Analiză matematică - curs 2
Șiruri de numere reale. Șiruri de puncte în $\mathbb{R}^k$

Facultatea de Mecanică

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iași

Noțiuni generale

Definiția 1.1

Numim **șir numeric** sau **șir de numere reale** o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Noțiuni generale

Definiția 1.1

Numim **șir numeric** sau **șir de numere reale** o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

- notăm $f(n)$ cu x_n, $n \in \mathbb{N}$
- spunem că x_n este termenul general al șirului f.

În continuare un șir îl vom nota prin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau (x_n) sau simplu, precizând termenul general, x_n.

Noțiuni generale

Definiția 1.1

Numim **șir numeric** sau **șir de numere reale** o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

- notăm $f(n)$ cu x_n, $n \in \mathbb{N}$
- spunem că x_n este termenul general al șirului f.

În continuare un șir îl vom nota prin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau (x_n) sau simplu, precizând termenul general, x_n.

Exemplul 1.2

1. $x_n = 1 + \frac{1}{n}, \ \ n \geq 1$
2. $y_n = n + \sin\frac{1}{n+1}, \ \ n \in \mathbb{N}$

Noţiuni generale

Definiţia 1.1

Numim **şir numeric** sau **şir de numere reale** o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

- notăm $f(n)$ cu x_n, $n \in \mathbb{N}$
- spunem că x_n este termenul general al şirului f.

În continuare un şir îl vom nota prin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau (x_n) sau simplu, precizând termenul general, x_n.

Exemplul 1.2

1. $x_n = 1 + \frac{1}{n}, \ n \geq 1$
2. $y_n = n + \sin \frac{1}{n+1}, \ n \in \mathbb{N}$

Şirul fiind o funcţie, vor fi de interes proprietăţi specifice funcţiilor, cum ar fi monotonia şi mărginirea.

Mărginirea șirurilor

Definiția 1.3

Spunem că un șir numeric este **majorat** (**minorat**) dacă mulțimea termenilor săi este majorată (minorată). Dacă un șir este și majorat și minorat vom spune despre acesta că este **mărginit**.

Mărginirea șirurilor

Definiția 1.3

Spunem că un șir numeric este **majorat** (**minorat**) dacă mulțimea termenilor săi este majorată (minorată). Dacă un șir este și majorat și minorat vom spune despre acesta că este **mărginit**.

Mărginirea unui șir revine la:

$$\exists M > 0 \quad \text{astfel încât} \quad |x_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mărginirea şirurilor

Definiţia 1.3

Spunem că un şir numeric este **majorat** (**minorat**) dacă mulţimea termenilor săi este majorată (minorată). Dacă un şir este şi majorat şi minorat vom spune despre acesta că este **mărginit**.

Mărginirea unui şir revine la:

$$\exists M > 0 \quad \text{astfel încât} \quad |x_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definiţia 1.4

Spunem că un şir (x_n) este **nemărginit** dacă nu este mărginit.

Mărginirea şirurilor

Definiţia 1.3

Spunem că un şir numeric este **majorat** (**minorat**) dacă mulţimea termenilor săi este majorată (minorată). Dacă un şir este şi majorat şi minorat vom spune despre acesta că este **mărginit**.

Mărginirea unui şir revine la:

$$\exists M > 0 \quad \text{astfel încât} \quad |x_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definiţia 1.4

Spunem că un şir (x_n) este **nemărginit** dacă nu este mărginit.

Un şir (x_n) este nemărginit dacă

$$\forall M > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } |x_n| > M.$$

Mărginirea şirurilor

Exemplul 1.5

1. Şirul $x_n = \sin n$ este

Mărginirea şirurilor

Exemplul 1.5

1. Şirul $x_n = \sin n$ este mărginit, deoarece $|x_n| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Şirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ este

Mărginirea șirurilor

Exemplul 1.5

1. Șirul $x_n = \sin n$ este mărginit, deoarece $|x_n| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Șirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ este mărginit, deoarece $0 \leq x_n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. Șirul $x_n = n^2$ este minorat de 0 dar nu este majorat (deci este nemărginit).

Mărginirea șirurilor

Exemplul 1.5

1. Șirul $x_n = \sin n$ este mărginit, deoarece $|x_n| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Șirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ este mărginit, deoarece $0 \leq x_n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. Șirul $x_n = n^2$ este minorat de 0 dar nu este majorat (deci este nemărginit).
4. Șirul $x_n = -n$ este majorat de 0 dar nu este minorat (deci este nemărginit).

Mărginirea şirurilor

Exemplul 1.5

1. Şirul $x_n = \sin n$ este mărginit, deoarece $|x_n| \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Şirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ este mărginit, deoarece $0 \leq x_n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. Şirul $x_n = n^2$ este minorat de 0 dar nu este majorat (deci este nemărginit).
4. Şirul $x_n = -n$ este majorat de 0 dar nu este minorat (deci este nemărginit).
5. Şirul $x_n = (-1)^n \cdot n$ nu este nici majorat nici minorat.

Monotonie

Definiţia 1.6

1. Spunem că un şir (x_n) este **crescător** (respectiv **descrescător**) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (respectiv $x_n \geq x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Monotonie

Definiţia 1.6

1. Spunem că un şir (x_n) este **crescător** (respectiv **descrescător**) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (respectiv $x_n \geq x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
2. Spunem că un şir (x_n) este **strict crescător** (respectiv **strict descrescător**) dacă $x_n < x_{n+1}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Un şir crescător sau descrescător va fi numit **şir monoton**, în timp ce un şir strict crescător sau strict descrescător va fi numit **şir strict monoton**.

Monotonie

Definiția 1.6

1. Spunem că un șir (x_n) este **crescător** (respectiv **descrescător**) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (respectiv $x_n \geq x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
2. Spunem că un șir (x_n) este **strict crescător** (respectiv **strict descrescător**) dacă $x_n < x_{n+1}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Un șir crescător sau descrescător va fi numit **șir monoton**, în timp ce un șir strict crescător sau strict descrescător va fi numit **șir strict monoton**.

Exemplul 1.7

1. Șirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ este un șir

Monotonie

Definiţia 1.6

1. Spunem că un şir (x_n) este **crescător** (respectiv **descrescător**) dacă $x_n \le x_{n+1}$ (respectiv $x_n \ge x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
2. Spunem că un şir (x_n) este **strict crescător** (respectiv **strict descrescător**) dacă $x_n < x_{n+1}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Un şir crescător sau descrescător va fi numit **şir monoton**, în timp ce un şir strict crescător sau strict descrescător va fi numit **şir strict monoton**.

Exemplul 1.7

1. Şirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ este un şir strict descrescător.
2. Şirul $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ este

Monotonie

Definiţia 1.6

1. Spunem că un şir (x_n) este **crescător** (respectiv **descrescător**) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (respectiv $x_n \geq x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
2. Spunem că un şir (x_n) este **strict crescător** (respectiv **strict descrescător**) dacă $x_n < x_{n+1}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Un şir crescător sau descrescător va fi numit **şir monoton**, în timp ce un şir strict crescător sau strict descrescător va fi numit **şir strict monoton**.

Exemplul 1.7

1. Şirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ este un şir strict descrescător.
2. Şirul $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ este strict crescător.
3. Şirurile $x_n = \sin n, \quad y_n = (-1)^n, \quad z_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ nu sunt şiruri monotone.

Subşiruri

Definiţia 1.8

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **subşir** al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă există o funcţie $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strict crescătoare, astfel încât pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ să avem

$$y_n = x_{\varphi(n)}.$$

Notând $\varphi(k) = n_k$, atunci $y_k = x_{n_k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Subșiruri

Definiția 1.8

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **subșir** al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă există o funcție $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strict crescătoare, astfel încât pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ să avem

$$y_n = x_{\varphi(n)}.$$

Notând $\varphi(k) = n_k$, atunci $y_k = x_{n_k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Exemplul 1.9

1. Șirul $x_{2n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ este subșir al șirului $x_n = (-1)^n$.

Subșiruri

Definiția 1.8

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **subșir** al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă există o funcție $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strict crescătoare, astfel încât pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ să avem

$$y_n = x_{\varphi(n)}.$$

Notând $\varphi(k) = n_k$, atunci $y_k = x_{n_k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Exemplul 1.9

1. Șirul $x_{2n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ este subșir al șirului $x_n = (-1)^n$.
2. Pentru șirul $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$ se evidențiază următoarele subșiruri:
   - $x_{4k} = \sin 2k\pi = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Subşiruri

Definiţia 1.8

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte **subşir** al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă există o funcţie $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strict crescătoare, astfel încât pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ să avem

$$y_n = x_{\varphi(n)}.$$

Notând $\varphi(k) = n_k$, atunci $y_k = x_{n_k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Exemplul 1.9

1. Şirul $x_{2n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ este subşir al şirului $x_n = (-1)^n$.
2. Pentru şirul $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$ se evidenţiază următoarele subşiruri:
   - $x_{4k} = \sin 2k\pi = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$
   - $x_{4k+1} = \sin\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Subșiruri

Definiția 1.8

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **subșir** al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă există o funcție $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strict crescătoare, astfel încât pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ să avem

$$y_n = x_{\varphi(n)}.$$

Notând $\varphi(k) = n_k$, atunci $y_k = x_{n_k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Exemplul 1.9

1. Șirul $x_{2n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ este subșir al șirului $x_n = (-1)^n$.
2. Pentru șirul $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$ se evidențiază următoarele subșiruri:
   - $x_{4k} = \sin 2k\pi = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$
   - $x_{4k+1} = \sin\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$
   - $x_{4k+2} = \sin(2k\pi + \pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Subșiruri

Definiția 1.8

Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un șir de numere reale. Șirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește **subșir** al șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă există o funcție $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strict crescătoare, astfel încât pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ să avem

$$y_n = x_{\varphi(n)}.$$

Notând $\varphi(k) = n_k$, atunci $y_k = x_{n_k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Exemplul 1.9

1. Șirul $x_{2n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ este subșir al șirului $x_n = (-1)^n$.
2. Pentru șirul $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$ se evidențiază următoarele subșiruri:
   - $x_{4k} = \sin 2k\pi = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$
   - $x_{4k+1} = \sin\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$
   - $x_{4k+2} = \sin(2k\pi + \pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$
   - $x_{4k+3} = \sin\left(2k\pi + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

Limita unui şir de numere reale

Definiţia 1.10

Spunem că un şir de numere reale (x_n) are **limita** $x \in \mathbb{R}$ dacă orice vecinătate a lui x conţine toţi termenii şirului, cu excepţia, eventual, a unui număr finit dintre aceştia sau, echivalent:

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists n_V \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_V : x_n \in V.$$

Limita unui şir de numere reale

Definiţia 1.10

Spunem că un şir de numere reale (x_n) are **limita** $x \in \mathbb{R}$ dacă orice vecinătate a lui x conţine toţi termenii şirului, cu excepţia, eventual, a unui număr finit dintre aceştia sau, echivalent:

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists n_V \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_V : x_n \in V.$$

În acest caz vom scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$. Un şir care are limită în $\mathbb{R}$ se numeşte **şir convergent**. Un şir care nu are limită în $\mathbb{R}$ se numeşte **şir divergent**.

Limita unui şir de numere reale

Definiţia 1.10

Spunem că un şir de numere reale (x_n) are **limita** $x \in \mathbb{R}$ dacă orice vecinătate a lui x conţine toţi termenii şirului, cu excepţia, eventual, a unui număr finit dintre aceştia sau, echivalent:

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists n_V \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_V : x_n \in V.$$

În acest caz vom scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$. Un şir care are limită în $\mathbb{R}$ se numeşte **şir convergent**. Un şir care nu are limită în $\mathbb{R}$ se numeşte **şir divergent**.

Teorema 1.11

Şirul de numere reale (x_n) este convergent la $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon.$$

Limita unui şir de numere reale

Teorema 1.12

Un şir $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă şirul $(|x_n - x|)$ are limita 0.

Exemplul 1.13

1. Şirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ are limita 0.

Limita unui şir de numere reale

Teorema 1.12

Un şir $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă şirul $(|x_n - x|)$ are limita 0.

Exemplul 1.13

1. Şirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ are limita 0.
2. Şirul $x_n = 2^n$ nu este convergent.

Limita unui şir de numere reale

Teorema 1.12

Un şir $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă şirul $(|x_n - x|)$ are limita 0.

Exemplul 1.13

1. Şirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ are limita 0.
2. Şirul $x_n = 2^n$ nu este convergent. O vecinătate de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ a unui număr real x, nu poate conţine decât un număr finit de termeni ai şirului.

Limita unui şir de numere reale

Teorema 1.12

Un şir $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă şirul $(|x_n - x|)$ are limita 0.

Exemplul 1.13

1. Şirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ are limita 0.
2. Şirul $x_n = 2^n$ nu este convergent. O vecinătate de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ a unui număr real x, nu poate conţine decât un număr finit de termeni ai şirului.
3. Şirul $x_n = (-1)^n$ nu este convergent. Pentru acest şir avem $x_{2n} = 1$ şi $x_{2n+1} = -1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Astfel, pentru orice număr real x şi pentru orice $0 < \varepsilon < 1$, din vecinătăţile lui x de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ lipsesc o infinitate dintre termenii şirului.

Proprietăţi ale şirurilor convergente

Teorema 1.14

Dacă un şir de numere reale are limită reală, atunci aceasta este unică.

Proprietăţi ale şirurilor convergente

Teorema 1.14

Dacă un şir de numere reale are limită reală, atunci aceasta este unică.

Teorema 1.15

Dacă unui şir îi adăugăm sau eliminăm un număr finit de termeni, atunci natura şirului nu se schimbă. În caz de convergenţă nu se schimbă nici limita.

Proprietăţi ale şirurilor convergente

Teorema 1.14

Dacă un şir de numere reale are limită reală, atunci aceasta este unică.

Teorema 1.15

Dacă unui şir îi adăugăm sau eliminăm un număr finit de termeni, atunci natura şirului nu se schimbă. În caz de convergenţă nu se schimbă nici limita.

Teorema 1.16

Dacă schimbăm ordinea termenilor unui şir, natura şirului nu se schimbă, iar în caz de convergenţă nu se schimbă nici limita şirului.

Proprietăți ale șirurilor convergente

Teorema 1.17

Orice subșir al unui șir convergent este convergent și are aceeași limită.

Proprietăţi ale şirurilor convergente

Teorema 1.17

Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi are aceeaşi limită.

Observaţia 1.18

Conform acestei teoreme, dacă un şir are două subşiruri convergente la limite diferite, atunci şirul este divergent.

Proprietăți ale șirurilor convergente

Teorema 1.17

Orice subșir al unui șir convergent este convergent și are aceeași limită.

Observația 1.18

Conform acestei teoreme, dacă un șir are două subșiruri convergente la limite diferite, atunci șirul este divergent. De exemplu, șirul $x_n = (-1)^n$ analizat anterior conține subșirurile $x_{2n} = 1$, care are limita 1, și $x_{2n+1} = -1$, care are limita -1. Deci, $x_n = (-1)^n$ este un șir divergent.

Proprietăţi ale şirurilor convergente

Teorema 1.19

Orice şir convergent este mărginit.

Proprietăți ale șirurilor convergente

Teorema 1.19

Orice șir convergent este mărginit.

Corolarul 1.20

Dacă un șir nu este mărginit, atunci el este divergent.

Proprietăți ale șirurilor convergente

Teorema 1.19

Orice șir convergent este mărginit.

Corolarul 1.20

Dacă un șir nu este mărginit, atunci el este divergent.

Observația 1.21

Mărginirea este o condiție necesară, nu și suficientă pentru convergență. De exemplu șirul $x_n = (-1)^n$ deși este mărginit, nu este convergent.

Proprietăți ale șirurilor convergente

Teorema 1.19

Orice șir convergent este mărginit.

Corolarul 1.20

Dacă un șir nu este mărginit, atunci el este divergent.

Observația 1.21

Mărginirea este o condiție necesară, nu și suficientă pentru convergență. De exemplu șirul $x_n = (-1)^n$ deși este mărginit, nu este convergent.

Teorema 1.22 (Criteriul majorării)

Dacă pentru șirul (x_n) *există* $x \in \mathbb{R}$ *și un șir de numere pozitive* (α_n) *convergent la* 0 *astfel încât*

$$|x_n - x| \leq \alpha_n, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

atunci (x_n) *este convergent și* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Operaţii cu şiruri convergente

Dacă (a_n) şi (b_n) sunt două şiruri de numere reale, definim:

$$(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n);$$
$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n);$$
$$\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right), \text{ dacă } b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Operații cu șiruri convergente

Dacă (a_n) și (b_n) sunt două șiruri de numere reale, definim:

$$(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n);$$
$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n);$$
$$\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right), \text{ dacă } b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.23

Fie (a_n) și (b_n) două șiruri convergente, cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ și $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Atunci:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b;$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda a;$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b;$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$*, dacă* $b \neq 0$.

Trecerea la limită în inegalităţi

Teorema 1.24

Fie (a_n) *şi* (b_n) *două şiruri convergente,* $a_n \to a$, $b_n \to b$. *Dacă* $a_n \leq b_n$, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$, *atunci* $a \leq b$.

Trecerea la limită în inegalităţi

Teorema 1.24

Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri convergente, $a_n \to a$, $b_n \to b$. Dacă $a_n \leq b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $a \leq b$.

Observaţia 1.25

Chiar dacă inegalitatea dintre termenii celor două şiruri din teorema anterioară este strictă, putem avea $a = b$. De exemplu, pentru $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ şi $b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ avem $a_n < b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ dar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Trecerea la limită în inegalităţi

Teorema 1.24

Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri convergente, $a_n \to a$, $b_n \to b$. Dacă $a_n \leq b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $a \leq b$.

Observaţia 1.25

Chiar dacă inegalitatea dintre termenii celor două şiruri din teorema anterioară este strictă, putem avea $a = b$. De exemplu, pentru $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ şi $b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ avem $a_n < b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ dar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

Teorema 1.26 (Teorema cleştelui)

Considerăm trei şiruri de numere reale (x_n), (y_n), (z_n) astfel încât

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell \in \mathbb{R}$, atunci şirul (y_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell$.

Convergenţa şirurilor monotone

Teorema 1.27

1. *Un şir de numere reale (x_n) crescător şi majorat este convergent, iar* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Convergența șirurilor monotone

Teorema 1.27

1. *Un șir de numere reale* (x_n) *crescător și majorat este convergent, iar* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
2. *Un șir de numere reale* (x_n) *descrescător și minorat este convergent, iar* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Şiruri Cauchy

Definiţia 1.28

Spunem despre un şir de numere reale că este **şir Cauchy** sau **şir fundamental** dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_\varepsilon : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Şiruri Cauchy

Definiţia 1.28

Spunem despre un şir de numere reale că este **şir Cauchy** sau **şir fundamental** dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_\varepsilon : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Luând în definiţia anterioară $n \geq n_\varepsilon$ şi $m = n + p$, unde $p \in \mathbb{N}$, obţinem formularea echivalentă:

Şiruri Cauchy

Definiţia 1.28

Spunem despre un şir de numere reale că este **şir Cauchy** sau **şir fundamental** dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_\varepsilon : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Luând în definiţia anterioară $n \geq n_\varepsilon$ şi $m = n + p$, unde $p \in \mathbb{N}$, obţinem formularea echivalentă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} : |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Teorema 1.29 (Cauchy)

Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental.

Şiruri Cauchy

Exemplul 1.30

Considerăm şirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Șiruri Cauchy

Exemplul 1.30

Considerăm șirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}.$$

Acest șir nu este șir fundamental, deci nu este convergent.

Şiruri Cauchy

Exemplul 1.30

Considerăm şirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}.$$

Acest şir nu este şir fundamental, deci nu este convergent.Într-adevăr, observăm că

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} + ... + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p} \quad \forall n, p \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci, pentru $p = n$ obţinem $|x_{2n} - x_n| \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Deci şirul dat nu îndeplineşte condiţia de şir Cauchy.

Șiruri cu limita $+\infty$ și $-\infty$

Definiția 1.31

Spunem că un șir (x_n) din $\overline{\mathbb{R}}$ are **limita** $+\infty$ (sau $-\infty$) sau că este **divergent la** $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă orice vecinătate a punctului $+\infty$ conține toți termenii șirului, cu excepția, eventual, a unui număr finit dintre aceștia.

Șiruri cu limita $+\infty$ și $-\infty$

Definiția 1.31

Spunem că un șir (x_n) din $\overline{\mathbb{R}}$ are **limita** $+\infty$ (sau $-\infty$) sau că este **divergent la** $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă orice vecinătate a punctului $+\infty$ conține toți termenii șirului, cu excepția, eventual, a unui număr finit dintre aceștia.

Teorema 1.32

1. Șirul (x_n) din $\overline{\mathbb{R}}$ are limita $+\infty$ dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : x_n \geq \varepsilon.$$

2. Șirul (x_n) din $\overline{\mathbb{R}}$ are limita $-\infty$ dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : x_n \leq -\varepsilon.$$

Reguli de calcul

Teorema 1.33

1. *Dacă* $x_n \to \infty$ *şi* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, *atunci* $x_n + y_n \to +\infty$.
2. *Dacă* $x_n \to -\infty$ *şi* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, *atunci* $x_n + y_n \to -\infty$.
3. *Dacă* $x_n \to \infty$ *şi* $y_n \to y$, *unde* $y \in (0, \infty]$, *atunci* $x_n \cdot y_n \to +\infty$.
4. *Dacă* $x_n \to \infty$ *şi* $y_n \to y$, *unde* $y \in [-\infty, 0)$, *atunci* $x_n \cdot y_n \to -\infty$.

Reguli de calcul

Teorema 1.33

1. *Dacă* $x_n \to \infty$ *și* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, *atunci* $x_n + y_n \to +\infty$.
2. *Dacă* $x_n \to -\infty$ *și* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, *atunci* $x_n + y_n \to -\infty$.
3. *Dacă* $x_n \to \infty$ *și* $y_n \to y$, *unde* $y \in (0, \infty]$, *atunci* $x_n \cdot y_n \to +\infty$.
4. *Dacă* $x_n \to \infty$ *și* $y_n \to y$, *unde* $y \in [-\infty, 0)$, *atunci* $x_n \cdot y_n \to -\infty$.

Observația 1.34

Dacă $x_n \to \infty$ și $y_n \to -\infty$ nu se poate spune nimic despre natura șirului $(x_n + y_n)$. De exemplu

- pentru $x_n = n$ și $y_n = -n$ avem $x_n + y_n \to 0$;

Reguli de calcul

Teorema 1.33

1. *Dacă* $x_n \to \infty$ *și* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, *atunci* $x_n + y_n \to +\infty$.
2. *Dacă* $x_n \to -\infty$ *și* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, *atunci* $x_n + y_n \to -\infty$.
3. *Dacă* $x_n \to \infty$ *și* $y_n \to y$, *unde* $y \in (0, \infty]$, *atunci* $x_n \cdot y_n \to +\infty$.
4. *Dacă* $x_n \to \infty$ *și* $y_n \to y$, *unde* $y \in [-\infty, 0)$, *atunci* $x_n \cdot y_n \to -\infty$.

Observația 1.34

Dacă $x_n \to \infty$ și $y_n \to -\infty$ nu se poate spune nimic despre natura șirului $(x_n + y_n)$. De exemplu

- pentru $x_n = n$ și $y_n = -n$ avem $x_n + y_n \to 0$;
- pentru $x_n = n$ și $y_n = -2n$ avem $x_n + y_n \to -\infty$;

Reguli de calcul

Teorema 1.33

1. *Dacă* $x_n \to \infty$ *şi* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, *atunci* $x_n + y_n \to +\infty$.
2. *Dacă* $x_n \to -\infty$ *şi* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, *atunci* $x_n + y_n \to -\infty$.
3. *Dacă* $x_n \to \infty$ *şi* $y_n \to y$, *unde* $y \in (0, \infty]$, *atunci* $x_n \cdot y_n \to +\infty$.
4. *Dacă* $x_n \to \infty$ *şi* $y_n \to y$, *unde* $y \in [-\infty, 0)$, *atunci* $x_n \cdot y_n \to -\infty$.

Observaţia 1.34

Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to -\infty$ nu se poate spune nimic despre natura şirului $(x_n + y_n)$. De exemplu

- pentru $x_n = n$ şi $y_n = -n$ avem $x_n + y_n \to 0$;
- pentru $x_n = n$ şi $y_n = -2n$ avem $x_n + y_n \to -\infty$;
- pentru $x_n = 2n$ şi $y_n = -n$ avem $x_n + y_n \to +\infty$;

Reguli de calcul

Teorema 1.33

1. *Dacă* $x_n \to \infty$ *și* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, *atunci* $x_n + y_n \to +\infty$.
2. *Dacă* $x_n \to -\infty$ *și* $y_n \to y$, *unde* $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, *atunci* $x_n + y_n \to -\infty$.
3. *Dacă* $x_n \to \infty$ *și* $y_n \to y$, *unde* $y \in (0, \infty]$, *atunci* $x_n \cdot y_n \to +\infty$.
4. *Dacă* $x_n \to \infty$ *și* $y_n \to y$, *unde* $y \in [-\infty, 0)$, *atunci* $x_n \cdot y_n \to -\infty$.

Observația 1.34

Dacă $x_n \to \infty$ și $y_n \to -\infty$ nu se poate spune nimic despre natura șirului $(x_n + y_n)$. De exemplu

- pentru $x_n = n$ și $y_n = -n$ avem $x_n + y_n \to 0$;
- pentru $x_n = n$ și $y_n = -2n$ avem $x_n + y_n \to -\infty$;
- pentru $x_n = 2n$ și $y_n = -n$ avem $x_n + y_n \to +\infty$;
- pentru $x_n = (-1)^n + n$ și $y_n = -n$ avem $x_n + y_n = (-1)^n$, care nu are limită.

Despre astfel de situații vom spune că sunt **cazuri de nedeterminare**, sau **cazuri exceptate**.

Noțiuni generale

Considerăm în continuare spațiul $\mathbb{R}^k$ înzestrat cu norma euclidiană

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Noțiuni generale

Considerăm în continuare spațiul $\mathbb{R}^k$ înzestrat cu norma euclidiană

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Definiția 2.1

Se numește șir de puncte în $\mathbb{R}^k$ o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$. Notăm șirul cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau (a_n), unde

$$a_n = f(n) = (a_{1,n}, a_{2,n}, ..., a_{k,n}).$$

Noțiuni generale

Considerăm în continuare spațiul $\mathbb{R}^k$ înzestrat cu norma euclidiană

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Definiția 2.1

Se numește șir de puncte în $\mathbb{R}^k$ o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$. Notăm șirul cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau (a_n), unde

$$a_n = f(n) = (a_{1,n}, a_{2,n}, \dots, a_{k,n}).$$

Exemplul 2.2

1. $x_n = (\frac{1}{n}, n^2)$ este un șir de puncte din $\mathbb{R}^2$

Noţiuni generale

Considerăm în continuare spaţiul $\mathbb{R}^k$ înzestrat cu norma euclidiană

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Definiţia 2.1

Se numeşte şir de puncte în $\mathbb{R}^k$ o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$. Notăm şirul cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau (a_n), unde

$$a_n = f(n) = (a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{k,n}).$$

Exemplul 2.2

1. $x_n = (\frac{1}{n}, n^2)$ este un şir de puncte din $\mathbb{R}^2$
2. $x_n = (\sin\frac{1}{n}, arctg(n^2 - 1), \frac{3}{n+1})$ este un şir de puncte din $\mathbb{R}^3$

Noțiuni generale

Considerăm în continuare spațiul $\mathbb{R}^k$ înzestrat cu norma euclidiană

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Definiția 2.1

Se numește șir de puncte în $\mathbb{R}^k$ o funcție $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$. Notăm șirul cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau (a_n), unde

$$a_n = f(n) = (a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{k,n}).$$

Exemplul 2.2

1. $x_n = (\frac{1}{n}, n^2)$ este un șir de puncte din $\mathbb{R}^2$
2. $x_n = (\sin\frac{1}{n}, arctg(n^2-1), \frac{3}{n+1})$ este un șir de puncte din $\mathbb{R}^3$
3. $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k}{n})$ este un șir de puncte în $\mathbb{R}^k$.

Noţiuni generale

Considerăm în continuare spaţiul $\mathbb{R}^k$ înzestrat cu norma euclidiană

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Definiţia 2.1

Se numeşte şir de puncte în $\mathbb{R}^k$ o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$. Notăm şirul cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau (a_n), unde

$$a_n = f(n) = (a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{k,n}).$$

Exemplul 2.2

1. $x_n = (\frac{1}{n}, n^2)$ este un şir de puncte din $\mathbb{R}^2$
2. $x_n = (\sin\frac{1}{n}, arctg(n^2 - 1), \frac{3}{n+1})$ este un şir de puncte din $\mathbb{R}^3$
3. $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{k}{n})$ este un şir de puncte în $\mathbb{R}^k$.
   Se remarcă faptul că un şir de puncte din $\mathbb{R}^k$ se compune din k şiruri, câte unul pentru fiecare componentă.

Mărginirea şirurilor în $\mathbb{R}^k$

Definiţia 2.3

Spunem că un şir de puncte din $\mathbb{R}^k$ este mărginit dacă există $M > 0$ a.î. $\|x_n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Mărginirea șirurilor în $\mathbb{R}^k$

Definiția 2.3

Spunem că un șir de puncte din $\mathbb{R}^k$ este mărginit dacă există $M > 0$ a.î. $\|x_n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplul 2.4

1. Șirul $x_n = (\frac{1}{n}, n^2)$ nu este mărginit deoarece $\|x_n\| \geq n^2 \ \forall n \geq 1$.

Mărginirea șirurilor în $\mathbb{R}^k$

Definiția 2.3

Spunem că un șir de puncte din $\mathbb{R}^k$ este mărginit dacă există $M > 0$ a.î. $\|x_n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplul 2.4

1. Șirul $x_n = (\frac{1}{n}, n^2)$ nu este mărginit deoarece $\|x_n\| \geq n^2 \ \forall n \geq 1$.
2. Șirul $x_k = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{k}{n})$ este mărginit deoarece $\|x_n\| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{k(k+1)(2k+1)}}{\sqrt{6}n}$ care este o cantitate mărginită, k fiind fixat.

Mărginirea şirurilor în $\mathbb{R}^k$

Definiţia 2.3

Spunem că un şir de puncte din $\mathbb{R}^k$ este mărginit dacă există $M > 0$ a.î. $\|x_n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplul 2.4

1. Şirul $x_n = (\frac{1}{n}, n^2)$ nu este mărginit deoarece $\|x_n\| \geq n^2 \ \forall n \geq 1$.
2. Şirul $x_k = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{k}{n})$ este mărginit deoarece $\|x_n\| = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{k(k+1)(2k+1)}}{\sqrt{6}n}$ care este o cantitate mărginită, k fiind fixat.

Teorema 2.5

Un şir de puncte din $\mathbb{R}^k$ este mărginit dacă şi numai dacă toate şirurile componente sunt şiruri mărginite (de numere reale).

Limite de șiruri în $\mathbb{R}^k$

Definiția 2.6

Fie (x_n) un șir de puncte din $\mathbb{R}^k$. Spunem că șirul (x_n) are limita $\ell \in \mathbb{R}^k$ dacă în orice vecinătate a lui ℓ se găsesc toți termenii șirului cu excepția, eventual, a unui număr finit dintre aceștia:

$$\forall\ V \in \mathcal{V}(\ell)\ \exists\ n_V \in \mathbb{N},\ a.i.\ x_n \in V\ \forall\ n \geq n_V$$

Un șir care are limită se numește șir convergent. Vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$.

Limite de șiruri în $\mathbb{R}^k$

Definiția 2.6

Fie (x_n) un șir de puncte din $\mathbb{R}^k$. Spunem că șirul (x_n) are limita $\ell \in \mathbb{R}^k$ dacă în orice vecinătate a lui ℓ se găsesc toți termenii șirului cu excepția, eventual, a unui număr finit dintre aceștia:

$$\forall\ V \in \mathcal{V}(\ell)\ \exists\ n_V \in \mathbb{N},\ a.i.\ x_n \in V\ \forall\ n \geq n_V$$

Un șir care are limită se numește șir convergent. Vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$.

Teorema 2.7 (Proprietăți ale șirurilor convergente)

1. *Un șir convergent are limită unică.*

Limite de şiruri în $\mathbb{R}^k$

Definiţia 2.6

Fie (x_n) un şir de puncte din $\mathbb{R}^k$. Spunem că şirul (x_n) are limita $\ell \in \mathbb{R}^k$ dacă în orice vecinătate a lui ℓ se găsesc toţi termenii şirului cu excepţia, eventual, a unui număr finit dintre aceştia:

$$\forall\ V \in \mathcal{V}(\ell)\ \exists\ n_V \in \mathbb{N},\ a.i.\ x_n \in V\ \forall\ n \geq n_V$$

Un şir care are limită se numeşte şir convergent. Vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$.

Teorema 2.7 (Proprietăţi ale şirurilor convergente)

1. *Un şir convergent are limită unică.*
2. *Orice şir convergent este mărginit.*

Limite de șiruri în $\mathbb{R}^k$

Definiția 2.6

Fie (x_n) un șir de puncte din $\mathbb{R}^k$. Spunem că șirul (x_n) are limita $\ell \in \mathbb{R}^k$ dacă în orice vecinătate a lui ℓ se găsesc toți termenii șirului cu excepția, eventual, a unui număr finit dintre aceștia:

$$\forall\ V \in \mathcal{V}(\ell)\ \exists\ n_V \in \mathbb{N},\ a.i.\ x_n \in V\ \forall\ n \geq n_V$$

Un șir care are limită se numește șir convergent. Vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$.

Teorema 2.7 (Proprietăți ale șirurilor convergente)

1. *Un șir convergent are limită unică.*
2. *Orice șir convergent este mărginit.*
3. *Prin schimbarea ordinii termenilor unui șir convergent se obține tot un șir convergent, având aceeași limită.*

Limite de șiruri în $\mathbb{R}^k$

Definiția 2.6

Fie (x_n) un șir de puncte din $\mathbb{R}^k$. Spunem că șirul (x_n) are limita $\ell \in \mathbb{R}^k$ dacă în orice vecinătate a lui ℓ se găsesc toți termenii șirului cu excepția, eventual, a unui număr finit dintre aceștia:

$$\forall\ V \in \mathcal{V}(\ell)\ \exists\ n_V \in \mathbb{N},\ a.i.\ x_n \in V\ \forall\ n \geq n_V$$

Un șir care are limită se numește șir convergent. Vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$.

Teorema 2.7 (Proprietăți ale șirurilor convergente)

1. *Un șir convergent are limită unică.*
2. *Orice șir convergent este mărginit.*
3. *Prin schimbarea ordinii termenilor unui șir convergent se obține tot un șir convergent, având aceeași limită.*
4. *Dacă unui șir i se adaugă sau i se suprimă un număr finit de termeni, natura șirului nu se modifică iar în caz de convergență, nici limita.*

Limite de șiruri în $\mathbb{R}^k$

Teorema 2.8

Fie $(x_n)_{n\geq 1} = ((x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}))$ un șir de puncte din $\mathbb{R}^k$. Acest șir este convergent dacă și numai dacă șirurile componentelor: $(x_{1,n})_{n\geq 1}, \dots, (x_{k,n})_{n\geq 1}$ sunt convergente. Mai mult, în caz de convergență limita lui (x_n) are drept componente limitele șirurilor componente, altfel spus:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_{1,n}, \dots, \lim_{n\to\infty} x_{k,n}\right).$$

Exemplul 2.9

1. Limita șirului $x_n = (\sin\frac{1}{n}, arctg(n+1))$ este punctul $(0, \frac{\pi}{2})$ deoarece $\lim \sin\frac{1}{n} = 0$ iar $\lim arctg(n+1) = \frac{\pi}{2}$.

Limite de şiruri în $\mathbb{R}^k$

Teorema 2.8

Fie $(x_n)_{n\geq 1} = ((x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}))$ un şir de puncte din $\mathbb{R}^k$. Acest şir este convergent dacă şi numai dacă şirurile componentelor: $(x_{1,n})_{n\geq 1}, ..., (x_{k,n})_{n\geq 1}$ sunt convergente. Mai mult, în caz de convergenţă limita lui (x_n) are drept componente limitele şirurilor componente, altfel spus:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (\lim_{n\to\infty} x_{1,n}, ..., \lim_{n\to\infty} x_{k,n}).$$

Exemplul 2.9

1. Limita şirului $x_n = (\sin\frac{1}{n}, arctg(n+1))$ este punctul $(0, \frac{\pi}{2})$ deoarece $\lim \sin\frac{1}{n} = 0$ iar $\lim arctg(n+1) = \frac{\pi}{2}$.
2. Şirul $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{k}{n})$ este convergent iar $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0 = (0, 0, ..., 0)$.

Limite de șiruri în $\mathbb{R}^k$

Teorema 2.8

Fie $(x_n)_{n\geq 1} = ((x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}))$ un șir de puncte din $\mathbb{R}^k$. Acest șir este convergent dacă și numai dacă șirurile componentelor: $(x_{1,n})_{n\geq 1}, ..., (x_{k,n})_{n\geq 1}$ sunt convergente. Mai mult, în caz de convergență limita lui (x_n) are drept componente limitele șirurilor componente, altfel spus:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = (\lim_{n\to\infty} x_{1,n}, ..., \lim_{n\to\infty} x_{k,n}).$$

Exemplul 2.9

1. Limita șirului $x_n = (\sin\frac{1}{n}, arctg(n+1))$ este punctul $(0, \frac{\pi}{2})$ deoarece $\lim \sin\frac{1}{n} = 0$ iar $\lim arctg(n+1) = \frac{\pi}{2}$.
2. Șirul $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{k}{n})$ este convergent iar $\lim_{k\to\infty} x_k = 0 = (0, 0, ..., 0)$.
3. Șirul $x_n = (\frac{1}{n}, (-1)^n$ nu este convergent deoarece șirul de pe a doua componentă, $x_{2,n} = (-1)^n$ este un șir divergent.