Analiză matematică - curs 3
Serii numerice

Facultatea de Mecanică

Universitatea Tehnică “Gh. Asachi”, Iași

Progresii aritmetice. Progresii geometrice

- (x_n) este o **progresie aritmetică de rație** r dacă $x_{n+1} = x_n + r$, $\forall n$;
- (x_n) este o **progresie geometrică de rație** q dacă $x_{n+1} = q \cdot x_n$, $\forall n$.

Acestor șiruri li s-a atașat suma primilor n termeni, S_n. Se arată ușor că

- pentru progresii aritmetice: $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n = \left(x_1 + \frac{(n-1)r}{2}\right) \cdot n$;
- pentru progresii aritmetice: $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Progresii aritmetice. Progresii geometrice

- (x_n) este o **progresie aritmetică de rație** r dacă $x_{n+1} = x_n + r$, $\forall n$;
- (x_n) este o **progresie geometrică de rație** q dacă $x_{n+1} = q \cdot x_n$, $\forall n$.

Acestor șiruri li s-a atașat suma primilor n termeni, S_n. Se arată ușor că

- pentru progresii aritmetice: $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \left(x_1 + \frac{(n-1)r}{2}\right) \cdot n$;
- pentru progresii aritmetice: $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Definiția 1.1

Fiind dat un șir de numere reale (x_n), cuplul format din șirurile (x_n) și (S_n), unde

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad \text{pentru orice n} \in \mathbb{N},$$

se numește **serie** de termen general (x_n). Șirul (S_n) se numește **șirul sumelor parțiale** asociat șirului (x_n).

Serii convergente. Serii divergente

Vom nota o serie prin

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \text{ sau } \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \text{ sau } x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots \text{ sau, simplu, } \sum a_n$$

Serii convergente. Serii divergente

Vom nota o serie prin

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \text{ sau } \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \text{ sau } x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots \text{ sau, simplu, } \sum a_n$$

Definiția 1.2

1. Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este **convergentă** dacă șirul sumelor parțiale (S_n) asociat lui (a_n) este convergent în $\mathbb{R}$. În acest caz,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

se numește **suma seriei** și o vom nota prin $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sau $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, sau $x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots$

În acest caz, notăm $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \ (C)$.

Serii convergente. Serii divergente

Vom nota o serie prin

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \text{ sau } \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \text{ sau } x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots \text{ sau, simplu, } \sum a_n$$

Definiția 1.2

1. Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este **convergentă** dacă șirul sumelor parțiale (S_n) asociat lui (a_n) este convergent în $\mathbb{R}$. În acest caz,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

se numește **suma seriei** și o vom nota prin $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sau $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, sau $x_0 + x_1 + \ldots + x_n + \ldots$

În acest caz, notăm $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (C).

2. Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este **divergentă** dacă șirul sumelor parțiale, (S_n), este divergent. În acest caz, notăm $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (D).

Observaţii. Seria geometrică

Observaţia 1.3

1. Prin notaţia $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ vom înţelege fie seria cu termenul general x_n, fie suma seriei, la ce anume se face referire reieşind din context.

Observații. Seria geometrică

Observația 1.3

1. Prin notația $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ vom înțelege fie seria cu termenul general x_n, fie suma seriei, la ce anume se face referire reieșind din context.

2. Uneori seria nu va fi indexată de la 0, ci de la un număr natural n_0 : $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$.

Convenim să notăm tot prin S_n suma termenilor până la cel de rang n:
$S_n = x_{n_0} + ... x_n$.

Observații. Seria geometrică

Observația 1.3

1. Prin notația $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ vom înțelege fie seria cu termenul general x_n, fie suma seriei, la ce anume se face referire reieșind din context.

2. Uneori seria nu va fi indexată de la 0, ci de la un număr natural n_0 : $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$.

Convenim să notăm tot prin S_n suma termenilor până la cel de rang n:
$S_n = x_{n_0} + ...x_n$.
3. Faptul că o serie este convergentă sau divergentă îl vom numi **natura seriei**.

Observații. Seria geometrică

Observația 1.3

1. Prin notația $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ vom înțelege fie seria cu termenul general x_n, fie suma seriei, la ce anume se face referire reieșind din context.

2. Uneori seria nu va fi indexată de la 0, ci de la un număr natural n_0 : $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$.

Convenim să notăm tot prin S_n suma termenilor până la cel de rang n:
$S_n = x_{n_0} + ...x_n$.

3. Faptul că o serie este convergentă sau divergentă îl vom numi **natura seriei**.

Exemplul 1.4

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ poartă numele de **serie geometrică** (termenul general al seriei provine dintr-o serie geometrică în care primul termen are valoare a iar rația este egală cu q). Această serie este convergentă pentru orice q astfel încât $|q| < 1$. Suma seriei este, în acest caz,

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Serii telescopice

Exemplul 1.5

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă. Aceasta pentru că șirul sumelor parțiale este:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

iar de aici vedem că $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, adică șirul sumelor parțiale este convergent.

Serii telescopice

Exemplul 1.5

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă. Aceasta pentru că șirul sumelor parțiale este:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

iar de aici vedem că $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$, adică șirul sumelor parțiale este convergent.

Exemplul 1.6

Ca o generalizare pentru exemplul anterior, dacă termenul general al unei serii $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ poate fi scris sub forma

$$x_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o **serie telescopică**. $S_n = \alpha_1 - \alpha_n$ și deci seria este convergentă dacă și numai dacă (α_n) este un șir convergent, caz în care

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha_1 - \lim_{n\to\infty} \alpha_n.$$

Seria armonică

Exemplul 1.7

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ este divergentă. Șirul sumelor parțiale este dat de

$$S_{2n} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{iar } S_{2n+1} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seria armonică

Exemplul 1.7

Seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ este divergentă. Șirul sumelor parțiale este dat de

$$S_{2n}=0, \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \text{iar } S_{2n+1}=1, \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Exemplul 1.8

Seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, numită **seria armonică** deoarece fiecare termen este media armonică a termenilor învecinați, este divergentă. Șirul sumelor parțiale este dat de:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

și am vazut în cursul precedent că acesta este un șir divergent (are limita $+\infty$).

Proprietăți generale

Teorema 1.9

Dacă unei serii i se adaugă sau i se suprimă un număr finit de termeni, atunci natura seriei nu se schimbă.

Proprietăți generale

Teorema 1.9

Dacă unei serii i se adaugă sau i se suprimă un număr finit de termeni, atunci natura seriei nu se schimbă.

Teorema 1.10 (condiția necesară de convergență)

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este o serie convergentă, atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Proprietăți generale

Teorema 1.9

Dacă unei serii i se adaugă sau i se suprimă un număr finit de termeni, atunci natura seriei nu se schimbă.

Teorema 1.10 (condiția necesară de convergență)

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este o serie convergentă, atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Corolarul 1.11

Dacă termenul general al unei serii nu converge la 0*, atunci seria este divergentă.*

Proprietăți generale

Teorema 1.9

Dacă unei serii i se adaugă sau i se suprimă un număr finit de termeni, atunci natura seriei nu se schimbă.

Teorema 1.10 (condiția necesară de convergență)

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este o serie convergentă, atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Corolarul 1.11

Dacă termenul general al unei serii nu converge la 0*, atunci seria este divergentă.*

Observația 1.12

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, deși $\frac{1}{n} \to 0$.

Proprietăți generale

Teorema 1.9

Dacă unei serii i se adaugă sau i se suprimă un număr finit de termeni, atunci natura seriei nu se schimbă.

Teorema 1.10 (condiția necesară de convergență)

Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este o serie convergentă, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Corolarul 1.11

Dacă termenul general al unei serii nu converge la 0, *atunci seria este divergentă.*

Observația 1.12

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, deși $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ este divergentă, deoarece termenul general nu are limită.

Operații cu serii. Criteriul Cauchy

Teorema 1.13 (operații cu serii)

Considerăm seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *și numărul real nenul* λ.

1. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt convergente, atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ *este convergentă și*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

2. *Seriile* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x_n)$ *au aceeași natură.*

Operații cu serii. Criteriul Cauchy

Teorema 1.13 (operații cu serii)

Considerăm seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *și numărul real nenul* λ.

1. Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt convergente, atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ *este convergentă și*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

2. Seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda x_n)$ *au aceeași natură.*

Observația 1.14

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Operații cu serii. Criteriul Cauchy

Teorema 1.13 (operații cu serii)

Considerăm seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *și numărul real nenul* λ.

1. *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt convergente, atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ *este convergentă și*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

2. *Seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda x_n)$ *au aceeași natură.*

Observația 1.14

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ și $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Teorema 1.15 (criteriul Cauchy)

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă dacă și numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru orice* $n \geq n_\varepsilon$ *și orice* $p \in \mathbb{N}^*$, *să avem*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Serii cu termeni pozitivi

Ne vom ocupa acum de seriile cu termeni pozitivi. Aceste serii au proprietatea că **șirul sumelor parțiale este crescător**:

$$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0.$$

Astfel, o serie cu termeni pozitivi este **convergentă** dacă și numai dacă **șirul sumelor parțiale este majorat**.

Criterii de comparație

Teorema 2.1 (criteriul de comparație de speța I)

Fie seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *astfel încât* $x_n \leq y_n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ (C), *atunci și* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (C).
2. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (D), *atunci și* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ (D).

Criterii de comparație

Teorema 2.1 (criteriul de comparație de speța I)

Fie seriile cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *astfel încât* $x_n \leq y_n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ (C), *atunci și* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (C).
2. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (D), *atunci și* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ (D).

Teorema 2.2 (criteriul de comparație cu limită)

Fie seriile cu termeni strict pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

1. *Dacă există* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lambda \in (0, \infty)$, *atunci cele două serii au aceeași natură.*
2. *Dacă* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ $(C) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (C), *și* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ $(D) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ (D).
3. *Dacă* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ $(C) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ (C), *și* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ $(D) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (D).

Criterii de comparație. Exemple

Exemplul 2.3

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ este divergentă.

Criterii de comparație. Exemple

Exemplul 2.3

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ este divergentă.

Exemplul 2.4

Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$$

se numește **seria armonică generalizată**.
Ea este: **convergentă dacă $\alpha > 1$ și este divergentă în rest.**

Criterii de comparație. Exemple

Exemplul 2.3

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ este divergentă.

Exemplul 2.4

Seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$$

se numește **seria armonică generalizată**.
Ea este: **convergentă dacă $\alpha > 1$ și este divergentă în rest.**

Exemplul 2.5

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+4n+2}{n^4+5n-1}$ este convergentă.

Criteriul rădăcinii. Criteriul raportului

Teorema 2.6 (Cauchy - Hadamard: criteriul rădăcinii)

Fie seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

1. *Dacă* $\lambda < 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\lambda > 1$, *atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Criteriul rădăcinii. Criteriul raportului

Teorema 2.6 (Cauchy - Hadamard: criteriul rădăcinii)

Fie seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *și* $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

1. *Dacă* $\lambda < 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\lambda > 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Teorema 2.7 (D'Alembert: criteriul raportului)

Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *cu* $x_n > 0$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Dacă există* $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, *atunci:*

1. *Dacă* $\ell < 1$, *seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\ell > 1$, *seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Criteriul rădăcinii. Criteriul raportului. Exemple

Observația 2.8

În ambele teoreme de mai sus, **dacă** $\lambda = 1$, **nu putem decide dacă seria este convergentă sau divergentă**.

Pentru ambele serii $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ avem $\lambda = 1$, dar prima este divergentă, iar a doua convergentă.

Criteriul rădăcinii. Criteriul raportului. Exemple

Observația 2.8

În ambele teoreme de mai sus, **dacă** $\lambda = 1$, **nu putem decide dacă seria este convergentă sau divergentă**.

Pentru ambele serii $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ avem $\lambda = 1$, dar prima este divergentă, iar a doua convergentă.

Exemplul 2.9

Studiați natura seriilor:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3 + 4n + 5}{3n^3 + 4n + 6} \right)^{n^4}$.

Criteriul rădăcinii. Criteriul raportului. Exemple

Observația 2.8

În ambele teoreme de mai sus, **dacă $\lambda = 1$, nu putem decide dacă seria este convergentă sau divergentă**.

Pentru ambele serii $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ avem $\lambda = 1$, dar prima este divergentă, iar a doua convergentă.

Exemplul 2.9

Studiați natura seriilor:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3 + 4n + 5}{3n^3 + 4n + 6} \right)^{n^4}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (2n+3)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}$.

Criteriul lui Raabe-Duhamel

Teorema 2.10 (Raabe-Duhamel)

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, *pentru orice* n. *Dacă există* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \rho$, *atunci*

1. dacă $\rho > 1$, *seria este convergentă;*

2. dacă $\rho < 1$, *seria este divergentă.*

Criteriul lui Raabe-Duhamel

Teorema 2.10 (Raabe-Duhamel)

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, *cu* $x_n > 0$, *pentru orice* n. *Dacă există* $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \rho$, *atunci*

1. dacă $\rho > 1$, *seria este convergentă;*

2. dacă $\rho < 1$, *seria este divergentă.*

Exemplul 2.11

Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \to 1,$$

deci din criteriul raportului nu putem trage o concluzie.
Aplicăm mai departe criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n \cdot \frac{-6n-5}{(2n+2)(2n+3)} \to -\frac{3}{2}.$$

Fiindcă limita este subunitară, seria este divergentă.

Serii alternate. Criteriul lui Leibniz

Definiția 3.1

Spunem despre o serie de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ că este o **serie alternată** dacă poate fi pusă în una din formele:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x_n \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} x_n$$

cu $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Serii alternate. Criteriul lui Leibniz

Definiția 3.1

Spunem despre o serie de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ că este o **serie alternată** dacă poate fi pusă în una din formele:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x_n \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$$

cu $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2 (criteriul lui Lebniz)

Dacă (x_n) este un șir descrescător cu limita 0, atunci seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergentă.

Serii alternate. Criteriul lui Leibniz

Definiția 3.1

Spunem despre o serie de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ că este o **serie alternată** dacă poate fi pusă în una din formele:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x_n \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$$

cu $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2 (criteriul lui Lebniz)

Dacă (x_n) este un șir descrescător cu limita 0, atunci seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ este convergentă.

Exemplul 3.3

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este o serie convergentă. Tot convergentă este și seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$, pentru orice $x \geq 0$, șirul $\left(\sin \frac{x}{n}\right)$ fiind, de la un rang încolo, descrescător.

Serii absolut convergente. Serii semiconvergente

Definiția 3.4

Fie seria cu termeni oarecare $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

1. Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este **absolut convergentă** dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este convergentă. În acest caz, notăm $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (AC).

2. Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este **semiconvergentă** dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este divergentă. În acest caz, notăm $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ (SC).

Serii absolut convergente. Serii semiconvergente

Definiția 3.4

Fie seria cu termeni oarecare $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

1. Spunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este **absolut convergentă** dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este convergentă. În acest caz, notăm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \ (AC)$.

2. Spunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este **semiconvergentă** dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ este convergentă iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este divergentă. În acest caz, notăm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \ (SC)$.

Exemplul 3.5

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ este un exemplu de serie semiconvergentă, în vreme ce $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^2}{n^2}$ este un exemplu de serie absolut convergentă.

$(AC) \Rightarrow (C)$

Teorema 3.6

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este absolut convergentă, atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este și convergentă.*

$(AC) \Rightarrow (C)$

Teorema 3.6

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este absolut convergentă, atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este și convergentă.*

Observația 3.7

1. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată: seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă, fără a fi absolut convergentă.

$(AC) \Rightarrow (C)$

Teorema 3.6

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ este și convergentă.

Observația 3.7

1. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată: seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă, fără a fi absolut convergentă.
2. Pentru seriile cu termeni pozitivi cele două noțiuni sunt echivalente.

$(AC) \Rightarrow (C)$

Teorema 3.6

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este absolut convergentă, atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este și convergentă.*

Observația 3.7

1. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată: seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă, fără a fi absolut convergentă.
2. Pentru seriile cu termeni pozitivi cele două noțiuni sunt echivalente.
3. Deoarece seria modulelor atașată unei serii cu termeni oarecare este o serie cu termeni pozitivi, putem studia absoluta convergență folosind criteriile stabilite pentru serii cu termeni pozitivi. În felul acesta, fiecare criteriu de convergență de la serii cu termeni pozitivi devine un criteriu de convergență pentru serii cu termeni oarecare.

$(AC) \Rightarrow (C)$

Teorema 3.6

Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este absolut convergentă, atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este și convergentă.*

Observația 3.7

1. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată: seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă, fără a fi absolut convergentă.
2. Pentru seriile cu termeni pozitivi cele două noțiuni sunt echivalente.
3. Deoarece seria modulelor atașată unei serii cu termeni oarecare este o serie cu termeni pozitivi, putem studia absoluta convergență folosind criteriile stabilite pentru serii cu termeni pozitivi. În felul acesta, fiecare criteriu de convergență de la serii cu termeni pozitivi devine un criteriu de convergență pentru serii cu termeni oarecare.
4. În general, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ este divergentă, nu se poate spune nimic despre natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.