Analiză matematică - curs 1
Mulțimile $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^k$. Elemente de topologie

Facultatea de Mecanică

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iași

Verificare

- 70% teza scrisă (35% parțial săptămâna a 9-a, care se ia în considerare la final, daca nota este ≥ 5)
- 20% activitatea seminar
- 10% studiu individual

Bibliografie

- Manuale AM clasele XI-XII (Năstăsescu et. al.).

Bibliografie

- Manuale AM clasele XI-XII (Năstăsescu et. al.).

Cursuri în limba română

- I. Crăciun, *Calcul integral*, Editura PIM, Iași, 2007.
- M. Nicolescu, *Analiză matematică*, Vol. I și II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
- R. Strugariu, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Performantica, Iași, 2013.

Bibliografie

- Manuale AM clasele XI-XII (Năstăsescu et. al.).

Cursuri în limba română

- I. Crăciun, *Calcul integral*, Editura PIM, Iași, 2007.
- M. Nicolescu, *Analiză matematică*, Vol. I și II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
- R. Strugariu, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Performantica, Iași, 2013.

Culegeri

- L. Aramă, T. Morozan, *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, Ed.Tehnică, București, 1978
- Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, vol.II, III, Ed.Tehnică, București, 1978.
- S. Chiriță, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1989.
- I. Nistor, *Probleme de analiză matematică*, vol. I, II, Editura Cermi, 2003.

Bibliografie

- Manuale AM clasele XI-XII (Năstăsescu et. al.).

Cursuri în limba română

- I. Crăciun, *Calcul integral*, Editura PIM, Iași, 2007.
- M. Nicolescu, *Analiză matematică*, Vol. I și II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
- R. Strugariu, *Analiză matematică. Calcul diferențial*, Editura Performantica, Iași, 2013.

Culegeri

- L. Aramă, T. Morozan, *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, Ed.Tehnică, București, 1978
- Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral*, vol.II, III, Ed.Tehnică, București, 1978.
- S. Chiriță, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1989.
- I. Nistor, *Probleme de analiză matematică*, vol. I, II, Editura Cermi, 2003.

Web

- http://math.etc.tuiasi.ro/rstrugariu/cursuri.html

Mulțimea numerelor reale

În continuare vom nota prin:

- $\mathbb{R}_+$ – mulțimea numerelor pozitive;
- $\mathbb{R}_+^*$ – mulțimea numerelor strict pozitive;
- $\mathbb{R}_-$ – mulțimea numerelor negative;
- $\mathbb{R}_-^*$ – mulțimea numerelor strict negative.

Cu aceste notații, putem scrie $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$, unde $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.

Mulțimea numerelor reale

În continuare vom nota prin:

- $\mathbb{R}_+$ – mulțimea numerelor pozitive;
- $\mathbb{R}_+^*$ – mulțimea numerelor strict pozitive;
- $\mathbb{R}_-$ – mulțimea numerelor negative;
- $\mathbb{R}_-^*$ – mulțimea numerelor strict negative.

Cu aceste notații, putem scrie $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$, unde $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.
Fie a și b două numere reale astfel încât $a < b$. Definim următoarele mulțimi:

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, numit **interval deschis**;
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, numit **interval închis**;
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, numit **interval deschis în a, închis în b**;
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, numit **interval închis în a, deschis în b**.

Spunem despre intervalele definite mai sus că sunt **intervale mărginite**.

Mulțimea numerelor reale

În continuare vom nota prin:

- $\mathbb{R}_+$ – mulțimea numerelor pozitive;
- $\mathbb{R}_+^*$ – mulțimea numerelor strict pozitive;
- $\mathbb{R}_-$ – mulțimea numerelor negative;
- $\mathbb{R}_-^*$ – mulțimea numerelor strict negative.

Cu aceste notații, putem scrie $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$, unde $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.
Fie a și b două numere reale astfel încât $a < b$. Definim următoarele mulțimi:

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, numit **interval deschis**;
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, numit **interval închis**;
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, numit **interval deschis în a, închis în b**;
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, numit **interval închis în a, deschis în b**.

Spunem despre intervalele definite mai sus că sunt **intervale mărginite**. De asemenea, definim și următoarele tipuri de **intervale nemărginite**:

- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$;
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$;
- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$;
- $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$.

Majorant. Minorant

Definiția 2.1

Fie A o mulțime de numere reale.

Majorant. Minorant

Definiția 2.1

Fie A o mulțime de numere reale.
1. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ așa încât $a \leq \alpha$ pentru orice $a \in A$, vom spune despre mulțimea A că este **mărginită superior**, iar despre α că este un **majorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită superior**.

Majorant. Minorant

Definiția 2.1

Fie A o mulțime de numere reale.
1. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ așa încât $a \leq \alpha$ pentru orice $a \in A$, vom spune despre mulțimea A că este **mărginită superior**, iar despre α că este un **majorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită superior**.
2. Dacă există $\beta \in \mathbb{R}$ așa încât $\beta \leq a$ pentru orice $a \in A$ vom spune despre mulțimea A că este **mărginită inferior**, iar despre β că este un **minorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită inferior**.

Majorant. Minorant

Definiția 2.1

Fie A o mulțime de numere reale.
1. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ așa încât $a \leq \alpha$ pentru orice $a \in A$, vom spune despre mulțimea A că este **mărginită superior**, iar despre α că este un **majorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită superior**.
2. Dacă există $\beta \in \mathbb{R}$ așa încât $\beta \leq a$ pentru orice $a \in A$ vom spune despre mulțimea A că este **mărginită inferior**, iar despre β că este un **minorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită inferior**.
3. Dacă pentru A există și majoranți și minoranți, spunem că A este o **mulțime mărginită**.

Majorant. Minorant

Definiția 2.1

Fie A o mulțime de numere reale.
1. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ așa încât $a \leq \alpha$ pentru orice $a \in A$, vom spune despre mulțimea A că este **mărginită superior**, iar despre α că este un **majorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită superior**.
2. Dacă există $\beta \in \mathbb{R}$ așa încât $\beta \leq a$ pentru orice $a \in A$ vom spune despre mulțimea A că este **mărginită inferior**, iar despre β că este un **minorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită inferior**.
3. Dacă pentru A există și majoranți și minoranți, spunem că A este o **mulțime mărginită**.

Exemplul 2.2

1. $\mathbb{N}$.

Majorant. Minorant

Definiția 2.1

Fie A o mulțime de numere reale.
1. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ așa încât $a \leq \alpha$ pentru orice $a \in A$, vom spune despre mulțimea A că este **mărginită superior**, iar despre α că este un **majorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită superior**.
2. Dacă există $\beta \in \mathbb{R}$ așa încât $\beta \leq a$ pentru orice $a \in A$ vom spune despre mulțimea A că este **mărginită inferior**, iar despre β că este un **minorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită inferior**.
3. Dacă pentru A există și majoranți și minoranți, spunem că A este o **mulțime mărginită**.

Exemplul 2.2

1. $\mathbb{N}$.
2. $\mathbb{Z}$.

Majorant. Minorant

Definiția 2.1

Fie A o mulțime de numere reale.
1. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ așa încât $a \leq \alpha$ pentru orice $a \in A$, vom spune despre mulțimea A că este **mărginită superior**, iar despre α că este un **majorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită superior**.
2. Dacă există $\beta \in \mathbb{R}$ așa încât $\beta \leq a$ pentru orice $a \in A$ vom spune despre mulțimea A că este **mărginită inferior**, iar despre β că este un **minorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită inferior**.
3. Dacă pentru A există și majoranți și minoranți, spunem că A este o **mulțime mărginită**.

Exemplul 2.2

1. $\mathbb{N}$.
2. $\mathbb{Z}$.
3. $[a, b)$, (a, b).

Majorant. Minorant

Definiția 2.1

Fie A o mulțime de numere reale.
1. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ așa încât $a \leq \alpha$ pentru orice $a \in A$, vom spune despre mulțimea A că este **mărginită superior**, iar despre α că este un **majorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită superior**.
2. Dacă există $\beta \in \mathbb{R}$ așa încât $\beta \leq a$ pentru orice $a \in A$ vom spune despre mulțimea A că este **mărginită inferior**, iar despre β că este un **minorant** pentru A. În caz contrar, spunem despre mulțimea A că este **nemărginită inferior**.
3. Dacă pentru A există și majoranți și minoranți, spunem că A este o **mulțime mărginită**.

Exemplul 2.2

1. $\mathbb{N}$.
2. $\mathbb{Z}$.
3. $[a, b)$, (a, b).
4. $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Supremum. Infimum

Definiția 2.3

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Spunem despre un număr real M că este **marginea superioară** a mulțimii A, sau **supremum** al mulțimii A, și notăm $M = \sup A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

Supremum. Infimum

Definiția 2.3

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Spunem despre un număr real M că este **marginea superioară** a mulțimii A, sau **supremum** al mulțimii A, și notăm $M = \sup A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:
(i) M este un majorant al mulțimii A :

$$a \leq M, \ \forall a \in A;$$

Supremum. Infimum

Definiția 2.3

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Spunem despre un număr real M că este **marginea superioară** a mulțimii A, sau **supremum** al mulțimii A, și notăm $M = \sup A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:
(i) M este un majorant al mulțimii A :

$$a \leq M, \ \forall a \in A;$$

(ii) M este mai mic decât orice alt majorant al mulțimii A :

$$(a \leq M', \forall a \in A) \Rightarrow M \leq M'.$$

Supremum. Infimum

Definiția 2.3

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Spunem despre un număr real M că este **marginea superioară** a mulțimii A, sau **supremum** al mulțimii A, și notăm $M = \sup A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:
(i) M este un majorant al mulțimii A :

$$a \leq M, \ \forall a \in A;$$

(ii) M este mai mic decât orice alt majorant al mulțimii A :

$$(a \leq M', \forall a \in A) \Rightarrow M \leq M'.$$

2. Spunem despre un număr real m că este **marginea inferioară** a mulțimii A, sau **infimum** al mulțimii A, și notăm $m = \inf A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:

Supremum. Infimum

Definiția 2.3

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Spunem despre un număr real M că este **marginea superioară** a mulțimii A, sau **supremum** al mulțimii A, și notăm $M = \sup A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:
(i) M este un majorant al mulțimii A :

$$a \leq M, \ \forall a \in A;$$

(ii) M este mai mic decât orice alt majorant al mulțimii A :

$$(a \leq M', \forall a \in A) \Rightarrow M \leq M'.$$

2. Spunem despre un număr real m că este **marginea inferioară** a mulțimii A, sau **infimum** al mulțimii A, și notăm $m = \inf A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:
(i) m este un minorant al mulțimii A :

$$m \leq a, \ \forall a \in A;$$

Supremum. Infimum

Definiția 2.3

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$. Spunem despre un număr real M că este **marginea superioară** a mulțimii A, sau **supremum** al mulțimii A, și notăm $M = \sup A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:
(i) M este un majorant al mulțimii A :

$$a \leq M, \ \forall a \in A;$$

(ii) M este mai mic decât orice alt majorant al mulțimii A :

$$(a \leq M', \forall a \in A) \Rightarrow M \leq M'.$$

2. Spunem despre un număr real m că este **marginea inferioară** a mulțimii A, sau **infimum** al mulțimii A, și notăm $m = \inf A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:
(i) m este un minorant al mulțimii A :

$$m \leq a, \ \forall a \in A;$$

(ii) m este mai mare decât orice alt minorant al mulțimii A :

$$(m' \leq a, \forall a \in A) \Rightarrow m' \leq m.$$

Caracterizări ale supremumului și infimumului

Teorema 2.4

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă și $M \in \mathbb{R}$. Atunci $M = \sup A$ dacă și numai dacă:
(i) $a \leq M$, $\forall a \in A$ și
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un element $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Caracterizări ale supremumului și infimumului

Teorema 2.4

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă și $M \in \mathbb{R}$. Atunci $M = \sup A$ dacă și numai dacă:
(i) $a \leq M$, $\forall a \in A$ și
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un element $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.
2. Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă și $m \in \mathbb{R}$. Atunci $m = \inf A$ dacă și numai dacă:
(i) $m \leq a$, $\forall a \in A$ și
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un element $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Caracterizări ale supremumului și infimumului

Teorema 2.4

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă și $M \in \mathbb{R}$. Atunci $M = \sup A$ dacă și numai dacă:
(i) $a \leq M$, $\forall a \in A$ și
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un element $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.
2. Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă și $m \in \mathbb{R}$. Atunci $m = \inf A$ dacă și numai dacă:
(i) $m \leq a$, $\forall a \in A$ și
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un element $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Observația 2.5

1. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, atunci $\sup(a, b) = b$, $\inf(a, b] = a$ etc.

Caracterizări ale supremumului și infimumului

Teorema 2.4

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă și $M \in \mathbb{R}$. Atunci $M = \sup A$ dacă și numai dacă:
(i) $a \leq M$, $\forall a \in A$ și
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un element $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.
2. Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă și $m \in \mathbb{R}$. Atunci $m = \inf A$ dacă și numai dacă:
(i) $m \leq a$, $\forall a \in A$ și
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un element $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Observația 2.5

1. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, atunci $\sup(a, b) = b$, $\inf(a, b] = a$ etc.
2. Dacă $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q^2 \leq 2\}$ atunci $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ iar $\inf A = 0$. Deși $\mathbb{Q}$ este un corp total ordonat, el nu este complet în sensul precizat de următoarea axiomă.

Caracterizări ale supremumului și infimumului

Teorema 2.4

1. Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă și $M \in \mathbb{R}$. Atunci $M = \sup A$ dacă și numai dacă:
(i) $a \leq M$, $\forall a \in A$ și
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un element $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.
2. Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă și $m \in \mathbb{R}$. Atunci $m = \inf A$ dacă și numai dacă:
(i) $m \leq a$, $\forall a \in A$ și
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un element $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Observația 2.5

1. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, atunci $\sup(a, b) = b$, $\inf(a, b] = a$ etc.
2. Dacă $A = \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q^2 \leq 2\}$ atunci $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ iar $\inf A = 0$. Deși $\mathbb{Q}$ este un corp total ordonat, el nu este complet în sensul precizat de următoarea axiomă.

Axioma de completitudine (Cantor - Dedekind)

Orice submulțime nevidă a lui $\mathbb{R}$ care este majorată admite cel puțin o margine superioară în $\mathbb{R}$, adică există $\sup A \in \mathbb{R}$.

Proprietatea lui Arhimede. Densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

Teorema 2.6 (Proprietatea lui Arhimede)

Dacă x și y sunt numere reale strict pozitive, atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $nx > y$.

Proprietatea lui Arhimede. Densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

Teorema 2.6 (Proprietatea lui Arhimede)

Dacă x și y sunt numere reale strict pozitive, atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $nx > y$.

Observația 2.7

1. Aplicând Proprietatea lui Arhimede pentru $x := \varepsilon > 0$ oarecare și $y := 1$, obținem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{n} < \varepsilon$. De aici rezultă că $\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} = 0$.

Proprietatea lui Arhimede. Densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

Teorema 2.6 (Proprietatea lui Arhimede)

Dacă x și y sunt numere reale strict pozitive, atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $nx > y$.

Observația 2.7

1. Aplicând Proprietatea lui Arhimede pentru $x := \varepsilon > 0$ oarecare și $y := 1$, obținem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{n} < \varepsilon$. De aici rezultă că $\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} = 0$.
2. Aplicând Proprietatea lui Arhimede pentru $x := 1$ și $y := a > 0$, obținem că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a < n$.

Proprietatea lui Arhimede. Densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$

Teorema 2.6 (Proprietatea lui Arhimede)

Dacă x și y sunt numere reale strict pozitive, atunci există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $nx > y$.

Observația 2.7

1. Aplicând Proprietatea lui Arhimede pentru $x := \varepsilon > 0$ oarecare și $y := 1$, obținem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{n} < \varepsilon$. De aici rezultă că $\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} = 0$.
2. Aplicând Proprietatea lui Arhimede pentru $x := 1$ și $y := a > 0$, obținem că există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a < n$.

Teorema 2.8 (Densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$)

Între orice două numere reale distincte se află cel puțin un număr rațional.

Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$

Mulțimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ o vom nota cu $\overline{\mathbb{R}}$ și o vom numi **dreapta reală încheiată** sau **compactificată**. Vom prelungi ordinea uzuală a lui $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$ prin:

$$-\infty < x, \quad x < +\infty, \quad -\infty < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$

Mulțimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ o vom nota cu $\overline{\mathbb{R}}$ și o vom numi **dreapta reală încheiată** sau **compactificată**. Vom prelungi ordinea uzuală a lui $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$ prin:

$$-\infty < x, \quad x < +\infty, \quad -\infty < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De asemenea, prelungim și operațiile algebrice din $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$, fără a fi însă definite peste tot:

$x + \infty = \infty + x = \infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$

$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$

$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty,$ pentru $x > 0$ și $x \in \overline{\mathbb{R}}$

$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty,$ pentru $x < 0$ și $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$

Mulțimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ o vom nota cu $\overline{\mathbb{R}}$ și o vom numi **dreapta reală încheiată** sau **compactificată**. Vom prelungi ordinea uzuală a lui $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$ prin:

$$-\infty < x, \quad x < +\infty, \quad -\infty < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De asemenea, prelungim și operațiile algebrice din $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$, fără a fi însă definite peste tot:

$x + \infty = \infty + x = \infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$

$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$

$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty, \quad$ pentru $x > 0$ și $x \in \overline{\mathbb{R}}$

$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty, \quad$ pentru $x < 0$ și $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Următoarele operații sunt nedefinite (se mai numesc și **nedeterminări**, și vor fi reluate mai târziu):

$$\infty + (-\infty), \quad (-\infty) + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$

Mulțimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ o vom nota cu $\overline{\mathbb{R}}$ și o vom numi **dreapta reală încheiată** sau **compactificată**. Vom prelungi ordinea uzuală a lui $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$ prin:

$$-\infty < x, \quad x < +\infty, \quad -\infty < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De asemenea, prelungim și operațiile algebrice din $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$, fără a fi însă definite peste tot:

$x + \infty = \infty + x = \infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$

$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$

$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty,$ pentru $x > 0$ și $x \in \overline{\mathbb{R}}$

$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty,$ pentru $x < 0$ și $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Următoarele operații sunt nedefinite (se mai numesc și **nedeterminări**, și vor fi reluate mai târziu):

$$\infty + (-\infty), \quad (-\infty) + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulțime nevidă, majorată, atunci $\sup A \in \mathbb{R}$, conform axiomei de completitudine. Dacă A nu este majorată, atunci vom pune, prin definiție, $\sup A := +\infty$, iar daca A nu este minorată, vom pune $\inf A := -\infty$. În acest fel, orice submulțime nevidă din $\overline{\mathbb{R}}$ are margine superioară și margine inferioară în $\overline{\mathbb{R}}$.

Spațiul $\mathbb{R}^k$

Considerăm $k \in \mathbb{N}^*$ și fie

$$\mathbb{R}^k := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{\text{de } k \text{ ori}} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, k}\}.$$

Spațiul $\mathbb{R}^k$

Considerăm $k \in \mathbb{N}^*$ și fie

$$\mathbb{R}^k := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{\text{de } k \text{ ori}} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_k) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, k}\}.$$

Această mulțime se organizează ca spațiu liniar real în raport cu operațiile

$$\text{“}+\text{”} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, \;\; x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_k + y_k),$$
$$\text{“}\cdot\text{”} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k, \;\; a \cdot x = (ax_1, ax_2, ..., ax_k),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^k$ și orice $a \in \mathbb{R}$, operații numite **adunarea și înmulțirea cu scalari**. După cum se va vedea la cursul de algebră liniară, acest lucru înseamnă de fapt următoarele:
I. $(\mathbb{R}^k, +)$ este grup abelian;
II. Înmulțirea cu scalari satisface proprietățile

1. $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$;
2. $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$;
3. $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$;
4. $1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$.

Norme pe $\mathbb{R}^k$

Definiția 4.1

O aplicație $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ se numește **normă** pe $\mathbb{R}^k$ dacă îndeplinește relațiile:
(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(N_2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \, \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$;
(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Norme pe $\mathbb{R}^k$

Definiția 4.1

O aplicație $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ se numește **normă** pe $\mathbb{R}^k$ dacă îndeplinește relațiile:
(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(N_2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \, \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$;
(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Proprietățile $(N_1) - (N_3)$ se mai numesc **axiomele normei**. Având definită o normă $\|\cdot\|$ pe $\mathbb{R}^k$, vom spune că $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ este **spațiu liniar normat**. Pentru un element $x \in \mathbb{R}^k$, vom numi $\|x\|$ **norma** sau **lungimea** vectorului x.

Norme pe $\mathbb{R}^k$

Definiția 4.1

O aplicație $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ se numește **normă** pe $\mathbb{R}^k$ dacă îndeplinește relațiile:
(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(N_2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \, \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$;
(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Proprietățile $(N_1) - (N_3)$ se mai numesc **axiomele normei**. Având definită o normă $\|\cdot\|$ pe $\mathbb{R}^k$, vom spune că $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ este **spațiu liniar normat**. Pentru un element $x \in \mathbb{R}^k$, vom numi $\|x\|$ **norma** sau **lungimea** vectorului x.

Propoziția 4.2 (Proprietăți ale normei)

Presupunem că $\|\cdot\|$ este o normă pe $\mathbb{R}^k$. Atunci:
(i) $\|-x\| = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$;
(ii) $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$;
(iii) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Exemple de norme pe $\mathbb{R}^k$

Exemplul 4.3 (Exemple remarcabile de norme)

1. Pentru $k = 1$, funcția modul $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o normă.

Exemple de norme pe $\mathbb{R}^k$

Exemplul 4.3 (Exemple remarcabile de norme)

1. Pentru $k = 1$, funcția modul $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o normă.
2. Aplicația $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

satisface $(N_1) - (N_3)$ și se numește **norma euclidiană**.

Exemple de norme pe $\mathbb{R}^k$

Exemplul 4.3 (Exemple remarcabile de norme)

1. Pentru $k = 1$, funcția modul $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o normă.
2. Aplicația $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

satisface $(N_1) - (N_3)$ și se numește **norma euclidiană**.
3. Aplicația $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{k} |x_i|, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k. \tag{2}$$

satisface $(N_1) - (N_3)$ și se numește **norma Manhattan.**

Exemple de norme pe $\mathbb{R}^k$

Exemplul 4.3 (Exemple remarcabile de norme)

1. Pentru $k = 1$, funcția modul $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o normă.
2. Aplicația $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k, \tag{1}$$

satisface $(N_1) - (N_3)$ și se numește **norma euclidiană**.

3. Aplicația $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{k} |x_i|, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k. \tag{2}$$

satisface $(N_1) - (N_3)$ și se numește **norma Manhattan.**

4. Aplicația $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|x\|_\infty := \max_{i=\overline{1,k}} |x_i|, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k. \tag{3}$$

satisface $(N_1) - (N_3)$ și se numește **norma maximum**.

Exercițiu

Exercițiul 4.4

Să se calculeze normele $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ pentru vectorii:
a) $x = (-1, 3) \in \mathbb{R}^2$;
b) $y = (2, -1, 5) \in \mathbb{R}^3$;
c) $z = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right) \in \mathbb{R}^4$.

Exercițiu

Exercițiul 4.4

Să se calculeze normele $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ pentru vectorii:
a) $x = (-1, 3) \in \mathbb{R}^2$;
b) $y = (2, -1, 5) \in \mathbb{R}^3$;
c) $z = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right) \in \mathbb{R}^4$.

Soluție. a)
$\|x\|_2 = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$; $\|x\|_1 = |-1| + |3| = 4$; $\|x\|_\infty = \max\{|-1|, |3|\} = 3$.
b) $\|y\|_2 = \sqrt{30}$, $\|y\|_1 = 8$; $\|y\|_\infty = 5$.
c) $\|z\|_2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{65}}{12}$, $\|z\|_1 = \frac{5}{4}$; $\|z\|_\infty = \frac{1}{2}$. $\square$

Bile deschise și închise. Sfere

Fie $a \in \mathbb{R}^k$, $r > 0$ și $\|\cdot\|$ o normă pe $\mathbb{R}^k$.

Definiția 5.1

Se numește **bilă deschisă de centru** a **și rază** r mulțimea

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| < r\}.$$

Bile deschise și închise. Sfere

Fie $a \in \mathbb{R}^k$, $r > 0$ și $\|\cdot\|$ o normă pe $\mathbb{R}^k$.

Definiția 5.1

Se numește **bilă deschisă de centru** a **și rază** r mulțimea

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| < r\}.$$

Se numește **bilă închisă de centru** a **și rază** r mulțimea

$$D(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| \leq r\}.$$

Bile deschise și închise. Sfere

Fie $a \in \mathbb{R}^k$, $r > 0$ și $\|\cdot\|$ o normă pe $\mathbb{R}^k$.

Definiția 5.1

Se numește **bilă deschisă de centru** a **și rază** r mulțimea

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| < r\}.$$

Se numește **bilă închisă de centru** a **și rază** r mulțimea

$$D(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| \leq r\}.$$

Se numește **sferă de centru** a **și rază** r mulțimea

$$S(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| = r\}.$$

Bile deschise și închise. Sfere

Fie $a \in \mathbb{R}^k$, $r > 0$ și $\|\cdot\|$ o normă pe $\mathbb{R}^k$.

Definiția 5.1

Se numește **bilă deschisă de centru** a **și rază** r mulțimea

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| < r\}.$$

Se numește **bilă închisă de centru** a **și rază** r mulțimea

$$D(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| \leq r\}.$$

Se numește **sferă de centru** a **și rază** r mulțimea

$$S(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| = r\}.$$

Exemplul 5.2

În cazul lui $\mathbb{R}$ înzestrat cu metrica uzuală, obținem $B(a, r) = (a - r, a + r)$, $D(a, r) = [a - r, a + r]$, $S(a, r) = \{a - r, a + r\}$.

Bile deschise și închise. Sfere

Exemplul 5.3

Să considerăm cazul lui $\mathbb{R}^2$. Pentru norma euclidiană $\|\cdot\|_2$, bila deschisă, bila închisă și sfera de centru $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ și rază $r > 0$ vor fi, respectiv

$$B_2(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\},$$
$$D_2(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\},$$
$$S_2(a, r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\}.$$

Deduceți cum arată aceste mulțimi dacă în locul normei $\|\cdot\|_2$ se consideră $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$.

Bile deschise și închise. Sfere

Exemplul 5.3

Să considerăm cazul lui $\mathbb{R}^2$. Pentru norma euclidiană $\|\cdot\|_2$, bila deschisă, bila închisă și sfera de centru $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ și rază $r > 0$ vor fi, respectiv

$$B_2(a,r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\},$$
$$D_2(a,r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 \leq r^2\},$$
$$S_2(a,r) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\}.$$

Deduceți cum arată aceste mulțimi dacă în locul normei $\|\cdot\|_2$ se consideră $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$.

Definiția 5.4

Mulțimea A din spațiul $\mathbb{R}^k$ se numește **mărginită** dacă există $a \in \mathbb{R}^k$ și $r > 0$ astfel încât $A \subset D(a,r)$. În caz contrar, A se numește **nemărginită**.

Vecinătățile unui punct

Definiția 5.5

Se numește **vecinătate** a punctului $x \in \mathbb{R}^k$ orice mulțime care conține o bilă deschisă centrată în x. Vom nota cu $\mathcal{V}(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților punctului x și o vom numi **sistem de vecinătăți** pentru punctul x.

Vecinătățile unui punct

Definiția 5.5

Se numește **vecinătate** a punctului $x \in \mathbb{R}^k$ orice mulțime care conține o bilă deschisă centrată în x. Vom nota cu $\mathcal{V}(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților punctului x și o vom numi **sistem de vecinătăți** pentru punctul x.

Exemplul 5.6

Pentru $k = 1$, avem că pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \text{există } r > 0 \text{ astfel încât } (x - r, x + r) \subset V.$$

Vecinătățile unui punct

Definiția 5.5

Se numește **vecinătate** a punctului $x \in \mathbb{R}^k$ orice mulțime care conține o bilă deschisă centrată în x. Vom nota cu $\mathcal{V}(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților punctului x și o vom numi **sistem de vecinătăți** pentru punctul x.

Exemplul 5.6

Pentru $k = 1$, avem că pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \text{există } r > 0 \text{ astfel încât } (x - r, x + r) \subset V.$$

Definiția 5.7

Fie $x \in \overline{\mathbb{R}}$.
Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow$ există $r > 0$ astfel încât $(x - r, x + r) \subset V$;

Vecinătățile unui punct

Definiția 5.5

Se numește **vecinătate** a punctului $x \in \mathbb{R}^k$ orice mulțime care conține o bilă deschisă centrată în x. Vom nota cu $\mathcal{V}(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților punctului x și o vom numi **sistem de vecinătăți** pentru punctul x.

Exemplul 5.6

Pentru $k = 1$, avem că pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \text{există } r > 0 \text{ astfel încât } (x - r, x + r) \subset V.$$

Definiția 5.7

Fie $x \in \overline{\mathbb{R}}$.
Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow$ există $r > 0$ astfel încât $(x - r, x + r) \subset V$;
Dacă $x = +\infty$, atunci $V \in \mathcal{V}(+\infty) \Leftrightarrow$ există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, +\infty] \subset V$;

Vecinătățile unui punct

Definiția 5.5

Se numește **vecinătate** a punctului $x \in \mathbb{R}^k$ orice mulțime care conține o bilă deschisă centrată în x. Vom nota cu $\mathcal{V}(x)$ mulțimea tuturor vecinătăților punctului x și o vom numi **sistem de vecinătăți** pentru punctul x.

Exemplul 5.6

Pentru $k = 1$, avem că pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \text{există } r > 0 \text{ astfel încât } (x - r, x + r) \subset V.$$

Definiția 5.7

Fie $x \in \overline{\mathbb{R}}$.
Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow$ există $r > 0$ astfel încât $(x - r, x + r) \subset V$;
Dacă $x = +\infty$, atunci $V \in \mathcal{V}(+\infty) \Leftrightarrow$ există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, +\infty] \subset V$;
Dacă $x = -\infty$, atunci $V \in \mathcal{V}(-\infty) \Leftrightarrow$ există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $[-\infty, b) \subset V$.

Mulțimi deschise

Definiția 5.8

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **deschisă** dacă $D = \emptyset$ sau D este vecinătate pentru orice punct al său.

Mulțimi deschise

Definiția 5.8

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **deschisă** dacă $D = \emptyset$ sau D este vecinătate pentru orice punct al său.

Exemplul 5.9

1. Orice bilă deschisă $B(x, r)$ din $\mathbb{R}^k$ este mulțime deschisă. În cazul $k = 1$, orice interval de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ este o mulțime deschisă.

Mulțimi deschise

Definiția 5.8

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **deschisă** dacă $D = \emptyset$ sau D este vecinătate pentru orice punct al său.

Exemplul 5.9

1. Orice bilă deschisă $B(x, r)$ din $\mathbb{R}^k$ este mulțime deschisă. În cazul $k = 1$, orice interval de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ este o mulțime deschisă.
2. Intervalele de forma (a, b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ sunt mulțimi deschise.

Mulțimi deschise

Definiția 5.8

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **deschisă** dacă $D = \emptyset$ sau D este vecinătate pentru orice punct al său.

Exemplul 5.9

1. Orice bilă deschisă $B(x, r)$ din $\mathbb{R}^k$ este mulțime deschisă. În cazul $k = 1$, orice interval de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ este o mulțime deschisă.
2. Intervalele de forma (a, b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ sunt mulțimi deschise.
3. Pentru $a \in \mathbb{R}^k$ și $r > 0$, mulțimea $A := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| > r\}$ este o mulțime deschisă.

Mulțimi deschise

Definiția 5.8

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **deschisă** dacă $D = \emptyset$ sau D este vecinătate pentru orice punct al său.

Exemplul 5.9

1. Orice bilă deschisă $B(x, r)$ din $\mathbb{R}^k$ este mulțime deschisă. În cazul $k = 1$, orice interval de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ este o mulțime deschisă.
2. Intervalele de forma (a, b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ sunt mulțimi deschise.
3. Pentru $a \in \mathbb{R}^k$ și $r > 0$, mulțimea $A := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| > r\}$ este o mulțime deschisă.
4. Mulțimea $(0, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ nu este deschisă deoarece nu este vecinătate pentru 2.

Mulțimi deschise

Definiția 5.8

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **deschisă** dacă $D = \emptyset$ sau D este vecinătate pentru orice punct al său.

Exemplul 5.9

1. Orice bilă deschisă $B(x, r)$ din $\mathbb{R}^k$ este mulțime deschisă. În cazul $k = 1$, orice interval de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ este o mulțime deschisă.
2. Intervalele de forma (a, b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ sunt mulțimi deschise.
3. Pentru $a \in \mathbb{R}^k$ și $r > 0$, mulțimea $A := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| > r\}$ este o mulțime deschisă.
4. Mulțimea $(0, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ nu este deschisă deoarece nu este vecinătate pentru 2.

Teorema 5.10 (Proprietăți ale mulțimilor deschise)

Au loc următoarele afirmații:
(i) Orice reuniune (finită sau infinită) de mulțimi deschise este o mulțime deschisă;

Mulțimi deschise

Definiția 5.8

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **deschisă** dacă $D = \emptyset$ sau D este vecinătate pentru orice punct al său.

Exemplul 5.9

1. Orice bilă deschisă $B(x, r)$ din $\mathbb{R}^k$ este mulțime deschisă. În cazul $k = 1$, orice interval de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ este o mulțime deschisă.
2. Intervalele de forma (a, b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ sunt mulțimi deschise.
3. Pentru $a \in \mathbb{R}^k$ și $r > 0$, mulțimea $A := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| > r\}$ este o mulțime deschisă.
4. Mulțimea $(0, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ nu este deschisă deoarece nu este vecinătate pentru 2.

Teorema 5.10 (Proprietăți ale mulțimilor deschise)

Au loc următoarele afirmații:
(i) Orice reuniune (finită sau infinită) de mulțimi deschise este o mulțime deschisă;
(ii) Orice intersecție finită de mulțimi deschise este o mulțime deschisă;

Mulțimi deschise

Definiția 5.8

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **deschisă** dacă $D = \emptyset$ sau D este vecinătate pentru orice punct al său.

Exemplul 5.9

1. Orice bilă deschisă $B(x, r)$ din $\mathbb{R}^k$ este mulțime deschisă. În cazul $k = 1$, orice interval de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ este o mulțime deschisă.
2. Intervalele de forma (a, b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ sunt mulțimi deschise.
3. Pentru $a \in \mathbb{R}^k$ și $r > 0$, mulțimea $A := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| > r\}$ este o mulțime deschisă.
4. Mulțimea $(0, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ nu este deschisă deoarece nu este vecinătate pentru 2.

Teorema 5.10 (Proprietăți ale mulțimilor deschise)

Au loc următoarele afirmații:
(i) Orice reuniune (finită sau infinită) de mulțimi deschise este o mulțime deschisă;
(ii) Orice intersecție finită de mulțimi deschise este o mulțime deschisă;
(iii) $\mathbb{R}^k$ *este o mulțime deschisă.*

Mulțimi închise

Definiția 5.11

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **închisă** dacă mulțimea sa complementară, $cD := \mathbb{R}^k \setminus D$, este deschisă.

Mulțimi închise

Definiția 5.11

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **închisă** dacă mulțimea sa complementară, $cD := \mathbb{R}^k \setminus D$, este deschisă.

Exemplul 5.12

1. $\emptyset, \mathbb{R}^k$ sunt mulțimi închise, deoarece $c\emptyset = \mathbb{R}^k$, $c\mathbb{R}^k = \emptyset$ sunt deschise.

Mulțimi închise

Definiția 5.11

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **închisă** dacă mulțimea sa complementară, $cD := \mathbb{R}^k \setminus D$, este deschisă.

Exemplul 5.12

1. $\emptyset, \mathbb{R}^k$ sunt mulțimi închise, deoarece $c\emptyset = \mathbb{R}^k$, $c\mathbb{R}^k = \emptyset$ sunt deschise.
2. Orice bilă închisă $D(a, r)$ dintr-un spațiu metric este mulțime închisă deoarece complementara sa, $\mathbb{R}^k \setminus D(x, r) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| > r\}$, este deschisă.

Mulțimi închise

Definiția 5.11

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **închisă** dacă mulțimea sa complementară, $cD := \mathbb{R}^k \setminus D$, este deschisă.

Exemplul 5.12

1. $\emptyset, \mathbb{R}^k$ sunt mulțimi închise, deoarece $c\emptyset = \mathbb{R}^k$, $c\mathbb{R}^k = \emptyset$ sunt deschise.
2. Orice bilă închisă $D(a, r)$ dintr-un spațiu metric este mulțime închisă deoarece complementara sa, $\mathbb{R}^k \setminus D(x, r) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| > r\}$, este deschisă.

Teorema 5.13 (Proprietăți ale mulțimilor închise)

Au loc următoarele afirmații:
(i) Orice reuniune finită de mulțimi închise este o mulțime închisă;

Mulțimi închise

Definiția 5.11

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **închisă** dacă mulțimea sa complementară, $cD := \mathbb{R}^k \setminus D$, este deschisă.

Exemplul 5.12

1. $\emptyset, \mathbb{R}^k$ sunt mulțimi închise, deoarece $c\emptyset = \mathbb{R}^k$, $c\mathbb{R}^k = \emptyset$ sunt deschise.
2. Orice bilă închisă $D(a, r)$ dintr-un spațiu metric este mulțime închisă deoarece complementara sa, $\mathbb{R}^k \setminus D(x, r) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| > r\}$, este deschisă.

Teorema 5.13 (Proprietăți ale mulțimilor închise)

Au loc următoarele afirmații:
(i) Orice reuniune finită de mulțimi închise este o mulțime închisă;
(ii) Orice intersecție (finită sau infinită) de mulțimi închise este o mulțime închisă.

Mulțimi închise

Definiția 5.11

O submulțime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numește **închisă** dacă mulțimea sa complementară, $cD := \mathbb{R}^k \setminus D$, este deschisă.

Exemplul 5.12

1. $\emptyset, \mathbb{R}^k$ sunt mulțimi închise, deoarece $c\emptyset = \mathbb{R}^k$, $c\mathbb{R}^k = \emptyset$ sunt deschise.
2. Orice bilă închisă $D(a, r)$ dintr-un spațiu metric este mulțime închisă deoarece complementara sa, $\mathbb{R}^k \setminus D(x, r) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| > r\}$, este deschisă.

Teorema 5.13 (Proprietăți ale mulțimilor închise)

Au loc următoarele afirmații:
(i) Orice reuniune finită de mulțimi închise este o mulțime închisă;
(ii) Orice intersecție (finită sau infinită) de mulțimi închise este o mulțime închisă.

Exercițiul 5.14

Precizați dacă mulțimea următoare este deschisă sau închisă în $\mathbb{R}^4$:

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid |x_1| > 0,\ x_2 < 1,\ x_3 \neq -2\}.$$

Interiorul unei mulțimi

Definiția 5.15

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime nevidă. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct interior** mulțimii A dacă $A \in \mathcal{V}(x)$. Totalitatea punctelor interioare mulțimii A se notează cu $\overset{\circ}{A}$ sau cu $\operatorname{int} A$ și se numește **interiorul** mulțimii A.

Interiorul unei mulțimi

Definiția 5.15

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime nevidă. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct interior** mulțimii A dacă $A \in \mathcal{V}(x)$. Totalitatea punctelor interioare mulțimii A se notează cu $\overset{\circ}{A}$ sau cu $\operatorname{int} A$ și se numește **interiorul** mulțimii A.

Exemplul 5.16

1. În cazul lui $\mathbb{R}$, fie intervalele: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$. Interiorul tuturor mulțimilor este egal cu (a, b).

Interiorul unei mulțimi

Definiția 5.15

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime nevidă. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct interior** mulțimii A dacă $A \in \mathcal{V}(x)$. Totalitatea punctelor interioare mulțimii A se notează cu $\overset{\circ}{A}$ sau cu $\operatorname{int} A$ și se numește **interiorul** mulțimii A.

Exemplul 5.16

1. În cazul lui $\mathbb{R}$, fie intervalele: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$. Interiorul tuturor mulțimilor este egal cu (a, b).

2. Fie $k = 1$ și mulțimile $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Avem $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} = \emptyset$, deoarece pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$, niciuna din mulțimile A, B nu poate conține intervale de forma $(x - r, x + r)$ cu $r > 0$.

Interiorul unei mulțimi

Definiția 5.15

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime nevidă. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct interior** mulțimii A dacă $A \in \mathcal{V}(x)$. Totalitatea punctelor interioare mulțimii A se notează cu $\overset{\circ}{A}$ sau cu $\operatorname{int} A$ și se numește **interiorul** mulțimii A.

Exemplul 5.16

1. În cazul lui $\mathbb{R}$, fie intervalele: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$. Interiorul tuturor mulțimilor este egal cu (a, b).

2. Fie $k = 1$ și mulțimile $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Avem $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} = \emptyset$, deoarece pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$, niciuna din mulțimile A, B nu poate conține intervale de forma $(x - r, x + r)$ cu $r > 0$.

3. Fie $X = \mathbb{R}^2$ și $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\} \cup \{(3, 0)\}$. Vom avea

$$\overset{\circ}{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\right\}.$$

Aderența unei mulțimi

Definiția 5.17

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct aderent** mulțimii A dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $V \cap A \neq \emptyset$. Totalitatea punctelor aderente mulțimii A se notează cu $\overline{A}$ sau cu $\mathrm{cl}\, A$ și se numește **aderența**, sau **închiderea** mulțimii A.

Aderența unei mulțimi

Definiția 5.17

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct aderent** mulțimii A dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $V \cap A \neq \emptyset$. Totalitatea punctelor aderente mulțimii A se notează cu $\overline{A}$ sau cu $\operatorname{cl} A$ și se numește **aderența**, sau **închiderea** mulțimii A.

Exemplul 5.18

1. În cazul $k = 1$, aderența tuturor intervalelor (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ este mulțimea $[a, b]$.

Aderența unei mulțimi

Definiția 5.17

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct aderent** mulțimii A dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $V \cap A \neq \emptyset$. Totalitatea punctelor aderente mulțimii A se notează cu $\overline{A}$ sau cu $\mathrm{cl}\, A$ și se numește **aderența**, sau **închiderea** mulțimii A.

Exemplul 5.18

1. În cazul $k = 1$, aderența tuturor intervalelor (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ este mulțimea $[a, b]$.
2. Pentru $\mathbb{R}$ și mulțimile $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, avem $\overline{A} = \overline{B} = \mathbb{R}$, deoarece pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$ și orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $V \cap A \neq \emptyset$ și $V \cap B \neq \emptyset$.

Aderența unei mulțimi

Definiția 5.17

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct aderent** mulțimii A dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $V \cap A \neq \emptyset$. Totalitatea punctelor aderente mulțimii A se notează cu $\overline{A}$ sau cu $\mathrm{cl}\, A$ și se numește **aderența**, sau **închiderea** mulțimii A.

Exemplul 5.18

1. În cazul $k = 1$, aderența tuturor intervalelor (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ este mulțimea $[a, b]$.
2. Pentru $\mathbb{R}$ și mulțimile $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, avem $\overline{A} = \overline{B} = \mathbb{R}$, deoarece pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$ și orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $V \cap A \neq \emptyset$ și $V \cap B \neq \emptyset$.
3. Pentru $X = \mathbb{R}^2$ și $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\} \cup \{(3, 0)\}$, obținem $\overline{A} = A$.

Aderența unei mulțimi

Definiția 5.17

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct aderent** mulțimii A dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $V \cap A \neq \emptyset$. Totalitatea punctelor aderente mulțimii A se notează cu $\overline{A}$ sau cu $\mathrm{cl}\, A$ și se numește **aderența**, sau **închiderea** mulțimii A.

Exemplul 5.18

1. În cazul $k = 1$, aderența tuturor intervalelor (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ este mulțimea $[a, b]$.
2. Pentru $\mathbb{R}$ și mulțimile $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, avem $\overline{A} = \overline{B} = \mathbb{R}$, deoarece pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$ și orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $V \cap A \neq \emptyset$ și $V \cap B \neq \emptyset$.
3. Pentru $X = \mathbb{R}^2$ și $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\} \cup \{(3, 0)\}$, obținem $\overline{A} = A$.

Următoarea teoremă face legătura între noțiunile de aderență și interior.

Teorema 5.19

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Atunci:

$$c\overset{\circ}{A} = \overline{cA} \text{ și } c\overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{cA}}.$$

Frontiera unei mulțimi

Definiția 5.20

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Numim **frontieră** a mulțimii A, notată $\operatorname{Fr} A$, mulțimea $\overline{A} \cap \overline{cA}$.

Frontiera unei mulțimi

Definiția 5.20

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Numim **frontieră** a mulțimii A, notată $\mathrm{Fr}\, A$, mulțimea $\overline{A} \cap \overline{cA}$.

Exemplul 5.21

1. Pentru $\mathbb{R}$ și A una din mulțimile (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, avem $\mathrm{Fr}\, A = \{a, b\}$.

Frontiera unei mulțimi

Definiția 5.20

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Numim **frontieră** a mulțimii A, notată $\mathrm{Fr}\, A$, mulțimea $\overline{A} \cap \overline{cA}$.

Exemplul 5.21

1. Pentru $\mathbb{R}$ și A una din mulțimile (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, avem $\mathrm{Fr}\, A = \{a, b\}$.
2. Pentru $\mathbb{R}$ și $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, obținem $\mathrm{Fr}\, A = \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$. Analog, $\mathrm{Fr}\, B = \mathbb{R}$.

Frontiera unei mulțimi

Definiția 5.20

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Numim **frontieră** a mulțimii A, notată $\operatorname{Fr} A$, mulțimea $\overline{A} \cap \overline{cA}$.

Exemplul 5.21

1. Pentru $\mathbb{R}$ și A una din mulțimile (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, avem $\operatorname{Fr} A = \{a, b\}$.
2. Pentru $\mathbb{R}$ și $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, obținem $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$. Analog, $\operatorname{Fr} B = \mathbb{R}$.
3. $\operatorname{Fr} \mathbb{R} = \emptyset$.

Frontiera unei mulțimi

Definiția 5.20

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Numim **frontieră** a mulțimii A, notată $\mathrm{Fr}\, A$, mulțimea $\overline{A} \cap \overline{cA}$.

Exemplul 5.21

1. Pentru $\mathbb{R}$ și A una din mulțimile (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, avem $\mathrm{Fr}\, A = \{a, b\}$.
2. Pentru $\mathbb{R}$ și $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, obținem $\mathrm{Fr}\, A = \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$. Analog, $\mathrm{Fr}\, B = \mathbb{R}$.
3. $\mathrm{Fr}\, \mathbb{R} = \emptyset$.
4. Pentru $X = \mathbb{R}^2$ și $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\} \cup \{(3, 0)\}$, obținem

$$\mathrm{Fr}\, A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\} \cup \{(3, 0)\}.$$

Frontiera unei mulțimi

Definiția 5.20

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Numim **frontieră** a mulțimii A, notată $\mathrm{Fr}\, A$, mulțimea $\overline{A} \cap \overline{cA}$.

Exemplul 5.21

1. Pentru $\mathbb{R}$ și A una din mulțimile (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, avem $\mathrm{Fr}\, A = \{a, b\}$.
2. Pentru $\mathbb{R}$ și $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, obținem $\mathrm{Fr}\, A = \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$. Analog, $\mathrm{Fr}\, B = \mathbb{R}$.
3. $\mathrm{Fr}\, \mathbb{R} = \emptyset$.
4. Pentru $X = \mathbb{R}^2$ și $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\} \cup \{(3, 0)\}$, obținem

$$\mathrm{Fr}\, A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\} \cup \{(3, 0)\}.$$

Teorema 5.22

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Atunci:
(i) $\overset{\circ}{A} = A \setminus \mathrm{Fr}\, A$;
(ii) $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}\, A$.

Mulțimea derivată. Puncte de acumulare

Definiția 5.23

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct de acumulare** al mulțimii A dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Totalitatea punctelor de acumulare ale mulțimii A se notează cu A' și se numește **mulțimea derivată** asociată mulțimii A.

Mulțimea derivată. Puncte de acumulare

Definiția 5.23

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct de acumulare** al mulțimii A dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Totalitatea punctelor de acumulare ale mulțimii A se notează cu A' și se numește **mulțimea derivată** asociată mulțimii A. Un punct $x \in A$ cu proprietatea că $x \notin A'$ se numește **punct izolat** al mulțimii A.

Mulțimea derivată. Puncte de acumulare

Definiția 5.23

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct de acumulare** al mulțimii A dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Totalitatea punctelor de acumulare ale mulțimii A se notează cu A' și se numește **mulțimea derivată** asociată mulțimii A. Un punct $x \in A$ cu proprietatea că $x \notin A'$ se numește **punct izolat** al mulțimii A.

Exemplul 5.24

1. Pentru $\mathbb{R}$, mulțimea derivată asociată tuturor intervalelor (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ este mulțimea $[a, b]$.

Mulțimea derivată. Puncte de acumulare

Definiția 5.23

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct de acumulare** al mulțimii A dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Totalitatea punctelor de acumulare ale mulțimii A se notează cu A' și se numește **mulțimea derivată** asociată mulțimii A. Un punct $x \in A$ cu proprietatea că $x \notin A'$ se numește **punct izolat** al mulțimii A.

Exemplul 5.24

1. Pentru $\mathbb{R}$, mulțimea derivată asociată tuturor intervalelor (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ este mulțimea $[a, b]$.
2. Pentru $\mathbb{R}$ și mulțimile $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, avem $A' = B' = \mathbb{R}$, deoarece pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$ și orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ și $(V \setminus \{x\}) \cap B \neq \emptyset$.

Mulțimea derivată. Puncte de acumulare

Definiția 5.23

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct de acumulare** al mulțimii A dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Totalitatea punctelor de acumulare ale mulțimii A se notează cu A' și se numește **mulțimea derivată** asociată mulțimii A. Un punct $x \in A$ cu proprietatea că $x \notin A'$ se numește **punct izolat** al mulțimii A.

Exemplul 5.24

1. Pentru $\mathbb{R}$, mulțimea derivată asociată tuturor intervalelor (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ este mulțimea $[a, b]$.
2. Pentru $\mathbb{R}$ și mulțimile $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, avem $A' = B' = \mathbb{R}$, deoarece pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$ și orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ și $(V \setminus \{x\}) \cap B \neq \emptyset$.
3. Pentru $X = \mathbb{R}^2$ și $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\} \cup \{(3, 0)\}$, obținem

$$A' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}.$$

Mulțimea derivată. Puncte de acumulare

Definiția 5.23

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numește **punct de acumulare** al mulțimii A dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Totalitatea punctelor de acumulare ale mulțimii A se notează cu A' și se numește **mulțimea derivată** asociată mulțimii A. Un punct $x \in A$ cu proprietatea că $x \notin A'$ se numește **punct izolat** al mulțimii A.

Exemplul 5.24

1. Pentru $\mathbb{R}$, mulțimea derivată asociată tuturor intervalelor (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ este mulțimea $[a, b]$.
2. Pentru $\mathbb{R}$ și mulțimile $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, avem $A' = B' = \mathbb{R}$, deoarece pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$ și orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ și $(V \setminus \{x\}) \cap B \neq \emptyset$.
3. Pentru $X = \mathbb{R}^2$ și $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\} \cup \{(3, 0)\}$, obținem

$$A' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}.$$

Punctul $(3, 0)$ este punct izolat pentru mulțimea A.

Exercițiu

Observația 5.25

Mulțimile finite nu au puncte de acumulare.

Exercițiu

Observația 5.25

Mulțimile finite nu au puncte de acumulare.

Exercițiul 5.26

Precizați frontiera, interiorul, închiderea următoarelor mulțimi:
a) $A = \{(x, y, z) \mid |x| < 1,\ \ |y| < 1,\ \ z \in \mathbb{R}\}$
b) $B = \left\{(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Exercițiu

Observația 5.25

Mulțimile finite nu au puncte de acumulare.

Exercițiul 5.26

Precizați frontiera, interiorul, închiderea următoarelor mulțimi:
a) $A = \{(x, y, z) \mid |x| < 1, \ \ |y| < 1, \ z \in \mathbb{R}\}$
b) $B = \left\{(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Soluție. a) Obținem

$$\begin{aligned}
\operatorname{Fr} A &= \{(x, y, z) \mid |x| = 1, \ |y| < 1, \ z \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \cup \{(x, y, z) \ |x| < 1, \ |y| = 1, \ z \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \cup \{(x, y, z) \ |x| = 1, \ |y| = 1, \ z \in \mathbb{R}\}, \\
\overline{A} &= \{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, \ |y| \leq 1, \ z \in \mathbb{R}\}, \\
\overset{\circ}{A} &= A.
\end{aligned}$$

b) În acest caz, vom avea $\operatorname{Fr} B = \overline{B} = B$, $\overset{\circ}{B} = \emptyset$.