Analiză matematică - curs 4
Limite de funcții

Facultatea de Mecanică

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iași

Limita unei funcţii într-un punct - Definiţii

Definiţia 1.1

Spunem că funcţia f **are limita** ℓ **în punctul** a, şi notăm

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell, \text{ sau } f(x) \to \ell \text{ pentru } x \to a,$$

dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, pentru orice x din $U \cap A$ diferit de a, să avem $f(x) \in V$, sau, formalizat,

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}(a) : f(U \cap A \setminus \{a\}) \subset V. \tag{1}$$

Observaţia 1.2

Punctul a nu trebuie să aparţină neapărat mulţimii A, însă trebuie să existe puncte în mulţimea A oricât de apropiate de a, adică să fie punct de acumulare al mulţimii A.

Limita unei funcții într-un punct - Definiții

Teorema 1.3 (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a limitei)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci f are limita ℓ în punctul a dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\|_{\mathbb{R}^k} < \delta : \|f(x) - \ell\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \tag{2}$$

Limita unei funcţii într-un punct - Definiţii

Teorema 1.3 (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a limitei)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci f are limita ℓ în punctul a dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\|_{\mathbb{R}^k} < \delta : \|f(x) - \ell\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \tag{2}$$

Teorema 1.4 (Caracterizarea cu şiruri a limitei)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci f are limita ℓ în punctul a dacă şi numai dacă

$$\forall (x_n) \subset A \setminus \{a\}, x_n \to a \text{ implică } f(x_n) \to \ell. \tag{3}$$

Limita unei funcții într-un punct - Definiții

Teorema 1.3 (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a limitei)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci f are limita ℓ în punctul a dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\|_{\mathbb{R}^k} < \delta : \|f(x) - \ell\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \tag{2}$$

Teorema 1.4 (Caracterizarea cu șiruri a limitei)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci f are limita ℓ în punctul a dacă și numai dacă

$$\forall (x_n) \subset A \setminus \{a\}, x_n \to a \text{ implică } f(x_n) \to \ell. \tag{3}$$

Observația 1.5

Uneori, una din relațiile (2), respectiv (3), se consideră a fi definiția limitei funcției f în punctul a, numite și **definiția $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcții într-un punct**, respectiv **definiția cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct.**

Limita unei funcţii într-un punct - Definiţii

Teorema 1.3 (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a limitei)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci f are limita ℓ în punctul a dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\|_{\mathbb{R}^k} < \delta : \|f(x) - \ell\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \tag{2}$$

Teorema 1.4 (Caracterizarea cu şiruri a limitei)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci f are limita ℓ în punctul a dacă şi numai dacă

$$\forall (x_n) \subset A \setminus \{a\}, x_n \to a \text{ implică } f(x_n) \to \ell. \tag{3}$$

Observaţia 1.5

Uneori, una din relaţiile (2), respectiv (3), se consideră a fi definiţia limitei funcţiei f în punctul a, numite şi **definiţia $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii într-un punct,** respectiv **definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct.**

Corolarul 1.6

Dacă există $(x_n), (u_n) \subset A \setminus \{a\}$ astfel încât $x_n \to a$, $u_n \to a$, iar $f(x_n) \to \ell_1$, $f(u_n) \to \ell_2$, cu $\ell_1 \neq \ell_2$, atunci nu există limita funcţiei f în punctul a.

Câteva exemple

Exemplul 1.7

Să se arate că $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} \sqrt{x+1} = 2$.

Câteva exemple

Exemplul 1.7

Să se arate că $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$.

Exemplul 1.8

Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ are limita 0 în punctul $(0,0)$.

Câteva exemple

Exemplul 1.7

Să se arate că $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$.

Exemplul 1.8

Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2}$ are limita 0 în punctul $(0,0)$.

Exemplul 1.9

Să se arate că nu există limita funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ în punctul 0.

Câteva exemple

Exemplul 1.7

Să se arate că $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$.

Exemplul 1.8

Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ are limita 0 în punctul $(0,0)$.

Exemplul 1.9

Să se arate că nu există limita funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ în punctul 0.

Exemplul 1.10

Să se arate că nu există limita funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ în punctul $(0,0)$.

Câteva exemple

Exemplul 1.7

Să se arate că $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$.

Exemplul 1.8

Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2}$ are limita 0 în punctul $(0,0)$.

Exemplul 1.9

Să se arate că nu există limita funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ în punctul 0.

Exemplul 1.10

Să se arate că nu există limita funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ în punctul $(0,0)$.

Câteva exemple

Exemplul 1.7

Să se arate că $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$.

Exemplul 1.8

Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ are limita 0 în punctul $(0,0)$.

Exemplul 1.9

Să se arate că nu există limita funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ în punctul 0.

Exemplul 1.10

Să se arate că nu există limita funcției $f : \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ în punctul $(0,0)$.

Teorema 1.11

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A'$. Dacă f are limită în punctul a, aceasta este unică.

Tipuri de funcții

Funcția $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k \geq 1, p > 1$ poate fi gândită ca fiind echivalentă cu p funcții cu valori reale:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)), \quad \forall x \in A. \tag{4}$$

Tipuri de funcții

Funcția $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $k \geq 1, p > 1$ poate fi gândită ca fiind echivalentă cu p funcții cu valori reale:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)), \quad \forall x \in A. \tag{4}$$

- O funcție $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ având $p, k > 1$ se numește **funcție vectorială de argument vectorial**, iar funcțiile f_i sunt numite **funcțiile componente**, sau **funcțiile coordonate** ale funcției f, și scriem $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$.

Tipuri de funcții

Funcția $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k \geq 1, p > 1$ poate fi gândită ca fiind echivalentă cu p funcții cu valori reale:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)), \quad \forall x \in A. \tag{4}$$

- O funcție $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ având $p, k > 1$ se numește **funcție vectorială de argument vectorial**, iar funcțiile f_i sunt numite **funcțiile componente**, sau **funcțiile coordonate** ale funcției f, și scriem $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$.
- O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ cu $p > 1$ se numește **funcție vectorială de argument real**.

Tipuri de funcții

Funcția $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k \geq 1, p > 1$ poate fi gândită ca fiind echivalentă cu p funcții cu valori reale:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)), \quad \forall x \in A. \tag{4}$$

- O funcție $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ având $p, k > 1$ se numește **funcție vectorială de argument vectorial**, iar funcțiile f_i sunt numite **funcțiile componente**, sau **funcțiile coordonate** ale funcției f, și scriem $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$.
- O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ cu $p > 1$ se numește **funcție vectorială de argument real**.
- O funcție $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ având $k > 1$ se numește **funcție reală de argument vectorial**.

Tipuri de funcții

Funcția $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $k \geq 1, p > 1$ poate fi gândită ca fiind echivalentă cu p funcții cu valori reale:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)), \quad \forall x \in A. \tag{4}$$

- O funcție $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ având $p, k > 1$ se numește **funcție vectorială de argument vectorial**, iar funcțiile f_i sunt numite **funcțiile componente**, sau **funcțiile coordonate** ale funcției f, și scriem $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$.
- O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ cu $p > 1$ se numește **funcție vectorială de argument real**.
- O funcție $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ având $k > 1$ se numește **funcție reală de argument vectorial**.
- O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește **funcție reală de argument real**.

Tipuri de funcții

Funcția $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k \geq 1, p > 1$ poate fi gândită ca fiind echivalentă cu p funcții cu valori reale:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)), \quad \forall x \in A. \tag{4}$$

- O funcție $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ având $p, k > 1$ se numește **funcție vectorială de argument vectorial**, iar funcțiile f_i sunt numite **funcțiile componente**, sau **funcțiile coordonate** ale funcției f, și scriem $f = (f_1, f_2, ..., f_p)$.
- O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ cu $p > 1$ se numește **funcție vectorială de argument real**.
- O funcție $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ având $k > 1$ se numește **funcție reală de argument vectorial**.
- O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se numește **funcție reală de argument real**.

Teorema 1.12

Fie funcția $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A'$. Atunci f are limita $\ell = (\ell_1, \ell_2, ..., \ell_p) \in \mathbb{R}^p$ în punctul a dacă și numai dacă există simultan $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = \ell_i, i = \overline{1, p}$.

Limite Laterale

Pentru funcţii $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, putem exploata structura de ordine a mulţimii $\mathbb{R}$:

Definiţia 1.13

Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $A \subset \mathbb{R}$. Vom nota

$$A_s = A \cap (-\infty, a], \quad A_d = A \cap [a, \infty).$$

Punctul a se numeşte **punct de acumulare la stânga** (respectiv **dreapta**) pentru A dacă este punct de acumulare pentru mulţimea A_s (respectiv A_d). Vom nota mulţimea punctelor de acumulare la stânga (respectiv dreapta) cu A'_s (respectiv A'_d). Cu alte cuvinte,

$$\begin{aligned} a \in A'_s &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(a), (V \cap A_s) \setminus \{a\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, (a - r, a + r) \cap A \cap (-\infty, a) \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, (a - r, a) \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Analog,

$$a \in A'_d \Leftrightarrow \forall r > 0, (a, a + r) \cap A \neq \emptyset.$$

Limite laterale

Definiția 1.14

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$.
(i) Dacă $a \in A'_s$, spunem că elementul $\ell_s \in \mathbb{R}^p$ este **limită la stânga** a funcției f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell_s)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in (U \cap A_s) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell_s$ sau $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \ell_s$.

(ii) Dacă $a \in A'_d$, spunem că elementul $\ell_d \in \mathbb{R}^p$ este **limită la dreapta** a funcției f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell_d)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in (U \cap A_d) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell_d$ sau $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \ell_d$.

Limite laterale

Definiția 1.14

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$.
(i) Dacă $a \in A_s'$, spunem că elementul $\ell_s \in \mathbb{R}^p$ este **limită la stânga** a funcției f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell_s)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in (U \cap A_s) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell_s$ sau $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \ell_s$.

(ii) Dacă $a \in A_d'$, spunem că elementul $\ell_d \in \mathbb{R}^p$ este **limită la dreapta** a funcției f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell_d)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in (U \cap A_d) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell_d$ sau $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \ell_d$.

Teorema 1.15

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A_s' \cap A_d'$. Atunci f are limită în punctul a dacă și numai dacă există limitele la stânga și la dreapta în punctul a și sunt egale. În acest caz,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x).$$

Proprietăți

Definiția 1.16

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ și $B \subset A$. O funcție $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ se numește **mărginită pe** B dacă mulțimea

$$f(B) := \left\{y \in \mathbb{R}^p \mid \exists x \in B : f(x) = y\right\} = \{f(x) \mid x \in B\}$$

este mărginită. Cu alte cuvinte, f este mărginită pe B dacă există $r > 0$ astfel încât $f(B) \subset B(0, r)$ sau, echivalent, dacă există $r > 0$ astfel încât $\|f(x)\| < r$ pentru orice $x \in B$. Mulțimea $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$ se va nota uneori cu $\operatorname{Im} f$ și se va numi **imaginea** funcției f. În cazul în care o funcție este mărginită pe întregul său domeniu de definiție, se va numi simplu **mărginită**.

Proprietăți

Definiția 1.16

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ și $B \subset A$. O funcție $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ se numește **mărginită pe** B dacă mulțimea

$$f(B) := \left\{y \in \mathbb{R}^p \mid \exists x \in B : f(x) = y\right\} = \{f(x) \mid x \in B\}$$

este mărginită. Cu alte cuvinte, f este mărginită pe B dacă există $r > 0$ astfel încât $f(B) \subset B(0, r)$ sau, echivalent, dacă există $r > 0$ astfel încât $\|f(x)\| < r$ pentru orice $x \in B$. Mulțimea $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$ se va nota uneori cu $\mathrm{Im}\, f$ și se va numi **imaginea** funcției f. În cazul în care o funcție este mărginită pe întregul său domeniu de definiție, se va numi simplu **mărginită**.

Teorema 1.17

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $k, p \geq 1$ o funcție și $a \in A'$. Dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât f să fie mărginită pe $(U \cap A) \setminus \{a\}$.

Proprietăți

Teorema 1.18

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $k, p \geq 1$ *și* $a \in A'$. *Dacă există* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$, $\ell \neq 0$, *atunci există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât pentru orice* $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, *are loc* $f(x) \neq 0$.

Proprietăți

Teorema 1.18

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $k, p \geq 1$ *și* $a \in A'$. *Dacă există* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$, $\ell \neq 0$, *atunci există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât pentru orice* $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, *are loc* $f(x) \neq 0$.

Corolarul 1.19 (Păstrarea semnului)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. *Dacă există* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, $\ell > 0$ *(respectiv* $\ell < 0$*), atunci există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât pentru orice* $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, *are loc* $f(x) > 0$ *(respectiv* $f(x) < 0$*).*

Proprietăţi

Teorema 1.18

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $k, p \geq 1$ *şi* $a \in A'$. *Dacă există* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$, $\ell \neq 0$, *atunci există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât pentru orice* $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, *are loc* $f(x) \neq 0$.

Corolarul 1.19 (Păstrarea semnului)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. *Dacă există* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, $\ell > 0$ *(respectiv* $\ell < 0$*), atunci există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât pentru orice* $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, *are loc* $f(x) > 0$ *(respectiv* $f(x) < 0$*).*

Teorema 1.20

Fie $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $a \in A'$. *Dacă* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *şi există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* g *este mărginită pe* U, *atunci există* $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = 0$.

Teorema 1.21

Fie $A \subset \mathbb{R}^k$, $B \subset \mathbb{R}^p$, $a \in A'$, $b \in B'$ *şi funcţiile* $f : B \to \mathbb{R}^m$, $g : A \to B \setminus \{b\}$. *Dacă* $\lim\limits_{y \to b} f(y) = \ell$ *şi* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, *atunci*

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = \ell.$$

Operaţii

Teorema 1.22 (Operaţii cu limite de funcţii)

Fie funcţiile $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *şi* $a \in A'$. *Presupunem că există* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Dacă suma $\ell_1 + \ell_2$ *a limitelor are sens, atunci funcţia* $f + g$ *are limită în* a *şi are loc relaţia:*

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \ell_1 + \ell_2 = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

(caz exceptat: una dintre limitele ℓ_1, ℓ_2 *este egală cu* $+\infty$*, iar cealaltă cu* $-\infty$*).*

(ii) Funcţia αf *are limită în* a *şi au loc relaţiile:*

$$\lim_{x \to a} (\alpha f)(x) = \alpha \cdot \ell_1 = \alpha \cdot \lim_{x \to a} f(x), \ \text{dacă } \alpha \neq 0,$$

$$\lim_{x \to a} (\alpha f)(x) = 0, \ \text{dacă } \alpha = 0.$$

(iii) Dacă produsul $\ell_1 \cdot \ell_2$ *al limitelor are sens, atunci funcţia* $f \cdot g$ *are limită în* a *şi are loc relaţia:*

$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2 = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

(cazuri exceptate: una dintre limitele ℓ_1, ℓ_2 *este egală cu* 0*, iar cealaltă este* $+\infty$ *sau* $-\infty$*).*

Operații

Operații cu limite de funcții(continuare)

(iv) Dacă raportul $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ al limitelor are sens și există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât funcția $\dfrac{f}{g}$ este bine definită pe $(U \cap A) \setminus \{a\}$, atunci funcția $\dfrac{f}{g}$ are limită în a și are loc relația:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

(cazuri exceptate: $\ell_2 = 0$, sau ambele limite ℓ_1, ℓ_2 sunt infinite).

(v) Dacă $\ell_1^{\ell_2}$ are sens și există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât funcția f^g este bine definită pe $(U \cap A) \setminus \{a\}$, atunci funcția f^g are limită în a și are loc relația:

$$\lim_{x \to a} \left(f^g \right)(x) = \ell_1^{\ell_2} = \left(\lim_{x \to a} f(x) \right)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

(cazuri exceptate: $(\ell_1, \ell_2) = (0, 0)$, $(\ell_1, \ell_2) = (+\infty, 0)$, $(\ell_1, \ell_2) = (1, +\infty)$).

Asimptote

Cele prezentate anterior permit introducerea noțiunilor de asimptote la graficul unei funcții. Intuitiv, asimptotele sunt drepte față de care graficul unei funcții se "apropie" oricât de mult, dar nu le "atinge".

Asimptote

Cele prezentate anterior permit introducerea noțiunilor de asimptote la graficul unei funcții. Intuitiv, asimptotele sunt drepte față de care graficul unei funcții se "apropie" oricât de mult, dar nu le "atinge".

Definiția 1.23

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $+\infty$ (respectiv $-\infty$) este punct de acumulare pentru A.
(i) Spunem că dreapta $y = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, este **asimptotă orizontală la** $+\infty$ (respectiv $-\infty$) pentru funcția f dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$).
(ii) Spunem că dreapta $y = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, este **asimptotă oblică la** $+\infty$ (respectiv $-\infty$) pentru funcția f, dacă există $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x) - mx - n| = 0$ (respectiv $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x) - mx - n| = 0$).

Definiție

Definiția 2.1

Spunem că funcția $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ **este continuă în punctul** $a \in A$ dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, pentru orice x din $U \cap A$, să avem $f(x) \in V$, sau, formalizat,

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a) : f(U \cap A) \subset V. \tag{5}$$

Definiție

Definiția 2.1

Spunem că funcția $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ **este continuă în punctul** $a \in A$ dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, pentru orice x din $U \cap A$, să avem $f(x) \in V$, sau, formalizat,

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a) : f(U \cap A) \subset V. \tag{5}$$

Dacă funcția f nu este continuă în punctul $a \in A$, vom spune că f este **discontinuă în punctul** a, sau că a este un **punct de discontinuitate** pentru funcția f.
Vom spune că funcția f este **continuă pe o mulțime** $B \subset A$ dacă f este continuă în orice punct $x \in B$.

Caracterizări

Teorema 2.2 (Caracterizare a continuității cu limita)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ *și* $a \in A' \cap A$. *Atunci* f *este continuă în* a *dacă și numai dacă există* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Caracterizări

Teorema 2.2 (Caracterizare a continuității cu limita)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A' \cap A$. Atunci f este continuă în a dacă și numai dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Teorema 2.3 (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a continuității)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A$. Atunci f este continuă în punctul a dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_{\mathbb{R}^k} < \delta : \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \tag{6}$$

Caracterizări

Teorema 2.2 (Caracterizare a continuității cu limita)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A' \cap A$. Atunci f este continuă în a dacă și numai dacă există $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Teorema 2.3 (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a continuității)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A$. Atunci f este continuă în punctul a dacă și numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_{\mathbb{R}^k} < \delta : \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \tag{6}$$

Teorema 2.4 (Caracterizarea cu șiruri a continuității)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A$. Atunci f este continuă în punctul a dacă și numai dacă

$$\forall (x_n) \subset A, x_n \to a \text{ implică } f(x_n) \to f(a). \tag{7}$$

Un exemplu

Exercițiul 2.5

Să se arate că funcția:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Caracterizarea continuității pentru funcții cu valori vectoriale

Teorema de caracterizare cu șiruri a continuității ne permite caracterizarea continuității unei funcții vectoriale de variabilă vectorială prin intermediul proprietății similare a funcțiilor componente.

Caracterizarea continuității pentru funcții cu valori vectoriale

Teorema de caracterizare cu șiruri a continuității ne permite caracterizarea continuității unei funcții vectoriale de variabilă vectorială prin intermediul proprietății similare a funcțiilor componente.

Teorema 2.6

Fie $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k \geq 1, p > 1$ *și* $a \in A$. *Atunci* f *este continuă în punctul* a *dacă și numai dacă funcțiile* $f_1, f_2, ..., f_p : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *sunt continue în* a.

Continuitate laterală

Definiția 2.7

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A$.
(i) Spunem că f este **continuă la stânga** în a dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât dacă $x \in U \cap A_s$, să avem $f(x) \in V$.
(ii) Spunem că f este **continuă la dreapta** în a dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât dacă $x \in U \cap A_d$, să avem $f(x) \in V$.

Continuitate laterală

Definiţia 2.7

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A$.
(i) Spunem că f este **continuă la stânga** în a dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât dacă $x \in U \cap A_s$, să avem $f(x) \in V$.
(ii) Spunem că f este **continuă la dreapta** în a dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât dacă $x \in U \cap A_d$, să avem $f(x) \in V$.

Teorema 2.8

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A$.
(i) Dacă $a \in A_s'$, atunci f este continuă la stânga în a dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$.
(ii) Dacă $a \in A_d'$, atunci f este continuă la dreapta în a dacă şi numai dacă există $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$.

Continuitate laterală

Definiția 2.7

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A$.
(i) Spunem că f este **continuă la stânga** în a dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât dacă $x \in U \cap A_s$, să avem $f(x) \in V$.
(ii) Spunem că f este **continuă la dreapta** în a dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(f(a))$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât dacă $x \in U \cap A_d$, să avem $f(x) \in V$.

Teorema 2.8

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A$.
(i) Dacă $a \in A'_s$, atunci f este continuă la stânga în a dacă și numai dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = f(a)$.
(ii) Dacă $a \in A'_d$, atunci f este continuă la dreapta în a dacă și numai dacă există $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$.

Teorema 2.9

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A \cap A'$. Atunci f este continuă în a dacă și numai dacă f este continuă la stânga și la dreapta în a.

Puncte de discontinuitate

Definiția 2.10

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ și $a \in A$ punct de discontinuitate pentru f.

1. Punctul a se numește **punct de discontinuitate de specia I** dacă există limitele laterale în a și sunt finite.
2. Punctul a se numește **punct de discontinuitate de specia a II-a** dacă nu este puncte de discontinuitate de prima specie.

Proprietăți ale funcțiilor continue

Teorema 2.11 (Compunerea funcțiilor continue)

Fie $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}^p$ *și funcțiile* $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}^m$, $k, p, m \geq 1$.
(i) Dacă f *este continuă în* $a \in A$*, iar* g *este continuă în* $f(a)$*, atunci* $g \circ f$ *este continuă în* a*.*
(ii) Dacă f *este continuă pe* A*, iar* g *este continuă pe* B*, atunci* $g \circ f$ *este continuă pe* A*.*

Proprietăți ale funcțiilor continue

Teorema 2.11 (Compunerea funcțiilor continue)

Fie $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}^p$ *și funcțiile* $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}^m$, $k, p, m \geq 1$.
(i) Dacă f *este continuă în* $a \in A$, *iar* g *este continuă în* $f(a)$, *atunci* $g \circ f$ *este continuă în* a.
(ii) Dacă f *este continuă pe* A, *iar* g *este continuă pe* B, *atunci* $g \circ f$ *este continuă pe* A.

Teorema 2.12 (Operații cu funcții continue)

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ *și funcțiile* $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *continue pe* A. *Atunci:*
(i) $f + g$, λf *sunt funcții continue pe* A*;*
(ii) $f \cdot g$ *este continuă pe* A*;*
(iii) $\dfrac{f}{g}$ *este continuă pe mulțimea* $A \setminus \{x \in A \mid g(x) = 0\}$*;*
(iv) $|f|, \min(f, g), \max(f, g)$ *sunt funcții continue pe* A.

Proprietăți ale funcțiilor continue

Teorema 2.13

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ *o funcție și* $a \in A$. *Dacă* f *este continuă în* a, *atunci există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* f *să fie mărginită pe* $U \cap A$.

Proprietăți ale funcțiilor continue

Teorema 2.13

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ *o funcție și* $a \in A$. *Dacă* f *este continuă în* a, *atunci există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* f *să fie mărginită pe* $U \cap A$.

Teorema 2.14

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ *și* $a \in A$ *astfel încât* $f(a) \neq 0$. *Dacă* f *este continuă în* a, *atunci există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât pentru orice* $x \in U \cap A$, *are loc* $f(x) \neq 0$.

Proprietăți ale funcțiilor continue

Teorema 2.13

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $k, p \geq 1$ o funcție și $a \in A$. Dacă f este continuă în a, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât f să fie mărginită pe $U \cap A$.

Teorema 2.14

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$, $k, p \geq 1$ și $a \in A$ astfel încât $f(a) \neq 0$. Dacă f este continuă în a, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) \neq 0$.

Corolarul 2.15 (Păstrarea semnului)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $a \in A$. Dacă f este continuă în a și $f(a) > 0$ (respectiv, $f(a) < 0$), atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$).

Proprietăţi ale funcţiilor continue

Teorema 2.13

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ *o funcţie şi* $a \in A$. *Dacă* f *este continuă în* a, *atunci există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât* f *să fie mărginită pe* $U \cap A$.

Teorema 2.14

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ *şi* $a \in A$ *astfel încât* $f(a) \neq 0$. *Dacă* f *este continuă în* a, *atunci există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât pentru orice* $x \in U \cap A$, *are loc* $f(x) \neq 0$.

Corolarul 2.15 (Păstrarea semnului)

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, a \in A$. *Dacă* f *este continuă în* a *şi* $f(a) > 0$ *(respectiv,* $f(a) < 0$*), atunci există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât pentru orice* $x \in U \cap A$, *are loc* $f(x) > 0$ *(respectiv* $f(x) < 0$*).*

Teorema 2.16 (Funcţii continue pe mulţimi compacte)

Dacă $A \subset \mathbb{R}^k$ *este o mulţime compactă (mărginită şi închisă) şi* $f : A \to \mathbb{R}^p$ *este continuă, atunci* $f(A)$ *este compactă.*

Proprietăți ale funcțiilor continue

Teorema 2.17 (Weierstrass)

Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ *este continuă și* A *este o mulțime compactă, atunci* f *este mărginită pe* A *și își atinge marginile: există* $a, b \in A$, *astfel încât* $\sup\limits_{x \in A} f(x) = f(a)$ *și* $\inf\limits_{x \in A} f(x) = f(b)$.