Analiză matematică - curs 8
Aplicații ale calculului diferențial. Puncte de extrem

Facultatea de Mecanică

Universitatea Tehnică "Gh. Asachi", Iași

Puncte de extrem

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime dechisă nevidă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție și $M \subset D$ o mulțime nevidă.

Definiția 1.1

Spunem că $a \in M$ este:
(i) **punct de minim local** pentru f **pe mulțimea** M dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in M \cap V$;
(ii) **punct de maxim local** pentru f **pe mulțimea** M dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \geq f(x)$, pentru orice $x \in M \cap V$;
(iii) **punct de extrem local** pentru f **pe mulțimea** M dacă e punct de minim sau de maxim local.

- Dacă $M = D$ în definiția de mai sus, vom spune că punctul a este **punct de minim** (respectiv, **maxim, extrem**) **local** pentru f.
- În cazul în care în definiția de mai sus $V = \mathbb{R}^k$, vom spune că punctul a este **punct de minim** (respectiv, **maxim, extrem**) **global** pentru f pe M.

Teorema lui Fermat. Condiții necesare de extrem

Teorema 1.2 (Fermat)

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă și $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă în $a \in D$. Dacă a este punct de extrem local pentru f, atunci a este **punct critic**, *adică*

$$df(a) = 0.$$

Teorema lui Fermat. Condiții necesare de extrem

Teorema 1.2 (Fermat)

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă și $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă în $a \in D$. Dacă a este punct de extrem local pentru f, atunci a este **punct critic**, *adică*

$$df(a) = 0.$$

Observația 1.3

Teorema lui Fermat oferă, ca în cazul scalar, condiții necesare pentru ca un punct să fie de extrem local. Aceste condiții nu sunt suficiente: fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := x^2 - y^2$. Atunci $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$, deci $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ și $df(0, 0) = 0$. Totuși, pentru orice $\varepsilon > 0$, vom avea

$$f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 > 0 = f(0, 0) \text{ și}$$

$$f(0, \varepsilon) = -\varepsilon^2 < 0 = f(0, 0),$$

ceea ce arată că $(0, 0)$ nu este punct de extrem local.
Mai mult, dacă notăm $(a, b) := (0, 0)$, vom avea

$$f(a, y) \le f(a, b) \le f(x, b), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Un punct (a, b) care verifică o relație de tip (1) pe o vecinătate a sa se numește **punct șa pentru** f. Așadar, în cazul nostru, $(0, 0)$ este punct șa pentru funcția f.

Condiții suficiente de extrem

Pentru a determina punctele critice, sau **staționare**, trebuie deci să rezolvăm sistemul de ecuații

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Punctele de extrem se află printre soluțiile acestui sistem. Pentru a putea decide care dintre punctele staționare este punct de extrem vom folosi următorul rezultat:

Teorema 1.4 (Condiții suficiente de ordinul II)

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulțime deschisă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathcal{C}^2$ pe D și $a \in D$ astfel încât $df(a) = 0$. Dacă:
(i) $d^2f(a)$ este pozitiv definită, adică $d^2f(a)(h) > 0$, pentru orice $h \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, atunci a este punct de minim local pentru f;
(ii) $d^2f(a)$ este negativ definită, adică $d^2f(a)(h) < 0$, pentru orice $h \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, atunci a este punct de maxim local pentru f;
(iii) $d^2f(a)$ este nedefinită, adică există $x, y \in \mathbb{R}^k$ astfel încât $d^2f(a)(x) > 0$ și $d^2f(a)(y) < 0$, atunci a nu este punct de extrem pentru f.

Condiții suficiente de extrem

Putem folosi uneori următoarea variantă:

Teorema 1.5

Fie f o funcție de clasă C^2 pe un deschis $D \subset \mathbb{R}^n$ și $a \in D$ un punct critic. Fie H matricea hessiană în care vom nota, pentru ușurința scrierii $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \alpha_{ij}$.

1. *Dacă toate numerele*

$$\Delta_1 = \alpha_{11} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

   sunt strict pozitive, atunci $d^2 f(a)$ este pozitiv definită și a este punct de minim local;

2. *Dacă toate numerele*

$$-\Delta_1, \quad \Delta_2, \ldots, (-1)^n \Delta_n$$

   sunt strict pozitive, atunci $d^2 f(a)$ este negativ definită și a este punct de maxim local.

Condiții suficiente de extrem. Cazul funcțiilor de două variabile

Pentru funcții de două variabile, Teorema 1.4 poate fi pusă sub forma:

Teorema 1.6

Fie f o funcție de clasă C^2 pe un deschis $D \subset \mathbb{R}^n$ și $a \in D$ un punct critic pentru f.

Notăm $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. *Dacă:*

1. $B^2 - AC < 0$ *și* $A > 0$, *atunci a este punct de minim local.*
2. $B^2 - AC < 0$ *și* $A < 0$, *atunci a este punct de maxim local.*
3. $B^2 - AC > 0$, *atunci a nu este punct de extrem.*

Observația 1.7

Dacă $B^2 - AC = 0$ nu ne putem pronunța dacă a este punct de extrem sau nu. În acest caz trebuie să studiem diferențialele de ordin superior ale lui f.

Exemplu

Exemplul 1.8

Să se determine punctele de extrem ale funcției

$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz.$$

Exemplu

Exemplul 1.8

Să se determine punctele de extrem ale funcției

$$f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz.$$

Avem, mai întâi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2x \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4z + 2x.$$

Rezolvând sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \; \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \; \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

găsim $a = (0,0,0)$ ca singurul punct staționar.

Exemplu

Exemplul 1.8

Să se determine punctele de extrem ale funcției

$$f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz.$$

Avem, mai întâi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2x \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4z + 2x.$$

Rezolvând sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \; \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \; \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

găsim $a = (0,0,0)$ ca singurul punct staționar. Construim mai departe matricea hessiană calculând derivatele parțiale de ordinul 2 și obținem

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se calculează imediat $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 12 > 0$, $\Delta_3 = 8 > 0$ ceea ce spune că $d^2 f(0,0,0)$ este pozitiv definită, deci $(0,0,0)$ este punct de minim local.

Alte exemple

Exercițiul 1.9

Determinați extremele locale libere ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x, y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Alte exemple

Exercițiul 1.9

Determinați extremele locale libere ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Punctele critice: $\theta = (0,0)$, $a = (-1,-1)$, $b = (1,1)$.

Alte exemple

Exercițiul 1.9

Determinați extremele locale libere ale funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Punctele critice: $\theta = (0,0)$, $a = (-1,-1)$, $b = (1,1)$.
θ nu este punct de extrem, a este punct de minim local, b este punct de minim local.

Alte exemple

Exercițiul 1.9

Determinați extremele locale libere ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x, y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Punctele critice: $\theta = (0, 0)$, $a = (-1, -1)$, $b = (1, 1)$.
θ nu este punct de extrem, a este punct de minim local, b este punct de minim local.

Exercițiul 1.10

Găsiți extremele locale libere ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := (ax^2 + by^2 + cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2},$$

unde $a > b > c > 0$ sunt parametri fixați.

Alte exemple

Exercițiul 1.9

Determinați extremele locale libere ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x, y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Punctele critice: $\theta = (0, 0)$, $a = (-1, -1)$, $b = (1, 1)$.
θ nu este punct de extrem, a este punct de minim local, b este punct de minim local.

Exercițiul 1.10

Găsiți extremele locale libere ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := (ax^2 + by^2 + cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2},$$

unde $a > b > c > 0$ sunt parametri fixați.
Puncte critice $(0, 0, 0), (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$.

Alte exemple

Exercițiul 1.9

Determinați extremele locale libere ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Punctele critice: $\theta = (0,0)$, $a = (-1,-1)$, $b = (1,1)$.
θ nu este punct de extrem, a este punct de minim local, b este punct de minim local.

Exercițiul 1.10

Găsiți extremele locale libere ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) := (ax^2 + by^2 + cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2},$$

unde $a > b > c > 0$ sunt parametri fixați.
Puncte critice $(0,0,0), (\pm 1,0,0), (0,\pm 1,0), (0,0,\pm 1)$.
$(0,0,0)$ este punct de minim local, $(\pm 1,0,0)$ sunt puncte de maxim local, $(0,\pm 1,0)$, $(0,0,\pm 1)$ nu sunt puncte de extrem.