Analiză matematică - curs 7
Diferențiabilitate pentru funcții de mai multe variabile

Facultatea de Mecanică

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iași

Diferențiala unei funcții

Definiția 1.1

Spunem că $T : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^p$ este o **aplicație liniară,** sau un **operator liniar**, dacă satisface condițiile:
(AL_1) $T(x+y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k$;
(AL_2) $T(\lambda x) = \lambda T(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$.

Vom nota cu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^p)$ mulțimea aplicațiilor liniare definite între spațiile $\mathbb{R}^k$ și $\mathbb{R}^p$.

Diferențiala unei funcții

Definiția 1.1

Spunem că $T : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^p$ este o **aplicație liniară,** sau un **operator liniar**, dacă satisface condițiile:
(AL_1) $T(x+y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k$;
(AL_2) $T(\lambda x) = \lambda T(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$.

Vom nota cu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^p)$ mulțimea aplicațiilor liniare definite între spațiile $\mathbb{R}^k$ și $\mathbb{R}^p$.
În cele ce urmează, vom considera $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă.

Definiția 1.2

Funcția $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$ se numește **diferențiabilă** în $x \in D$ dacă există o aplicație liniară $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^p)$ astfel încât

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Th}{\|h\|} = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - T(y-x)}{\|y-x\|} = 0. \tag{1}$$

Operatorul T se numește **diferențiala** funcției f în punctul x și se notează cu $df(x)$.

Diferențiala unei funcții. Câteva comentarii

- Relația (1) este echivalentă cu următoarea condiție:

$$\begin{gathered}\exists \alpha : D \longrightarrow \mathbb{R}^p : \lim_{h \longrightarrow 0} \alpha(x+h) = \alpha(x) = 0, \\ f(x+h) = f(x) + Th + \|h\| \cdot \alpha(x+h) \quad \forall h \in D - \{x\}\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Diferențiala unei funcții. Câteva comentarii

- Relația (1) este echivalentă cu următoarea condiție:

$$\exists \alpha : D \longrightarrow \mathbb{R}^p : \lim_{h \longrightarrow 0} \alpha(x+h) = \alpha(x) = 0,$$
$$f(x+h) = f(x) + Th + \|h\| \cdot \alpha(x+h) \quad \forall h \in D - \{x\}. \tag{2}$$

- Relația (2) arată de fapt că f poate fi "bine aproximată" în jurul lui x de către funcția afină $h \mapsto f(x) + Th$, adică

$$f(x+h) \approx f(x) + Th.$$

Diferențiala unei funcții. Câteva comentarii

- Relația (1) este echivalentă cu următoarea condiție:

$$\exists \alpha : D \longrightarrow \mathbb{R}^p : \lim_{h \longrightarrow 0} \alpha(x+h) = \alpha(x) = 0,$$
$$f(x+h) = f(x) + Th + \|h\| \cdot \alpha(x+h) \quad \forall h \in D - \{x\}. \tag{2}$$

- Relația (2) arată de fapt că f poate fi "bine aproximată" în jurul lui x de către funcția afină $h \mapsto f(x) + Th$, adică

$$f(x+h) \approx f(x) + Th.$$

- O exprimare echivalentă se poate obține dacă folosim **notația lui Landau**: vom numi o funcție definită pe $\mathbb{R}^n$ cu valori reale **de tip** $o(h)$ dacă

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0.$$

  Atunci, folosind (2), diferențiabilitatea Fréchet a funcției f în x este echivalentă cu a spune că $f(x+h) - f(x) - Th = o(h)$, adică

$$f(x+h) = f(x) + Th + o(h). \tag{3}$$

Diferențiala unei funcții. Rezultate preliminarii

Teorema 1.3

Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$ definită pe mulțimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^k$ și $x \in D$.
(i) Dacă f este diferențiabilă în x, atunci diferențiala sa este unică.
(ii) Dacă f este diferențiabilă în x, atunci f este derivabilă în orice direcție v și

$$\frac{df}{dv}(x) = df(x)(v).$$

(iii) Dacă f este diferențiabilă în x, atunci f este continuă în x.

Diferențiala unei funcții. Rezultate preliminarii

Teorema 1.3

Fie $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p$ definită pe mulțimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^k$ și $x \in D$.
(i) Dacă f este diferențiabilă în x, atunci diferențiala sa este unică.
(ii) Dacă f este diferențiabilă în x, atunci f este derivabilă în orice direcție v și

$$\frac{df}{dv}(x) = df(x)(v).$$

(iii) Dacă f este diferențiabilă în x, atunci f este continuă în x.

Teorema 1.4

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă, $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ o funcție și $x \in D$. Atunci f este diferențiabilă în x dacă și numai dacă toate funcțiile componente $f_1, ., , , f_p : D \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt diferențiabile în x. În acest caz

$$df(x) = (df_1(x), ..., df_p(x)).$$

Interpretarea geometrică a diferențialei

Pentru o funcție $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ care este diferențiabilă într-un punct $a = (a_1, a_2)$, graficul funcției va admite un plan tangent în punctul $(a, f(a))$, ce are ecuația:

$$z - f(a) = df(a)(x - a_1, y - a_2).$$

Așadar, ca și în cazul funcțiilor reale de variabilă reală, graficul diferențialei $df(a)$ este translația acestui plan tangent la graficul funcției f în origine. Din nou, pentru puncte diferite din D în care f este diferențiabilă, planele tangente pot fi diferite. În concuzie, diferențiala definește, pentru fiecare punct în care există, câte o aplicație liniară, al cărei grafic este translația planului tangent dus în punctul corespunzător la graficul funției în origine.

Reguli de calcul pentru diferențiale. Regula lanțului

Teorema 1.5 (Reguli de calcul pentru diferențiale)

Fie mulțimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^k$, $x \in D$ și funcțiile $f, g : D \to \mathbb{R}^p$, $h : D \to \mathbb{R}$.
(i) Dacă f și g sunt diferențiabile în x, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g$ este diferențiabilă în x și

$$d(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha df(x) + \beta dg(x).$$

(ii) Dacă f și φ sunt diferențiabile în x, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\varphi \cdot f$ este diferențiabilă în x și

$$d(\varphi \cdot f)(x) = d\varphi(x) \cdot f(x) + \varphi(x) \cdot df(x).$$

Reguli de calcul pentru diferențiale. Regula lanțului

Teorema 1.5 (Reguli de calcul pentru diferențiale)

Fie mulțimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^k$, $x \in D$ și funcțiile $f, g : D \to \mathbb{R}^p$, $h : D \to \mathbb{R}$.
(i) Dacă f și g sunt diferențiabile în x, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g$ este diferențiabilă în x și

$$d(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha df(x) + \beta dg(x).$$

(ii) Dacă f și φ sunt diferențiabile în x, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\varphi \cdot f$ este diferențiabilă în x și

$$d(\varphi \cdot f)(x) = d\varphi(x) \cdot f(x) + \varphi(x) \cdot df(x).$$

Teorema 1.6 (Diferențierea funcțiilor compuse)

Fie mulțimile deschise $D \subset \mathbb{R}^k$, $\Delta \subset \mathbb{R}^p$, și funcțiile $f : D \to \Delta$, $g : \Delta \to \mathbb{R}^m$. Dacă f este diferențiabilă în $x \in D$, iar g este diferențiabilă în $y = f(x) \in \Delta$, atunci $g \circ f : D \to \mathbb{R}^m$ este diferențiabilă în x și

$$d(g \circ f)(x) = dg(y) \circ df(x). \tag{4}$$

Formule de calcul pentru diferențiale

Teorema 1.7

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă și $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă în x. Atunci f este derivabilă parțial în x și, pentru orice $v = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^k$, are loc formula

$$df(x)(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot v_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot v_k = \langle \nabla f(x), v \rangle . \tag{5}$$

Mai mult, putem scrie

$$df(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot dx_k, \tag{6}$$

unde prin dx_i s-a notat diferențiala aplicației de proiecție $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dată prin $\mathrm{pr}_i(x) := x_i$ pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Formule de calcul pentru diferențiale. Cazuri particulare. Exemplu

Observația 1.8

În cazurile $k = 2$ și $k = 3$ vom avea, pentru orice $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot dy,$$

$$df(x,y)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot h_2,$$

și respectiv, pentru orice $(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \cdot dz,$$

$$df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \cdot h_3.$$

Formule de calcul pentru diferențiale. Cazuri particulare. Exemplu

Observația 1.8

În cazurile $k = 2$ și $k = 3$ vom avea, pentru orice $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot dy,$$

$$df(x,y)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot h_2,$$

și respectiv, pentru orice $(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \cdot dz,$$

$$df(x,y,z)(h_1,h_2,h_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \cdot h_3.$$

Exercițiul 1.9

Calculați diferențiala funcției $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^y.$$

Formule de calcul pentru diferențiale în cazul vectorial

Teorema 1.10

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă și $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcție diferențiabilă în x. Atunci funcțiile componente $f_1, \ldots, f_k$ sunt derivabile parțial în x, iar matricea aplicației liniare $df(x)$ în bazele canonice din $\mathbb{R}^k$ și $\mathbb{R}^p$ este $J_f(x)$, **matricea jacobiană** *atașată funcției f în punctul x :*

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) & \ldots & \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(x) & \ldots & \frac{\partial f_p}{\partial x_k}(x) \end{bmatrix}$$

Cu alte cuvinte, pentru orice vector $h = (h_1, \ldots, h_k) \in \mathbb{R}^k$, vom avea

$$[df(x)(h)]^T = J_f(x) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Formule de calcul pentru diferențiale în cazul vectorial. Exemplu

Corolarul 1.11

În ipotezele Teoremei 1.6, are loc egalitatea

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(y) \cdot J_f(x). \tag{8}$$

Formule de calcul pentru diferențiale în cazul vectorial. Exemplu

Corolarul 1.11

În ipotezele Teoremei 1.6, are loc egalitatea

$$J_{g\circ f}(x) = J_g(y)\cdot J_f(x). \tag{8}$$

Exercițiul 1.12

Fie mulțimea $A := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq -2\right\}$ și funcțiile

$$f : A \to \mathbb{R}^3,\quad f(x,y) = \left(\sqrt{x}, \sqrt{x^2+3y^2}, \sqrt{y+2}\right),$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\quad g(u,v,w) = \left(u^2+v^2+2w^2, u^2-v^2\right),$$

$$h = g\circ f : A\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Notăm cu $a := (1,-1)\in A$ și cu $b := f(a) = (1,2,1)$.
Să se verifice că $dh(a) = dg(b)\circ df(a)$.

Criteriu de diferențiabilitate

Teorema 1.13 (Criteriu de diferențiabilitate)

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcție și $x \in D$. Dacă toate funcțiile componente $f_1, f_2, ..., f_p : D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile parțial pe o vecinătate $V \subset D$ a lui x și derivatele parțiale sunt continue în x, atunci f este Fréchet diferențiabilă în x.

Criteriu de diferențiabilitate

Teorema 1.13 (Criteriu de diferențiabilitate)

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcție și $x \in D$. Dacă toate funcțiile componente $f_1, f_2, ..., f_p : D \to \mathbb{R}$ sunt derivabile parțial pe o vecinătate $V \subset D$ a lui x și derivatele parțiale sunt continue în x, atunci f este Fréchet diferențiabilă în x.

Există funcții diferențiabile pentru care nu este îndeplinit criteriul dat de Teorema 1.13 (condițiile nu sunt necesare).

Exercițiul 1.14

Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este diferențiabilă în $(0,0)$ (pe $\mathbb{R}^2$), dar derivatele parțiale nu sunt continue în $(0,0)$.

Diferențiale de ordin superior

Definiția 1.15

Fie $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă și $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem că f este **diferențiabilă de ordinul** n **în** $x \in D$ dacă f este derivabilă parțial de ordinul $(n-1)$ pe o vecinătate $V \subset D$ a lui x, iar derivatele parțiale de ordinul $(n-1)$ sunt diferențiabile în x. În acest caz, numim **diferențială de ordin** n a funcției f în punctul x aplicația $d^n f(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dată prin

$$d^n f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot dx_k \right)^{(n)},$$

unde

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(n)} \quad \text{reprezintă} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}(x)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(n-1)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right) \quad \text{reprezintă} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_i^{n-1} \partial x_j}(x), \dots$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right)^{(\alpha_1)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right)^{(\alpha_2)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right)^{(\alpha_k)} \quad \text{reprezintă} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_k^{\alpha_k}}(x),$$

unde $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$.

Diferențiale de ordin superior

Observația 1.16

În baza formulei de mai sus rezultă că, în cazul $n = 2$, diferențiala de ordinul II a funcției f va avea formula

$$\begin{aligned} d^2 f(x) &= \sum_{1 \le i,j \le k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot dx_i \cdot dx_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) \cdot (dx_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot dx_i \cdot dx_j \end{aligned} \tag{9}$$

sau, pentru orice $h = (h_1, ..., h_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$d^2 f(x)(h) = \sum_{1 \le i,j \le k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot h_i \cdot h_j.$$

Diferențiale de ordin superior. Cazuri particulare

Observația 1.17

Ca de obicei, vom particulariza în cazurile $k = 2$ și $k = 3$. Vom avea astfel, pentru $k = 2$

$$d^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \cdot (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \cdot (dy)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

și, pentru $k = 3$,

$$d^2 f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \cdot (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) \cdot (dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \cdot (dz)^2$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) \cdot dx \cdot dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) \cdot dx \cdot dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \cdot dy \cdot dz.$$

Diferențiale de ordin superior. Cazuri particulare

Observația 1.17

Ca de obicei, vom particulariza în cazurile $k = 2$ și $k = 3$. Vom avea astfel, pentru $k = 2$

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \cdot (dy)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \cdot dx \cdot dy$$

și, pentru $k = 3$,

$$d^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) \cdot (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) \cdot (dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \cdot (dz)^2$$
$$+ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) \cdot dx \cdot dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \cdot dx \cdot dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \cdot dy \cdot dz.$$

Exercițiul 1.18

Să se scrie diferențiala de ordinul II a funcției $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^y$$

în punctul $(1,2)$, aplicată în $(-3,2)$.

Funcții de clasă C^n

Definiția 1.19

Spunem că f este **de clasă $\mathcal{C}^1$ pe mulțimea** D dacă f este diferențiabilă pe D și df este continuă pe D. Inductiv, vom spune că f este **de clasă C^n pe mulțimea** D dacă f este diferențiabilă de ordin n pe D și $d^n f$ este continuă pe D. Vom nota

$$\mathcal{C}^n(D) = \{f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p \mid f \text{ este de clasă } \mathcal{C}^n \text{ pe } D\}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

și, prin conventie,

$$\mathcal{C}^0(D) = \{f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p \mid f \text{ continuă pe } D\}.$$

Spunem că f este de **clasă $\mathcal{C}^\infty$ pe mulțimea** D dacă f este diferențiabilă de orice ordin pe D. Vom nota

$$\mathcal{C}^\infty(D) = \{f : D \longrightarrow \mathbb{R}^p, \ f \text{ este de clasă } \mathcal{C}^\infty \text{ pe } D\}.$$

Formula lui Taylor

Pentru două puncte $a, b \in \mathbb{R}^k$, vom nota cu $[a, b]$ segmentul închis de extremități a, b,

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Să formulăm acum extinderea Teoremei lui Taylor la cazul funcțiilor de variabilă vectorială.

Teorema 1.20 (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange)

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă și $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă de ordin $n + 1$ pe D și punctele distincte $a, x \in D$ astfel încât $[a, x] \subset D$. Atunci există $c \in (a, x)$ astfel încât

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)(x-a) + \frac{1}{2!}d^2f(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nf(a)(x-a) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(c)(x-a). \tag{10}$$