Analiză matematică - curs 5
Derivabilitate și diferențiabilitate pentru funcții de o variabilă reală

FACULTATEA DE MECANICĂ

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iași

Derivata și diferențiala unei funcții reale

Definiția 1.1

(i) Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $a \in A' \cap A$. Spunem că f **are derivată în punctul** a dacă există în $\overline{\mathbb{R}}$ limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{1}$$

Vom nota această limită cu $f'(a)$ și o vom numi **derivata funcției** f **în punctul** a. Dacă $f'(a) \in \mathbb{R}$, spunem că f **este derivabilă în punctul** a.
(ii) Spunem că funcția $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este **derivabilă pe mulțimea** $D \subset A$, dacă f este derivabilă în fiecare punct din D. Funcția notată f', $f' : D \to \mathbb{R}$, care asociază fiecărui punct $x \in D$ derivata $f'(x)$ se numește **derivata** funcției f pe mulțimea D.

Derivata și diferențiala unei funcții reale

Definiția 1.1

(i) Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $a \in A' \cap A$. Spunem că f **are derivată în punctul** a dacă există în $\overline{\mathbb{R}}$ limita

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{1}$$

Vom nota această limită cu $f'(a)$ și o vom numi **derivata funcției** f **în punctul** a. Dacă $f'(a) \in \mathbb{R}$, spunem că f **este derivabilă în punctul** a.
(ii) Spunem că funcția $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este **derivabilă pe mulțimea** $D \subset A$, dacă f este derivabilă în fiecare punct din D. Funcția notată f', $f' : D \to \mathbb{R}$, care asociază fiecărui punct $x \in D$ derivata $f'(x)$ se numește **derivata** funcției f pe mulțimea D.

Definiția 1.2

(i) Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis și $f : I \to \mathbb{R}$. Spunem că f este **diferențiabilă în** $a \in I$ dacă există $A \in \mathbb{R}$ și $\alpha : I \to \mathbb{R}$, cu $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0$, astfel încât

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \alpha(x)(x - a), \tag{2}$$

pentru orice $x \in I$. În acest caz, aplicația liniară $\mathbb{R} \ni h \mapsto A \cdot h \in \mathbb{R}$ se notează cu $df(a)$ și se numește **diferențiala funcției** f **în punctul** a.
(ii) Spunem că f este **diferențiabilă pe** I dacă f este diferențiabilă în orice punct $a \in I$.

Derivata și diferențiala unei funcții reale

Teorema 1.3

Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis, atunci $f : I \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă în $a \in I$ dacă și numai dacă f este derivabilă în a. În acest caz,

$$df(a)(h) = f'(a) \cdot h, \quad \forall h \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Derivata și diferențiala unei funcții reale

Teorema 1.3

Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis, atunci $f : I \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă în $a \in I$ dacă și numai dacă f este derivabilă în a. În acest caz,

$$df(a)(h) = f'(a) \cdot h, \quad \forall h \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Observația 1.4

Să observăm că, în cazul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$, obținem din teorema anterioară că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$dx(h) = dg(x)(h) = g'(x) \cdot h = h, \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Folosind această relație și (3), vom scrie

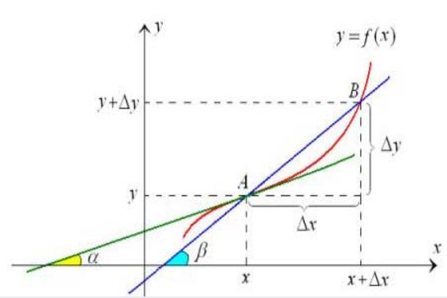
$$df(a) = f'(a) \cdot dx \tag{4}$$

ca egalitate de funcții. De asemenea, având în vedere egalitatea anterioară, uneori derivata unei funcții mai este notată și

$$f' = \frac{df}{dx}. \tag{5}$$

Interpretarea geometrică a derivatei și diferențialei

Fie AB dreapta ce trece prin punctele $(x, f(x))$ și $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. Dacă $A \to B$, adică $\Delta x \to 0$, atunci dreapta AB tinde către tangenta dusă în punctul $(x, f(x))$.



$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta = f'(x).$$

Figure: Interpretarea geometrică derivatei și diferențialei

Derivata poate fi interpretată ca fiind coeficientul unghiular al tangentei dusă în punctul $(x, f(x))$ la graficul funcției $y = f(x)$.

Alte interpretări ale derivatei

Interpretare cinematică a derivatei

Fie M un punct mobil pe Ox care la $t = 0$ pleacă din x_0 și care la momentul t are poziția dată de $x_M = x(t)$. Atunci $\dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{d}{t} = v$, viteza medie în (t_1, t_2). Când $t_2 \to t_1$, obținem viteza instantanee la momentul t_1.

Alte interpretări ale derivatei

Interpretare cinematică a derivatei

Fie M un punct mobil pe Ox care la $t = 0$ pleacă din x_0 și care la momentul t are poziția dată de $x_M = x(t)$. Atunci $\dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{d}{t} = v$, viteza medie în (t_1, t_2). Când $t_2 \to t_1$, obținem viteza instantanee la momentul t_1.

Interpretare fizică a derivatei

Fie o bară neomogenă cu secțiune constantă de arie 1 așezată cu un capăt în O și cu celălalt pe semiaxa pozitivă. Notăm $m(x)$ masa porțiunii dintre O și X. Atunci $m(x_2) - m(x_1)$ reprezintă masa porțiunii AB.
$\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{S \cdot l} \Rightarrow \rho_{AB} = \dfrac{m(x_2) - m(x_1)}{1 \cdot (x_2 - x_1)} = \dfrac{m(x_2) - m(x_1)}{x_2 - x_1}$, densitatea medie a porțiunii AB. Când $x_2 \to x_1$, obținem densitatea instantanee în x_1.

Alte interpretări ale derivatei

Interpretare cinematică a derivatei

Fie M un punct mobil pe Ox care la $t = 0$ pleacă din x_0 și care la momentul t are poziția dată de $x_M = x(t)$. Atunci $\dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{d}{t} = v$, viteza medie în (t_1, t_2). Când $t_2 \to t_1$, obținem viteza instantanee la momentul t_1.

Interpretare fizică a derivatei

Fie o bară neomogenă cu secțiune constantă de arie 1 așezată cu un capăt în O și cu celălalt pe semiaxa pozitivă. Notăm $m(x)$ masa porțiunii dintre O și X. Atunci $m(x_2) - m(x_1)$ reprezintă masa porțiunii AB.
$\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{S \cdot l} \Rightarrow \rho_{AB} = \dfrac{m(x_2) - m(x_1)}{1 \cdot (x_2 - x_1)} = \dfrac{m(x_2) - m(x_1)}{x_2 - x_1}$, densitatea medie a porțiunii AB. Când $x_2 \to x_1$, obținem densitatea instantanee în x_1.

Propoziția 1.5 (condiție necesară pentru derivabilitate)

Dacă funcția $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $a \in A' \cap A$, atunci f este continuă în a.

Derivate laterale

Definiția 1.6

(i) Spunem că funcția $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **are derivată la stânga în punctul** $a \in A'_s \cap A$ dacă există în $\overline{\mathbb{R}}$ limita

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{6}$$

Vom nota această limită cu $f'_s(a)$ și o vom numi **derivata la stânga** a funcției f în punctul a. Dacă $f'_s(a) \in \mathbb{R}$, vom spune că f este **derivabilă la stânga în** a**.**

Derivate laterale

Definiția 1.6

(i) Spunem că funcția $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **are derivată la stânga în punctul** $a \in A'_s \cap A$ dacă există în $\overline{\mathbb{R}}$ limita

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{6}$$

Vom nota această limită cu $f'_s(a)$ și o vom numi **derivata la stânga** a funcției f în punctul a. Dacă $f'_s(a) \in \mathbb{R}$, vom spune că f este **derivabilă la stânga în** a.
(ii) Spunem că funcția $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **are derivată la dreapta în punctul** $a \in A'_d \cap A$ dacă există în $\overline{\mathbb{R}}$ limita

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{7}$$

Vom nota această limită cu $f'_d(a)$ și o vom numi **derivata la dreapta** a funcției f în punctul a. Dacă $f'_d(a) \in \mathbb{R}$, vom spune că f este **derivabilă la dreapta în** a.

Derivate laterale

Definiția 1.6

(i) Spunem că funcția $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **are derivată la stânga în punctul** $a \in A'_s \cap A$ dacă există în $\overline{\mathbb{R}}$ limita

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{6}$$

Vom nota această limită cu $f'_s(a)$ și o vom numi **derivata la stânga** a funcției f în punctul a. Dacă $f'_s(a) \in \mathbb{R}$, vom spune că f este **derivabilă la stânga în** a.
(ii) Spunem că funcția $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **are derivată la dreapta în punctul** $a \in A'_d \cap A$ dacă există în $\overline{\mathbb{R}}$ limita

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{7}$$

Vom nota această limită cu $f'_d(a)$ și o vom numi **derivata la dreapta** a funcției f în punctul a. Dacă $f'_d(a) \in \mathbb{R}$, vom spune că f este **derivabilă la dreapta în** a.

Teorema 1.7

Funcția $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $a \in A'_s \cap A'_d \cap A$ dacă și numai dacă f este derivabilă la stânga și la dreapta în a și $f'_s(a) = f'_d(a)$. În acest caz derivatele laterale sunt egale și cu $f'(a)$.

Studiul derivabilității. Exemplu

Exemplul 1.8

Să se determine numerele reale a, b astfel încât funcțiile următoare să fie derivabile pe domeniul de definiție:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 0 \\ \ln(1 + 4x), & x > 0 \end{cases} .$$

Reguli de calcul pentru derivate

Propoziția 1.9 (Reguli de calcul pentru derivate)

Fie $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ *și* $a \in A \cap A'$. *Dacă* f *și* g *sunt derivabile în* a, *atunci funcțiile* $f + g$, αf, $f \cdot g$ *sunt derivabile în* a *și*

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a);\\ (\alpha f)'(a) &= \alpha f'(a);\\ (f \cdot g)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Dacă, în plus, $g(a) \neq 0$, *atunci funcția* $\dfrac{f}{g}$ *este derivabilă în* a *și*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Reguli de calcul pentru derivate

Teorema 1.10 (Derivabilitatea funcțiilor compuse)

Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ *intervale. Dacă funcția* $f : I \to J$, *este derivabilă în* $a \in I$, *iar funcția* $g : J \to \mathbb{R}$ *este derivabilă în punctul* $b := f(a) \in J$, *atunci compusa lor* $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ *este derivabilă în* a *și*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Reguli de calcul pentru derivate

Teorema 1.10 (Derivabilitatea funcțiilor compuse)

Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale. Dacă funcția $f : I \to J$, este derivabilă în $a \in I$, iar funcția $g : J \to \mathbb{R}$ este derivabilă în punctul $b := f(a) \in J$, atunci compusa lor $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a și

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Teorema 1.11 (Derivabilitatea funcției inverse)

Fie $I, J \subset \mathbb{R}$ intervale și funcția $f : I \to J$, continuă și bijectivă. Dacă f este derivabilă în $a \in I$ și $f'(a) \neq 0$, atunci funcția inversă $g = f^{-1}$ este derivabilă în $b = f(a) \in J$ și

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Tabel cu derivatele funcțiilor elementare

Funcția f	Derivata f'	Funcția f	Derivata f'
c	0	$\sin x$	$\cos x$
x	1	$\cos x$	$-\sin x$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x,\ a > 0$	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{x^2+1}$
$\log_a x,\ a > 0$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{x^2+1}$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$		

Minime și maxime

Definiția 1.12

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Spunem că $a \in A$ este:
(i) **punct de minim local** pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;

Minime și maxime

Definiția 1.12

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Spunem că $a \in A$ este:
(i) **punct de minim local** pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;

(ii) **punct de maxim local** pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \geq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;

Minime și maxime

Definiția 1.12

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Spunem că $a \in A$ este:
(i) **punct de minim local** pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;

(ii) **punct de maxim local** pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \geq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;

(iii) **punct de extrem local** pentru f dacă e punct de minim sau de maxim local;

Minime și maxime

Definiția 1.12

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Spunem că $a \in A$ este:
(i) **punct de minim local** pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;

(ii) **punct de maxim local** pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \geq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;

(iii) **punct de extrem local** pentru f dacă e punct de minim sau de maxim local;

(iv) **punct de minim global** pentru f dacă $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in A$;

Minime și maxime

Definiția 1.12

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Spunem că $a \in A$ este:
(i) **punct de minim local** pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;

(ii) **punct de maxim local** pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \geq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;

(iii) **punct de extrem local** pentru f dacă e punct de minim sau de maxim local;

(iv) **punct de minim global** pentru f dacă $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in A$;

(v) **punct de maxim global** pentru f dacă $f(a) \geq f(x)$, pentru orice $x \in A$;

Minime și maxime

Definiția 1.12

Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Spunem că $a \in A$ este:
(i) **punct de minim local** pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;

(ii) **punct de maxim local** pentru f dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \geq f(x)$, pentru orice $x \in A \cap V$;

(iii) **punct de extrem local** pentru f dacă e punct de minim sau de maxim local;

(iv) **punct de minim global** pentru f dacă $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in A$;

(v) **punct de maxim global** pentru f dacă $f(a) \geq f(x)$, pentru orice $x \in A$;

(vi) **punct de extrem global** pentru f dacă e punct de minim sau de maxim global.

Teorema lui Fermat

Teorema lui Fermat

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $a \in \overset{\circ}{I}$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a, iar a este punct de extrem local pentru f, atunci $f'(a) = 0$.

Teorema lui Fermat

Teorema lui Fermat

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $a \in \overset{\circ}{I}$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a, iar a este punct de extrem local pentru f, atunci $f'(a) = 0$.

Observația 1.13

1. Reciproca teoremei lui Fermat nu este adevarată: de exemplu derivata funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ se anulează în 0 fără ca acest punct să fie punct de extrem.

Teorema lui Fermat

Teorema lui Fermat

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $a \in \overset{\circ}{I}$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a, iar a este punct de extrem local pentru f, atunci $f'(a) = 0$.

Observația 1.13

1. Reciproca teoremei lui Fermat nu este adevarată: de exemplu derivata funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ se anulează în 0 fără ca acest punct să fie punct de extrem.

2. Condiția ca a să fie interior intervalului I este esentială, adică în lipsa acestei ipoteze concluzia nu se mai păstrează: de exemplu $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x$ are în $a = 0$ un punct de minim în care derivata nu se anulează.

Teorema lui Fermat

Teorema lui Fermat

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $a \in \overset{\circ}{I}$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este derivabilă în a, iar a este punct de extrem local pentru f, atunci $f'(a) = 0$.

Observația 1.13

1. Reciproca teoremei lui Fermat nu este adevarată: de exemplu derivata funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ se anulează în 0 fără ca acest punct să fie punct de extrem.

2. Condiția ca a să fie interior intervalului I este esențială, adică în lipsa acestei ipoteze concluzia nu se mai păstrează: de exemplu $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x$ are în $a = 0$ un punct de minim în care derivata nu se anulează.

3. Teorema lui Fermat precizează condiții necesare pentru ca un punct să fie de extrem local. Așa cum am văzut mai sus, aceste condiții nu sunt și suficiente. Deci, în aplicații, rezolvând ecuația $f'(x) = 0$ obținem așa-numitele **puncte critice,** care sunt candidații pentru punctele de extrem. Pentru a decide dacă un punct critic este și punct de extrem trebuie studiată variația funcției în jurul respectivului punct (a se vedea consecințele Teoremei lui Lagrange de mai jos).

Teoremele: Rolle, Lagrange, Cauchy

Teorema lui Rolle

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) (**funcție Rolle**) astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Teoremele: Rolle, Lagrange, Cauchy

Teorema lui Rolle

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) (**funcție Rolle**) astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Teorema lui Lagrange

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b). Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teoremele: Rolle, Lagrange, Cauchy

Teorema lui Rolle

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b) (**funcție Rolle**) astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Teorema lui Lagrange

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b). Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema lui Cauchy

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcții continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b) astfel încât $g'(x) \neq 0$, pentru orice $x \in (a, b)$. Atunci $g(b) - g(a) \neq 0$ și există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Consecințele Teoremei lui Lagrange

Consecințele Teoremei lui Lagrange asupra monotoniei

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \to \mathbb{R}$, derivabilă pe I.
(i) Dacă $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este constantă pe I.
(ii) Dacă $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I.
(iii) Dacă $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este crescătoare pe I.
(iv) Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I.
(v) Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este strict descrescătoare.

Consecințele Teoremei lui Lagrange

Consecințele Teoremei lui Lagrange asupra monotoniei

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \to \mathbb{R}$, derivabilă pe I.
(i) Dacă $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este constantă pe I.
(ii) Dacă $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I.
(iii) Dacă $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este crescătoare pe I.
(iv) Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I.
(v) Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este strict descrescătoare.

Consecință utilă la studiul derivabilității

Fie $I \subset \mathbb{R}$, un interval, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, f continuă. Dacă f este derivabilă pe $I \setminus \{a\}$ și există $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ (finită sau infinită), atunci există derivata funcției f în a, $f'(a)$, și

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x).$$

Consecințele Teoremei lui Lagrange

Consecințele Teoremei lui Lagrange asupra monotoniei

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval și $f : I \to \mathbb{R}$, derivabilă pe I.
(i) Dacă $f'(x) = 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este constantă pe I.
(ii) Dacă $f'(x) > 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este strict crescătoare pe I.
(iii) Dacă $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este crescătoare pe I.
(iv) Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este strict descrescătoare pe I.
(v) Dacă $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in I$, atunci f este strict descrescătoare.

Consecință utilă la studiul derivabilității

Fie $I \subset \mathbb{R}$, un interval, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, f continuă. Dacă f este derivabilă pe $I \setminus \{a\}$ și există $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ (finită sau infinită), atunci există derivata funcției f în a, $f'(a)$, și

$$f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x).$$

Exemplul 1.14

Studiați derivabilitatea funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x < 0 \\ x^3, \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Consecințele Teoremei lui Lagrange. Observații

Observația 1.15

Propoziția de mai sus precizează conditii suficiente, dar nu și necesare pentru existența derivatei în a. De exemplu, funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases} \tag{8}$$

este derivabilă conform definitiei în $x = 0$, dar nu putem aplica Propoziția 4 pentru a deduce derivabilitatea funcției f în 0.

Consecințele Teoremei lui Lagrange. Observații

Observația 1.15

Propoziția de mai sus precizează conditii suficiente, dar nu și necesare pentru existența derivatei în a. De exemplu, funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases} \tag{8}$$

este derivabilă conform definitiei în $x = 0$, dar nu putem aplica Propoziția 4 pentru a deduce derivabilitatea funcției f în 0.

Observația 1.16

În general, derivata unei funcții derivabile nu este continuă. De exemplu, funcția (8) este derivabilă pe $\mathbb{R}$, dar

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, x \neq 0, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

nu este continuă în 0.

Consecințele Teoremei lui Lagrange. Exemple

Exercițiul 1.17

Să se arate că f este constantă pe anumite intervale. Să se determine intervalele și valoarea efectivă a constantei:

$$f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} + \arccos x.$$

Consecințele Teoremei lui Lagrange. Exemple

Exercițiul 1.17

Să se arate că f este constantă pe anumite intervale. Să se determine intervalele și valoarea efectivă a constantei:

$$f(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2} + \arccos x.$$

Exercițiul 1.18

Să se demonstreze următoarele inegalități:

1. $\dfrac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \dfrac{b-a}{\cos^2 b}, \qquad 0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}.$
2. $e^x > x^e, x > 0.$

Regula lui L'Hôspital

Teorema 1.19 (Regula lui L'Hôspital)

Fie $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *iar* $a \in A'$. *Dacă:*
(i) f, g *sunt derivabile pe o vecinătate* V *a lui* a *cu* $g' \neq 0$ *pe* V;
(ii) există $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$;
(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ *sau (iii)'* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$,
atunci există

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{9}$$

Regula lui L'Hôspital

Teorema 1.19 (Regula lui L'Hôspital)

Fie $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *iar* $a \in A'$. *Dacă:*
(i) f, g *sunt derivabile pe o vecinătate* V *a lui* a *cu* $g' \neq 0$ *pe* V;
(ii) există $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$;
(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ *sau (iii)'* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$,
atunci există

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{9}$$

Observația 1.20

a poate fi $-\infty$ sau $+\infty$.

Regula lui L'Hôspital

Teorema 1.19 (Regula lui L'Hôspital)

Fie $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *iar* $a \in A'$. *Dacă:*
(i) f, g *sunt derivabile pe o vecinătate* V *a lui* a *cu* $g' \neq 0$ *pe* V;
(ii) există $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$;
(iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ *sau (iii)'* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$,
atunci există

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{9}$$

Observația 1.20

a poate fi $-\infty$ sau $+\infty$.

Exercițiul 1.21

Calculați limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x \cos x - 1}{\sin(\sin x)}.$$

Limite fundamentale

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e;$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1;$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a,\ a>0;$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1;$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = 1;$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$ (ix) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0;$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{a^x} = 0,\ n\in\mathbb{N},\ a>1.$ $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x = +\infty;$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x = -\infty;$

$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2};$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2};$ $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}\operatorname{tg} x = +\infty;$

$\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}}\operatorname{tg} x = -\infty.$

Limite fundamentale

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e;$ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,\ a>0;$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1;$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1;$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$ (ix) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0;$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{n^x}}{a^x} = 0,\ n\in\mathbb{N},\ a>1.$ $\lim\limits_{x\to\infty}\ln x = +\infty;$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x = -\infty;$

$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2};$ $\lim\limits_{x\to -\infty}\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2};$ $\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x<\pi/2}}\operatorname{tg} x = +\infty;$

$\lim\limits_{\substack{x\to\pi/2\\ x>\pi/2}}\operatorname{tg} x = -\infty.$

Eliminarea nedeterminărilor

Pentru eliminarea nedeterminărilor vom folosi, de cele mai multe ori, limitele de mai sus şi regula lui L'Hôspital.