,y) \in D\}. \tag{8}$$

Analog, putem defini domeniile simple în raport cu axa Ox respectiv Oy.

Din definiția de mai sus deducem că un domeniu $V \subset \mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa Oz dacă orice paralelă dusă prin puncte interioare lui D intersectează Fr V în exact două puncte. Analog pentru cazul domeniilor simple în raport cu Oy, respectiv Ox.



Integrarea pe domenii simple (în raport cu axele)

Teorema 1.5

Fie $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, *continuă pe domeniul* V. *Atunci funcția*

$$F(x,y) = \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz, \quad \forall (x,y) \in D \tag{9}$$

este integrabilă pe D *și, în plus:*

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f\,(x,y,z)\,dz \right] dxdy. \tag{10}$$

Integrarea pe domenii simple (în raport cu axele)

Teorema 1.5

Fie $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, continuă pe domeniul V. Atunci funcția

$$F(x,y) = \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz, \quad \forall (x,y) \in D \tag{9}$$

este integrabilă pe D și, în plus:

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz = \iint_D \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right] dxdy. \tag{10}$$

Observația 1.6

Pentru simplitatea scrierii, se mai folosește notația

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\, dz, \tag{11}$$

integrarea realizându-se de la dreapta la stânga.

Exemple

Exemplul 1.7

Să se calculeze integrala $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}\, dxdydz$, unde V este domeniul limitat de planele $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

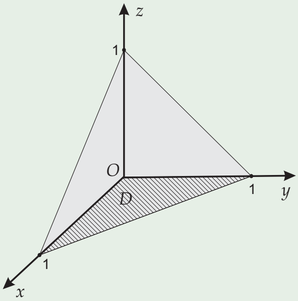
Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:

Exemple

Exemplul 1.7

Să se calculeze integrala $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} dxdydz$, unde V este domeniul limitat de planele $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Domeniul V **are următoarea reprezentare grafică**:



Exemple

Exemplul 1.8

Să se calculeze integrala $I = \iiint_V (x^2 + y^2) z \, dxdydz,$ unde V este domeniul limitat de paraboloidul de ecuație $z = x^2 + y^2$ și de sfera de ecuații $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $z \geq 0$.

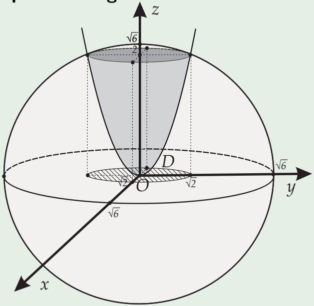
Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:

Exemple

Exemplul 1.8

Să se calculeze integrala $I = \iiint_V (x^2 + y^2)z \, dxdydz$, unde V este domeniul limitat de paraboloidul de ecuație $z = x^2 + y^2$ și de sfera de ecuații $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $z \geq 0$.

Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:



Proprietăți ale integralei triple

Teorema 1.9 (Proprietatea de liniaritate în raport cu integrandul)

Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, f, g două funcții integrabile pe V și α un număr nenul. Atunci funcțiile $f+g$, $\alpha \cdot f$ sunt integrabile pe V și, în plus:

$$\iiint_V (f+g)(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_V g(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$\iiint_V (\alpha \cdot f)(x,y,z)dxdydz = \alpha \cdot \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Proprietăți ale integralei triple

Teorema 1.9 (Proprietatea de liniaritate în raport cu integrandul)

Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, f, g două funcții integrabile pe V și α un număr nenul. Atunci funcțiile $f+g$, $\alpha \cdot f$ sunt integrabile pe V și, în plus:

$$\iiint_V (f+g)(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_V g(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$\iiint_V (\alpha \cdot f)(x,y,z)dxdydz = \alpha \cdot \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Teorema 1.10 (Proprietatea de aditivitate în raport cu domeniul)

Dacă $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ și sunt separate printr-o suprafață de volum nul, iar f este integrabilă pe V, atunci f este integrabilă pe V_i, $i = 1,2$ și rezultă

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

Reciproc, dacă f este integrabilă pe V_i, $i = 1,2$, atunci f este integrabilă pe V și are loc aceeași relație.

Proprietăți ale integralei triple

Teorema 1.11 (Pozitivitate)

Dacă $f : V \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe V și

$$f(x,y,z) \geq 0, \ \forall (x,y,z) \in V,$$

atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

Proprietăți ale integralei triple

Teorema 1.11 (Pozitivitate)

Dacă $f : V \to \mathbb{R}$ *este integrabilă pe* V *și*

$$f(x,y,z) \geq 0,\ \forall (x,y,z) \in V,$$

atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

Teorema 1.12 (monotonie)

- *Dacă* $f, g : V \to \mathbb{R}$ *sunt integrabile pe* V *și*

$$f(x,y,z) \leq g(x,y,z),\ \forall (x,y,z) \in V,$$

atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$

Proprietăți ale integralei triple

Teorema 1.11 (Pozitivitate)

Dacă $f : V \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe V și

$$f(x,y,z) \geq 0, \ \forall (x,y,z) \in V,$$

atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

Teorema 1.12 (monotonie)

- *Dacă $f, g : V \to \mathbb{R}$ sunt integrabile pe V și*

  $$f(x,y,z) \leq g(x,y,z), \ \forall (x,y,z) \in V,$$

  atunci

  $$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$

- *Dacă pentru orice $(x,y,z) \in V$ are loc*

  $$m \leq f(x,y,z) \leq M$$

  atunci este adevărată și inegalitatea

  $$m \cdot \mathrm{Vol}(V) \leq \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq M \cdot \mathrm{Vol}(V).$$

Proprietăți ale integralei triple

Teorema 1.13

Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, iar f o funcție integrabilă pe V. Atunci funcția $|f|$ este integrabilă pe V și are loc:

$$\left|\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz\right| \leq \iiint_V |f(x,y,z)|\,dxdydz.$$

Proprietăți ale integralei triple

Teorema 1.13

Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, iar f o funcție integrabilă pe V. Atunci funcția $|f|$ este integrabilă pe V și are loc:

$$\left| \iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz \right| \leq \iiint_V |f(x,y,z)|\, dxdydz.$$

Teorema 1.14 (de medie pentru integrala triplă)

Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$ și $f : V \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe V. Atunci există un punct $(x_0, y_0, z_0) \in V$ astfel încât

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz = f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathrm{Vol}(V).$$

Considerăm un corp de volum V, care are în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcție continuă și pozitivă $\rho(x, y, z)$.

1. **masa** corpului

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

Considerăm un corp de volum V, care are în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcție continuă și pozitivă $\rho(x,y,z)$.

1. **masa** corpului

$$M = \iiint_V \rho(x,y,z)\, dxdydz.$$

2. **Centrului de greutate** are coordonatele

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M} \cdot \iiint_V x \cdot \rho(x,y,z)\, dxdydz, \\ \\ \\ \end{cases}$$

Considerăm un corp de volum V, care are în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcție continuă și pozitivă $\rho(x, y, z)$.

1. masa corpului

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

2. Centrului de greutate are coordonatele

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M} \cdot \iiint_V x \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz, \\ y_G = \dfrac{1}{M} \cdot \iiint_V y \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz, \\ \end{cases}$$

Considerăm un corp de volum V, care are în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcție continuă și pozitivă $\rho(x, y, z)$.

1. **masa** corpului

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

2. **Centrului de greutate** are coordonatele

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M} \cdot \iiint_V x \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz, \\ y_G = \dfrac{1}{M} \cdot \iiint_V y \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz, \\ z_G = \dfrac{1}{M} \cdot \iiint_V z \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz. \end{cases}$$

Interpretarea mecanică a integralei triple

3. momentul de inerție al unui corp de volum V

în raport cu un plan π, o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iiint_V r^2(x,y,z) \cdot \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

unde $r = r(x,y,z)$ este distanța de la un punct curent al plăcii, $M(x,y,z)$, respectiv la planul π, dreapta d și punctul P.

În particular,

Interpretarea mecanică a integralei triple

3. momentul de inerție al unui corp de volum V

în raport cu un plan π, o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iiint_V r^2(x, y, z) \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz$$

unde $r = r(x, y, z)$ este distanța de la un punct curent al plăcii, $M(x, y, z)$, respectiv la planul π, dreapta d și punctul P.

În particular,

- momentul de inerție al corpului V în raport cu planul xOy este

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2 \cdot \rho(x, y, z)\, dxdydz$$

Interpretarea mecanică a integralei triple

3. momentul de inerție al unui corp de volum V

în raport cu un plan π, o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iiint_V r^2(x,y,z) \cdot \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

unde $r = r(x,y,z)$ este distanța de la un punct curent al plăcii, $M(x,y,z)$, respectiv la planul π, dreapta d și punctul P.

În particular,

- momentul de inerție al corpului V în raport cu planul xOy este

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2 \cdot \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

- momentul al corpului de volum V în raport cu axa Ox este

$$I_{Ox} = \iiint_V (y^2 + z^2) \cdot \rho(x,y,z)\, dxdydz$$

Interpretarea mecanică a integralei triple

3. momentul de inerție al unui corp de volum V

în raport cu un plan π, o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iiint_V r^2 (x, y, z) \cdot \rho (x, y, z) \, dxdydz$$

unde $r = r (x, y, z)$ este distanța de la un punct curent al plăcii, $M (x, y, z)$, respectiv la planul π, dreapta d și punctul P.

În particular,

- momentul de inerție al corpului V în raport cu planul xOy este

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2 \cdot \rho (x, y, z) \, dxdydz$$

- momentul al corpului de volum V în raport cu axa Ox este

$$I_{Ox} = \iiint_V (y^2 + z^2) \cdot \rho (x, y, z) \, dxdydz$$

- momentul de inerție al corpului de volum V în raport cu originea O este

$$I_O = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho (x, y, z) \, dxdydz.$$

Exemplu

Exemplul 1.15

Să se determine masa regiunii V din cilindrul solid $x^2 + y^2 \leq 4$ situată deasupra planului xOy și sub planul $y = z$ știind că densitatea în fiecare punct al lui V este egală cu $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

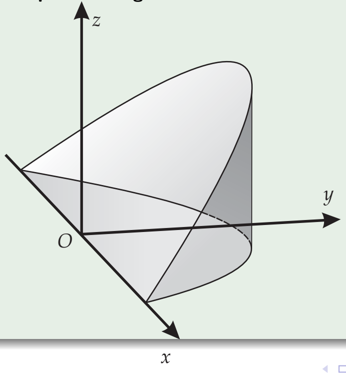
Domeniul V **are următoarea reprezentare grafică**:

Exemplu

Exemplul 1.15

Să se determine masa regiunii V din cilindrul solid $x^2 + y^2 \leq 4$ situată deasupra planului xOy și sub planul $y = z$ știind că densitatea în fiecare punct al lui V este egală cu $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:



Schimbarea de variabile ı̂n integrala triplă

Considerăm două domenii compacte V și V' din $\mathbb{R}^3$ și o transformare $T : V' \to V$:

$$\begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array} \quad , \quad (u, v, w) \in V', \ \textit{unde} \tag{12}$$

Schimbarea de variabile n̂ integrala triplă

Considerăm două domenii compacte V și V' din $\mathbb{R}^3$ și o transformare $T : V' \to V$:

$$\begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array} \quad , \quad (u, v, w) \in V', \ \textit{unde} \tag{12}$$

1. x, y, z sunt de clasă $C^1(V')$;

Schimbarea de variabile în integrala triplă

Considerăm două domenii compacte V și V' din $\mathbb{R}^3$ și o transformare $T : V' \to V$:

$$\begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array} \quad , \quad (u, v, w) \in V', \ unde \tag{12}$$

1. x, y, z sunt de clasă $C^1(V')$;2. T este surjectivă;

Schimbarea de variabile ĥ integrala triplă

Considerăm două domenii compacte V și V' din $\mathbb{R}^3$ și o transformare $T : V' \to V$:

$$\begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array} \quad , \quad (u,v,w) \in V', \;\; \textit{unde} \tag{12}$$

1. x, y, z sunt de clasă $C^1(V')$;2. T este surjectivă;3. Jacobianul

$$J(u,v,w) = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } V'.$$

Schimbarea de variabile ĥ integrala triplă

Considerăm două domenii compacte V și V' din $\mathbb{R}^3$ și o transformare $T : V' \to V$:

$$\begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array} \; , \quad (u, v, w) \in V', \; \textit{unde} \tag{12}$$

1. x, y, z sunt de clasă $C^1(V')$;2. T este surjectivă;3. Jacobianul

$$J\left(u, v, w\right) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } V'.$$

O funcție cu aceste proprietăți va fi numită *schimbare de variabile* sau de *coordonate*.

Schimbarea de variabile ĭ integrala triplă

Considerăm două domenii compacte V și V' din $\mathbb{R}^3$ și o transformare $T : V' \to V$:

$$\begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array} \ , \quad (u, v, w) \in V', \ \textit{unde} \tag{12}$$

1. x, y, z sunt de clasă $C^1(V')$;2. T este surjectivă;3. Jacobianul

$$J(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } V'.$$

O funcție cu aceste proprietăți va fi numită *schimbare de variabile* sau de *coordonate*.

Teorema 1.16

Dacă f este integrabilă pe V, atunci are loc

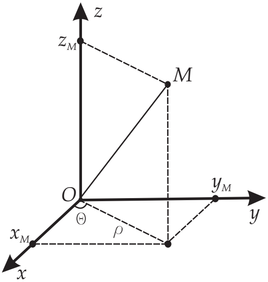
$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iiint_{V'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |J(u, v, w)| \, dudvdw. \tag{13}$$

1. Coordonate cilindrice

Trecerea la coordonate cilindrice este dată de:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \\ z = z, \end{cases}$$

unde $(\rho, \theta, z) \in V'$, $V' = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\}$.



În acest caz, ρ reprezintă proiecția razei vectoare pe planul xOy, θ este unghiul făcut de această proiecție cu axa Ox, iar z este cota carteziană.

1. Coordonate cilindrice

Trecerea la coordonate cilindrice este dată de:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \\ z = z, \end{cases}$$

unde $(\rho, \theta, z) \in V'$, $V' = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\}$.

1. Coordonate cilindrice

Trecerea la coordonate cilindrice este dată de:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \\ z = z, \end{cases}$$

unde $(\rho, \theta, z) \in V'$, $V' = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\}$.

Jacobianul transformării este:

$$J(\rho, \theta, z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \rho \cdot \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \rho.$$

2. Coordonate sferice

Trecerea la coordonate sferice este dată de:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ z = \rho \cdot \cos\varphi, \end{cases} \tag{14}$$

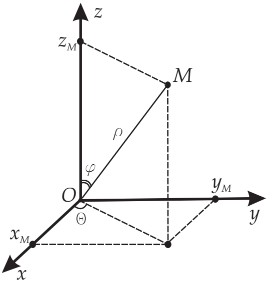
unde $(r, \theta, \varphi) \in V'$, $V' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.

2. Coordonate sferice

Trecerea la coordonate sferice este dată de:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ z = \rho \cdot \cos\varphi, \end{cases} \tag{14}$$

unde $(r, \theta, \varphi) \in V'$, $V' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.



În acest caz, ρ reprezintă raza vectoare, θ este unghiul format de proiecția razei vectoare pe planul xOy cu axa Ox, iar φ este unghiul format de raza vectoare cu axa Oz.

2. Coordonate sferice

Trecerea la coordonate sferice este dată de:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ z = \rho \cdot \cos\varphi, \end{cases} \tag{15}$$

unde $(r, \theta, \varphi) \in V'$, $V' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.

2. Coordonate sferice

Trecerea la coordonate sferice este dată de:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ z = \rho \cdot \cos\varphi, \end{cases} \tag{15}$$

unde $(r, \theta, \varphi) \in V', \ V' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \geq 0, \, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.

Jacobianul transformării este:

$$J(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin\theta.$$

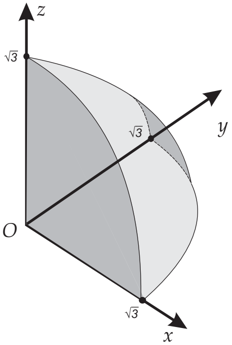
Exercițiul 1.

Calculați $\iiint\limits_V \frac{x}{x^2+y^2}dxdydz$, unde V este regiunea din primul octant mărginită de sfera de rază 3.

Exercițiul 1.

Calculați $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdydz$, unde V este regiunea din primul octant mărginită de sfera de rază 3.

Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:



Exercițiul 2.

Folosing coordonatele cilindrice, să se calculeze $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, unde V este regiunea din cilindrul $x^2+y^2 \leq 4$ situată între planul xOy și planul $y=z$.

Exercițiul 2.

Folosing coordonatele cilindrice, să se calculeze $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, unde V este regiunea din cilindrul $x^2+y^2 \leq 4$ situată între planul xOy și planul $y = z$.

Domeniul V are următoarea reprezentare grafică: