Analiză matematică - curs 6
Diferenţiabilitate în $\mathbb{R}^k$

FACULTATEA DE MECANICĂ

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Definitii

Definiția 1.1

Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulțime deschisă.
(i) Spunem că funcția $f : A \to \mathbb{R}$ este **derivabilă de două ori în punctul** $a \in A$ (respectiv pe A) dacă f este derivabilă într-o vecinătate a punctului a și funcția derivată f' este derivabilă în a (respectiv pe A). În acest caz, derivata lui f' în a se numește **derivata a doua a lui** f **în** a și se notează $f''(a)$, sau $f^{(2)}(a)$.

Definitii

Definiția 1.1

Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulțime deschisă.
(i) Spunem că funcția $f : A \to \mathbb{R}$ este **derivabilă de două ori în punctul** $a \in A$ (respectiv pe A) dacă f este derivabilă într-o vecinătate a punctului a și funcția derivată f' este derivabilă în a (respectiv pe A). În acest caz, derivata lui f' în a se numește **derivata a doua a lui f în a** și se notează $f''(a)$, sau $f^{(2)}(a)$.
(ii) Spunem că funcția $f : A \to \mathbb{R}$ este **diferențiabilă de ordinul al doilea în punctul** $a \in A$, dacă f este derivabilă într-o vecinătate a punctului a și funcția derivată f' este diferențiabilă în a. În acest caz, funcția $d^2f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin

$$d^2f(a) = f''(a)(dx)^2 = f''(a)dx^2$$

sau, echivalent, prin

$$d^2f(a)(h) = f''(a) \cdot h^2, \ \forall h \in \mathbb{R}$$

se numește **diferențiala a doua a lui f în a**.

Definiții

Am arătat în cursul trecut că o funcție este derivabilă într-un punct dacă și numai dacă este diferențiabilă în acel punct. Aplicând acest rezultat funcției f' rezultă că o funcție este de două ori derivabilă în punctul a (respectiv pe A) dacă și numai dacă este diferențiabilă de ordinul al doilea în a (respectiv pe A).

Definiții

Am arătat în cursul trecut că o funcție este derivabilă într-un punct dacă și numai dacă este diferențiabilă în acel punct. Aplicând acest rezultat funcției f' rezultă că o funcție este de două ori derivabilă în punctul a (respectiv pe A) dacă și numai dacă este diferențiabilă de ordinul al doilea în a (respectiv pe A).

Definiția 1.2

Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulțime deschisă, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
(i) Spunem că f este **de n ori derivabilă în** $a \in A$ (respectiv pe A) dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă într-o vecinătate a punctului a și funcția derivată $f^{(n-1)}$ este derivabilă în a. În acest caz, derivata lui $f^{(n-1)}$ în a se numește **derivata de ordin n a lui f în** a și se notează $f^{(n)}(a)$.

Definiții

Am arătat în cursul trecut că o funcție este derivabilă într-un punct dacă și numai dacă este diferențiabilă în acel punct. Aplicând acest rezultat funcției f' rezultă că o funcție este de două ori derivabilă în punctul a (respectiv pe A) dacă și numai dacă este diferențiabilă de ordinul al doilea în a (respectiv pe A).

Definiția 1.2

Fie $A \subset \mathbb{R}$, o mulțime deschisă, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
(i) Spunem că f este **de n ori derivabilă în** $a \in A$ (respectiv pe A) dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă într-o vecinătate a punctului a și funcția derivată $f^{(n-1)}$ este derivabilă în a. În acest caz, derivata lui $f^{(n-1)}$ în a se numește **derivata de ordin n a lui f în** a și se notează $f^{(n)}(a)$.
(ii) Spunem că f este **de n ori diferențiabilă în** $a \in A$ (respectiv pe A) dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă într-o vecinătate a punctului a și funcția derivată $f^{(n-1)}$ este diferențiabilă în a (respectiv pe A). În acest caz, funcția $d^n f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin

$$d^n f(a) = f^{(n)}(a)(dx)^n = f^{(n)}(a)dx^n$$

sau, echivalent, prin

$$d^n f(a)(h) = f^{(n)}(a) \cdot h^n, \ \forall h \in \mathbb{R}$$

se numește **diferențiala de ordinul n a lui f în** a.

Definiții

Definiția 1.3

Fie $D \subset \mathbb{R}$ o mulțime deschisă și $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem că f este **de clasă $\mathcal{C}^n$ pe D** ($n \in \mathbb{N}^*$) dacă f este de n ori derivabilă pe D, iar derivata de ordin n, $f^{(n)}$, este continuă pe D. Notăm

$$\mathcal{C}^n(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ este de clasă } \mathcal{C}^n \text{ pe } A\}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

și, prin conventie,

$$\mathcal{C}^0(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă pe } A\}.$$

De asemenea, vom nota prin convenție $f^{(0)} = f$.
Spunem că f este de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe D dacă f este derivabilă de orice ordin pe D. Vom nota

$$\mathcal{C}^\infty(A) = \{f : A \to \mathbb{R}, \ f \text{ este de clasă } \mathcal{C}^\infty \text{ pe } A\}.$$

Definiții

Definiția 1.3

Fie $D \subset \mathbb{R}$ o mulțime deschisă și $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem că f este **de clasă $\mathcal{C}^n$ pe D** ($n \in \mathbb{N}^*$) dacă f este de n ori derivabilă pe D, iar derivata de ordin n, $f^{(n)}$, este continuă pe D. Notăm

$$\mathcal{C}^n(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ este de clasă } \mathcal{C}^n \text{ pe } A\}, \ \ n \in \mathbb{N}^*$$

și, prin conventie,

$$\mathcal{C}^0(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă pe } A\}.$$

De asemenea, vom nota prin convenție $f^{(0)} = f$.
Spunem că f este de clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe D dacă f este derivabilă de orice ordin pe D. Vom nota

$$\mathcal{C}^\infty(A) = \{f : A \to \mathbb{R}, \ f \text{ este de clasă } \mathcal{C}^\infty \text{ pe } A\}.$$

Teorema 1.4 (Formula lui Leibniz)

Fie $f, g : A \to \mathbb{R}$ de n ori derivabile în $a \in A$. Atunci $f \cdot g$ este de n ori derivabilă în a și are loc formula

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i f^{(i)}(a) g^{(n-i)}(a). \tag{1}$$

Formula lui Taylor

Polinomul lui Taylor

Fie

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

un polinom de grad n cu coeficienti reali ($a_n \neq 0$ și $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$). Dorim pentru început să arătăm că putem scrie polinomul de mai sus în mod unic în forma

$$P(x) = A_0 + A_1(x - a) + \ldots + A_n(x - a)^n$$

pentru un $a \in \mathbb{R}$ fixat. Un mod de a arăta acest lucru este următorul. Este clar că termenul liber A_0 este egal cu $P(a)$. Mai departe, prin derivare, obținem

Formula lui Taylor

Polinomul lui Taylor

Fie

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

un polinom de grad n cu coeficienti reali ($a_n \neq 0$ și $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$). Dorim pentru început să arătăm că putem scrie polinomul de mai sus în mod unic în forma

$$P(x) = A_0 + A_1(x - a) + \ldots + A_n(x - a)^n$$

pentru un $a \in \mathbb{R}$ fixat. Un mod de a arăta acest lucru este următorul. Este clar că termenul liber A_0 este egal cu $P(a)$. Mai departe, prin derivare, obținem

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x - a) + \ldots + A_n(x - a)^{n-1},$$

Formula lui Taylor

Polinomul lui Taylor

Fie

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

un polinom de grad n cu coeficienti reali ($a_n \neq 0$ și $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$). Dorim pentru început să arătăm că putem scrie polinomul de mai sus în mod unic în forma

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^n$$

pentru un $a \in \mathbb{R}$ fixat. Un mod de a arăta acest lucru este următorul. Este clar că termenul liber A_0 este egal cu $P(a)$. Mai departe, prin derivare, obținem

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^{n-1},$$

de unde $A_1 = P'(a)$.

Formula lui Taylor

Polinomul lui Taylor

Fie

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

un polinom de grad n cu coeficienti reali ($a_n \neq 0$ și $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$). Dorim pentru început să arătăm că putem scrie polinomul de mai sus în mod unic în forma

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^n$$

pentru un $a \in \mathbb{R}$ fixat. Un mod de a arăta acest lucru este următorul. Este clar că termenul liber A_0 este egal cu $P(a)$. Mai departe, prin derivare, obținem

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^{n-1},$$

de unde $A_1 = P'(a)$.În mod analog, derivând în continuare, obținem

$$A_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a), \text{ pentru } k = \overline{1, n}.$$

Formula lui Taylor

Polinomul lui Taylor

Fie

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

un polinom de grad n cu coeficienti reali ($a_n \neq 0$ și $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$). Dorim pentru început să arătăm că putem scrie polinomul de mai sus în mod unic în forma

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^n$$

pentru un $a \in \mathbb{R}$ fixat. Un mod de a arăta acest lucru este următorul. Este clar că termenul liber A_0 este egal cu $P(a)$. Mai departe, prin derivare, obținem

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^{n-1},$$

de unde $A_1 = P'(a)$.În mod analog, derivând în continuare, obținem

$$A_k = \frac{1}{k!} P^{(k)}(a), \text{ pentru } k = \overline{1, n}.$$

Asadar,

$$P(x) = P(a) + \frac{1}{1!} P'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Polinomul lui Taylor

Dorim acum să extindem formula precedentă la situația mai generală când în locul polinomului P avem o funcție $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis.

Polinomul lui Taylor

Dorim acum să extindem formula precedentă la situația mai generală când în locul polinomului P avem o funcție $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis. Vom numi polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

polinomul Taylor de ordin n asociat funcției f în punctul a.

Polinomul lui Taylor

Dorim acum să extindem formula precedentă la situația mai generală când în locul polinomului P avem o funcție $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis. Vom numi polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

polinomul Taylor de ordin n asociat funcției f în punctul a. Problema care se pune este în ce măsură acest polinom aproximează funcția f. Am văzut că în cazul în care f este un polinom de grad mai mic sau egal cu n, atunci $T_n = f$. Să notăm

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

pentru orice $x \in I$. Tocmai comportarea lui R_n măsoara gradul de aproximare al funcției f prin polinomul Taylor.

Polinomul lui Taylor

Dorim acum să extindem formula precedentă la situația mai generală când în locul polinomului P avem o funcție $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval deschis. Vom numi polinomul

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

polinomul Taylor de ordin n asociat funcției f în punctul a. Problema care se pune este în ce măsură acest polinom aproximează funcția f. Am văzut că în cazul în care f este un polinom de grad mai mic sau egal cu n, atunci $T_n = f$. Să notăm

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

pentru orice $x \in I$. Tocmai comportarea lui R_n măsoara gradul de aproximare al funcției f prin polinomul Taylor.

Polinomul lui Taylor

Teorema 1.5 (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange)

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ și $n \in \mathbb{N}$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție de $(n+1)$ ori derivabilă pe I, atunci pentru orice $x \in I$, $x \neq a$ există $c \in (x, a)$ sau $c \in (a, x)$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Polinomul lui Taylor

Teorema 1.5 (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange)

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ și $n \in \mathbb{N}$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcție de $(n+1)$ ori derivabilă pe I, atunci pentru orice $x \in I$, $x \neq a$ există $c \in (x, a)$ sau $c \in (a, x)$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Particularizând $a = 0$ se obtine formula lui MacLaurin.

Polinomul lui Taylor

Teorema 1.5 (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange)

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ şi $n \in \mathbb{N}$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de $(n+1)$ ori derivabilă pe I, atunci pentru orice $x \in I$, $x \neq a$ există $c \in (x, a)$ sau $c \in (a, x)$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Particularizând $a = 0$ se obtine formula lui MacLaurin.

Propoziţia 1.6 (Formula lui MacLaurin)

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $0 \in I$ şi $n \in \mathbb{N}$. Dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie de $(n+1)$ ori derivabilă pe I, atunci pentru orice $x \in I, x \neq 0$ există $c \in (x, 0)$ sau $c \in (0, x)$ astfel încât

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}.$$

Polinomul lui Taylor

Exemplul 1.7

În formula lui MacLaurin, cum $c \in (x, 0)$ sau $c \in (0, x)$ putem să luăm c de forma $c = \theta x$ unde $\theta \in (0, 1)$. Astfel se obțin dezvoltările de mai jos.

Polinomul lui Taylor

Exemplul 1.7

În formula lui MacLaurin, cum $c \in (x, 0)$ sau $c \in (0, x)$ putem să luăm c de forma $c = \theta x$ unde $\theta \in (0, 1)$. Astfel se obțin dezvoltările de mai jos.

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

Polinomul lui Taylor

Exemplul 1.7

În formula lui MacLaurin, cum $c \in (x, 0)$ sau $c \in (0, x)$ putem să luăm c de forma $c = \theta x$ unde $\theta \in (0, 1)$. Astfel se obțin dezvoltările de mai jos.

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sin \theta x.$$

Polinomul lui Taylor

Exemplul 1.7

În formula lui MacLaurin, cum $c \in (x, 0)$ sau $c \in (0, x)$ putem să luăm c de forma $c = \theta x$ unde $\theta \in (0, 1)$. Astfel se obțin dezvoltările de mai jos.

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sin \theta x.$$

Analog, pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ obținem

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x.$$

Polinomul lui Taylor

Exemplul 1.7

În formula lui MacLaurin, cum $c \in (x, 0)$ sau $c \in (0, x)$ putem să luăm c de forma $c = \theta x$ unde $\theta \in (0, 1)$. Astfel se obţin dezvoltările de mai jos.

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sin \theta x.$$

Analog, pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ obţinem

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \theta x.$$

3. Fie $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 1)$.

$$\ln(x+1) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

Aplicații

Formulele de mai sus pot fi folosite pentru determinarea unor limite.

Exercițiul 1.8

Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ există, este finită și nenulă limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{6 \sin x^3 + x^3(x^6 - 6)}{x^n}?$$

Aplicații

Formulele de mai sus pot fi folosite pentru determinarea unor limite.

Exercițiul 1.8

Pentru ce valori ale lui $n \in \mathbb{N}$ există, este finită și nenulă limita

$$\lim_{x \to 0} \frac{6 \sin x^3 + x^3(x^6 - 6)}{x^n}?$$

De asemenea, derivatele de ordin superior pot fi utile în determinarea punctelor de extrem.

Teorema 1.9 (Puncte de extrem)

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de n ori derivabilă în $a \in I$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$, astfel încât

$$f'(a) = 0, f''(a) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0. \tag{2}$$

(i) Dacă n este par, atunci a este punct de extrem, mai exact: punct de maxim local dacă $f^{(n)}(a) < 0$ și punct de minim local dacă $f^{(n)}(a) > 0$.
(ii) Dacă n este impar, atunci a nu este punct de extrem.

Corolarul 1.10

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție de 2 ori derivabilă în $a \in I$, astfel încât

$$f'(a) = 0, f''(a) \neq 0. \tag{3}$$

Dacă $f''(a) < 0$, a este punct de maxim local, iar dacă $f''(a) < 0$, a este punct de minim local.

Derivata după o direcție

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Se observă că

$$\phi(t) = f(x + tv), \;\; unde \; v \in \mathbb{R}^k, \;\; \|v\| = 1, \;\; t \in \mathbb{R}$$

este o funcție reală, de o variabilă reală.

Derivata după o direcţie

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Se observă că

$$\phi(t) = f(x + tv), \ \textit{unde} \ v \in \mathbb{R}^k, \quad \|v\| = 1, \ t \in \mathbb{R}$$

este o funcţie reală, de o variabilă reală.

Definiţie

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde D este un deschis din $\mathbb{R}^k$.

1. Numim **derivată a lui** f **în a după versorul** v

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + tv) - f(a)) \overset{not}{=} \frac{df}{dv}(a)$$

   ori de câte ori limita există.

2. Dacă $\frac{df}{dv}(a) \in \mathbb{R}$ vom spune că f este **derivabilă în** a **după versorul** v.

Derivata după o direcţie

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Se observă că

$$\phi(t) = f(x + tv),\ \textit{unde}\ v \in \mathbb{R}^k,\quad \|v\| = 1,\ t \in \mathbb{R}$$

este o funcţie reală, de o variabilă reală.

Definiţie

Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde D este un deschis din $\mathbb{R}^k$.

1. Numim **derivată a lui f în a după versorul** v

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a)) \overset{not}{=} \frac{df}{dv}(a)$$

ori de câte ori limita există.

2. Dacă $\frac{df}{dv}(a) \in \mathbb{R}$ vom spune că f este **derivabilă în a după versorul** v.

Observaţie

În loc de a spune că *funcţia f este derivabilă după versorul v* de multe ori se mai foloseşte expresia *funcţia f este derivabilă în direcţia v* deoarece $x = a + tv$ este ecuaţia dreptei care trece prin punctul a şi are direcţia v.

Derivata după o direcție

Exemplu

Fie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y = 0 \end{cases}$$

Derivata după o direcţie

Exemplu

Fie

$$f(x)=\begin{cases}\frac{xy}{x+y}, & x+y\neq 0\\ 0, & x+y=0\end{cases}$$

Această funcţie nu este continuă în origine. Fie $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ un versor oarecare. Avem:

Derivata după o direcție

Exemplu

Fie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y=0 \end{cases}$$

Această funcție nu este continuă în origine. Fie $v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$ un versor oarecare. Avem:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f((0,0)+tv)-f(0,0)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{tv_1\cdot tv_2}{tv_1+tv_2} = \frac{v_1v_2}{v_1+v_2}.$$

Derivata după o direcție

Exemplu

Fie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 0, & x+y = 0 \end{cases}$$

Această funcție nu este continuă în origine. Fie $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ un versor oarecare. Avem:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f((0,0)+tv) - f(0,0)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{tv_1 \cdot tv_2}{tv_1 + tv_2} = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Astfel, deși nu este continuă în (0,0), funcția f este derivabilă în origine pe orice direcție $v = (v_1, v_2)$ pentru care $v_1 + v_2 \neq 0$. Mai mult, dacă $v_1 + v_2 = 0$, $f(tv) = 0$ și atunci f este derivabilă în (0,0) și pe astfel de direcții.

Derivate parțiale

Definiție

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă și o funcție $f : D \to \mathbb{R}$.

1. Spunem că funcția f are **derivată parțială în raport cu variabila** x_i **în punctul a** dacă există derivata funcției f după direcția e_i, $e_i = (0, ...0, 1, 0...0)$, 1 aflându-se pe poziția i. Aceasta se notează fie cu $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sau $f'_{x_i}(a)$.

Derivate parțiale

Definiție

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă și o funcție $f : D \to \mathbb{R}$.

1. Spunem că funcția f are **derivată parțială în raport cu variabila** x_i **în punctul a** dacă există derivata funcției f după direcția e_i, $e_i = (0, ...0, 1, 0...0)$, 1 aflându-se pe poziția i. Aceasta se notează fie cu $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sau $f'_{x_i}(a)$.
2. Spunem că funcția f este **derivabilă parțial în raport cu variabila** x_i **în punctul** a dacă $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$.

Derivate parţiale

Observaţie

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{df}{de_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + t, ...a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{t}$$

Derivate parțiale

Observație

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{df}{de_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i)-f(a)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + t, ...a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{t}$$

adică a deriva parțial în raport cu o anumită variabilă revine la a deriva considerând toate celelalte variabile ca fiind niște constante.

Derivate parțiale

Exemplu

Să se calculeze derivatele parțiale ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x, y) = x \ln(xy), \qquad (x, y \in D = \{(x, y);\ xy > 0\})$$

Aplicând regulile uzuale de calcul cu derivate obținem:

Derivate parțiale

Exemplu

Să se calculeze derivatele parțiale ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x,y) = x \ln(xy), \qquad (x, y \in D = \{(x,y);\ xy > 0\})$$

Aplicând regulile uzuale de calcul cu derivate obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(xy) + 1$$

Derivate parțiale

Exemplu

Să se calculeze derivatele parțiale ale funcției $f : D \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x,y) = x\ln(xy), \qquad (x,y \in D = \{(x,y);\ xy > 0\})$$

Aplicând regulile uzuale de calcul cu derivate obținem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(xy) + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{y}$$

Derivate parțiale

Definiție

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă și o funcție $f : D \to \mathbb{R}$.

1. Spunem că f este derivabilă parțial pe D dacă este derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă, în orice punct al lui D.

Derivate parțiale

Definiție

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă și o funcție $f : D \to \mathbb{R}$.

1. Spunem că f este derivabilă parțial pe D dacă este derivabilă parțial în raport cu fiecare variabilă, în orice punct al lui D.
2. Spunem că f este de clasă C^1 pe D dacă f este derivabilă parțial pe D și toate derivatele sale parțiale $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1..k$ sunt continue pe D. În acest caz vom nota $f \in \mathcal{C}^1(D)$.

Derivate parţiale

Definiţie

Fie D un deschis din $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$ şi $F : D \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$, în care

$$F = (f_1, f_2, ..., f_m) \text{ cu } f_i : D \to \mathbb{R}, \ \ i = 1..m.$$

i. Spunem că F este **derivabilă parţial în** $a \in D$ dacă orice funcţie f_i este derivabilă parţial în a în raport cu toate variabilele $x_1, ..., x_k$.

Derivate parțiale

Definiție

Fie D un deschis din $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$ și $F : D \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$, în care

$$F = (f_1, f_2, ..., f_m) \ cu \ f_i : D \to \mathbb{R}, \ i = 1..m.$$

i. Spunem că F este **derivabilă parțial în** $a \in D$ dacă orice funcție f_i este derivabilă parțial în a în raport cu toate variabilele $x_1, ..., x_k$.
ii. Spunem că F este de clasă C^1 pe D dacă toate funcțiile f_i sunt de clasă C^1 pe D. Notăm $F \in \mathcal{C}^1(D)$.

Derivate parțiale

Dacă o funcție vectorială $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *cu* $f_i : D \to \mathbb{R},\ i = 1..m.$ este derivabilă parțial în punctul a în raport cu toate variabilele, definim **matricea Jacobiană a lui F în punctul a**

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$$

Derivate parțiale

Dacă o funcție vectorială $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ cu $f_i : D \to \mathbb{R},\ i = 1..m.$ este derivabilă parțial în punctul a în raport cu toate variabilele, definim **matricea Jacobiană a lui F în punctul a**

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$$

Observație

Dacă avem $k = m$, matricea $J_F(a)$ este pătratică iar determinantul $det\ J_F(a)$ se numește jacobianul sau determinantul funcțional al funcțiilor $f_1, \ldots, f_n$ în punctul a și se notează

$$det\ J_F(a) = \frac{D(f_1, \ldots, f_k)}{D(x_1, \ldots, x_k)}.$$

Derivate parțiale de ordinul 2

Definiție

Fie D un deschis din $\mathbb{R}^k$ și $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă parțial pe D. Fie

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, k$$

cele k derivate parțiale ale lui f.

1. Dacă există derivata parțială în $a \in D$ în raport cu x_j a funcției $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, atunci aceasta se va numi derivată parțială de ordinul 2 a funcției f în punctul a și se va nota prin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \textit{sau } f''_{x_i x_j}, \quad \textit{pentru} \quad i \neq j$$

și

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad \textit{sau } f''_{x_i^2} \quad \textit{pentru } i = j$$

(pentru $i \neq j$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ se numesc derivate parțiale mixte).

Derivate parțiale de ordinul 2

(Definiție - continuare)

2. Dacă derivatele de la punctul 1. sunt finite în orice punct din D, obținem funcțiile

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : D \to \mathbb{R} \; pentru \quad i \neq j \; resp.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} : D \to \mathbb{R} \; pentru \; i = j,$$

numite **derivate parțiale de ordin 2**.

Derivate parțiale de ordinul 2

(Definiție - continuare)

2. Dacă derivatele de la punctul 1. sunt finite în orice punct din D, obținem funcțiile

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : D \to \mathbb{R} \ pentru \ \ i \neq j \ resp.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} : D \to \mathbb{R} \ pentru \ i = j,$$

numite **derivate parțiale de ordin 2**.

3. Spunem că funcția f este de clasă C^2 pe D dacă este derivabilă parțial de ordinul doi pe D în raport cu toate variabilele și acestea sunt continue.

Derivate parțiale de ordinul 2

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \sin x_2$. Derivatele parțiale de ordinul 1 sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) =$$

Derivate parţiale de ordinul 2

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \sin x_2$. Derivatele parţiale de ordinul 1 sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sin x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) =$$

Derivate parţiale de ordinul 2

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \sin x_2$. Derivatele parţiale de ordinul 1 sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sin x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \cdot \cos x_2.$$

Derivatele parţiale de ordinul 2 sunt:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) =$

Derivate parțiale de ordinul 2

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \sin x_2$. Derivatele parțiale de ordinul 1 sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sin x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \cdot \cos x_2.$$

Derivatele parțiale de ordinul 2 sunt:

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) =$

Derivate parțiale de ordinul 2

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \sin x_2$. Derivatele parțiale de ordinul 1 sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sin x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \cdot \cos x_2.$$

Derivatele parțiale de ordinul 2 sunt:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2) = 0$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2) = \cos x_2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) =$

Derivate parțiale de ordinul 2

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \sin x_2$. Derivatele parțiale de ordinul 1 sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sin x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \cdot \cos x_2.$$

Derivatele parțiale de ordinul 2 sunt:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2) = 0$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2) = \cos x_2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2) = \cos x_2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) =$

Derivate parţiale de ordinul 2

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \sin x_2$. Derivatele parţiale de ordinul 1 sunt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sin x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \cdot \cos x_2.$$

Derivatele parţiale de ordinul 2 sunt:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2) = 0$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2) = \cos x_2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2) = \cos x_2$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2) = -x_1 \cdot \sin x_2$

Derivate parţiale de ordinul 2

Observaţie

1. În mod analog se pot defini derivatele parţiale de ordin $q, q \geq 2$ şi funcţiile de clasă C^q $q \geq 2$.

Derivate parțiale de ordinul 2

Observație

1. În mod analog se pot defini derivatele parțiale de ordin $q, q \geq 2$ și funcțiile de clasă C^q $q \geq 2$.
2. În exemplul de mai sus derivatele parțiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ sunt egale. Acest lucru nu este adevărat în general. A se analiza derivatele parțiale mixte de ordinul 2 pentru funcția

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Derivate parțiale de ordinul 2

Derivatele parțiale mixte sunt totuși egale, în anumite condiții:

Derivate parțiale de ordinul 2

Derivatele parțiale mixte sunt totuși egale, în anumite condiții:

(Teorema lui Schwartz)

Fie D un deschis din $\mathbb{R}^k$ și $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă f are derivatele parțiale mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $(i \neq j)$ într-o vecinătate a unui punct $a \in D$ și dacă funcțiile $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sunt continue în a, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Derivate parţiale de ordinul 2

Observaţie

Matricea care conţine toate derivatele parţiale de ordinul 2 ale unei funcţii $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (într-un punct $a \in D$)poartă numele de Hessiana funcţiei f (în punctul a):

Derivate parţiale de ordinul 2

Observaţie

Matricea care conţine toate derivatele parţiale de ordinul 2 ale unei funcţii $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (într-un punct $a \in D$)poartă numele de Hessiana funcţiei f (în punctul a):

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2}^2(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(a) \end{pmatrix}$$

Derivate parţiale de ordinul 2

Observaţie

Matricea care conţine toate derivatele parţiale de ordinul 2 ale unei funcţii $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (într-un punct $a \in D$)poartă numele de Hessiana funcţiei f (în punctul a):

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2}^2(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(a) \end{pmatrix}$$

Pentru o funcţie care satisface condiţiile teoremei lui Schwartz $H_f(a)$ este o matrice simetrică.