CURS 1, Analiză matematică, semestrul I, 2014–2015

1 Verificare

70% teza scrisă (35% parţial săptămâna a 9-a, care se ia în considerare la final, daca nota este ≥ 5)
20% activitatea seminar
10% studiu individual

2 Bibliografie

Manuale AM clasele XI-XII (Năstăsescu et. al.).

Cursuri în limba română

I. Crăciun, *Calcul integral*, Editura PIM, Iaşi, 2007.

P. Georgescu, *Elemente de calcul diferenţial pe dreapta reală*, MATRIX ROM, 2012.

R. Luca-Tudorache, *Analiză matematică*, Ed. Tehnopress, Iaşi, 2005.

A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, 1998.

Gh. Procopiuc, *Matematică*, Editura UTI, Iaşi, 1999.

M. Roşculeţ, *Analiză Matematică*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973.

M. Nicolescu, *Analiză matematică*, Vol. I şi II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

R. Strugariu, *Analiză matematică. Calcul diferenţial*, Editura Performantica, Iaşi, 2013.

Cursuri în limba engleză

W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill Inc., 1976.

G. Strang, *Calculus*, Wellesley-Cambridge Press, 1991.

Culegeri

L. Aramă, T. Morozan, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1978

Gh. Bucur, E. Câmpu, S. Găină, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, vol.II, III, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1978.

S. Chiriţă, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1989.

I. Nistor, *Probleme de analiză matematică*, vol. I, II, Editura Cermi, 2003.

Pentru avansaţi

T.M. Apostol, *Mathematical Analysis,* Second Edition*,* Addison-Wesley Pub. Co., 1974.

V. Pop et al., *Teme şi probleme pentru concursurile studenţeşti de matematică*, Vol. II, Editura StudIS, 2013.

Web

http://math.etc.tuiasi.ro/rstrugariu/cursuri.html

3 Mulţimea numerelor reale

Toate noţiunile care vor fi discutate în acest curs vor fi dezvoltate pornind de la mulţimea numerelor reale, notată cu $\mathbb{R}$. Există mai multe modele ale mulţimii numerelor reale: al lui Dedekind, bazat pe noţiunea de tăietură, al lui Weierstrass, care foloseşte noţiunea de fracţie zecimală, modelul lui Cantor, care are la bază noţiunea de şir fundamental de numere raţionale. Astfel, $\mathbb{R}$ este un corp total ordonat şi complet, unic determinat până la un izomorfism de corpuri total ordonate. Presupunem cunoscute proprietăţile operaţiilor de adunare şi înmulţire a numerelor reale, care asigură structura de corp a lui $\mathbb{R}$ şi de asemenea cele ale relaţiei de ordine. Proprietatea de completitudine a mulţimii numerelor reale o vom enunţa la momentul potrivit.

În continuare vom nota prin:

- $\mathbb{R}_+$ – mulţimea numerelor pozitive;
- $\mathbb{R}_+^*$ – mulţimea numerelor strict pozitive;
- $\mathbb{R}_-$ – mulţimea numerelor negative;
- $\mathbb{R}_-^*$ – mulţimea numerelor strict negative.

Cu aceste notaţii, putem scrie $\mathbb{R} = \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_-$, unde $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$.

Fie a şi b două numere reale astfel încât $a < b$. Definim următoarele mulţimi:

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, numit **interval deschis**;
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, numit **interval închis**;
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$, numit **interval deschis în a, închis în b**;
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, numit **interval închis în a, deschis în b**.

Spunem despre intervalele definite mai sus că sunt **intervale mărginite**. De asemenea, definim şi următoarele tipuri de **intervale nemărginite**:

- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$;
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$;
- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$;
- $[a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$;
- $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$.

Se remarcă faptul că o mulţime de numere reale este interval dacă odată cu două elemente distincte ale sale conţine şi orice număr real situat între acestea.

Definiţia 3.1 *Fie A o mulţime de numere reale.*

1. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ aşa încât $a \leq \alpha$ pentru orice $a \in A$, vom spune despre mulţimea A că este ***mărginită superior****, iar despre α că este un* ***majorant*** *pentru A. În caz contrar, spunem despre mulţimea A că este* ***nemărginită superior****.*

2. Dacă există $\beta \in \mathbb{R}$ aşa încât $\beta \leq a$ pentru orice $a \in A$ vom spune despre mulţimea A că este ***mărginită inferior****, iar despre β că este un* ***minorant*** *pentru A. În caz contrar, spunem despre mulţimea A că este* ***nemărginită inferior****.*

3. Dacă pentru A există şi majoranţi şi minoranţi, spunem că A este o ***mulţime mărginită****.*

Exemplul 3.2 *1. $\mathbb{N}$ este o mulţime mărginită inferior de orice număr negativ, dar este nemărginită superior.*

2. $\mathbb{Z}$ este nemărginită, atât inferior cât şi superior.

3. Pentru intervalul $I = [a, b)$ observăm că orice număr real cel puţin egal cu b este un majorant în vreme ce orice număr cel mult egal cu a este un minorant, deci I este o mulţime mărginită. Observăm de asemenea că putem da exemple de mulţimi pentru care un majorant (minorant) este un element al mulţimii. Remarcăm totuşi că există şi mulţimi care nu conţin nici majoranţi, nici minoranţi ca elemente ale mulţimii: intervalele deschise (a, b).

4. Pentru mulţimea $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$, numărul 1 este un majorant, iar 0 este un minorant.

Definiţia 3.3 *Fie $A \subset \mathbb{R}$. Spunem despre un număr real M că este* ***marginea superioară*** *a mulţimii A, sau* ***supremum*** *al mulţimii A, şi notăm $M = \sup A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) M este un majorant al mulţimii A:

$$a \leq M, \ \forall a \in A;$$

(ii) M este mai mic decât orice alt majorant al mulţimii A:

$$(a \leq M', \forall a \in A) \Rightarrow M \leq M'.$$

Spunem despre un număr real m că este ***marginea inferioară*** *a mulţimii A, sau* ***infimum*** *al mulţimii A, şi notăm $m = \inf A$, dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

(i) m este un minorant al mulţimii A:

$$m \leq a, \ \forall a \in A;$$

(ii) m este mai mare decât orice alt minorant al mulţimii A:

$$(m' \leq a, \forall a \in A) \Rightarrow m' \leq m.$$

Următoarele rezultate caracterizează marginea superioară, respectiv marginea inferioară a unei mulţimi de numere reale.

Teorema 3.4 *Fie $A \subset \mathbb{R}$, nevidă şi $M \in \mathbb{R}$. Atunci $M = \sup A$ dacă şi numai dacă:*

(i) $a \leq M$, $\forall a \in A$ şi

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, există un element $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Demonstraţie. Fie $M = \sup A$. Conform definiţiei, este un majorant, deci prima condiţie este îndeplinită.

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece $M - \varepsilon < M$, $M - \varepsilon$ nu este un majorant pentru A. Deci, relaţia $a \leq M - \varepsilon$ nu are loc pentru orice $a \in A$ şi, astfel, există $x_\varepsilon \in A$ astfel încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Reciproc, dacă $M \in \mathbb{R}$ îndeplineşte condiţiile din enunţ, observăm în primul rând că este un majorant al mulţimii A (condiţia (i)). Fie acum un alt majorant, M', al mulţimii A şi să presupunem că $M' < M$. Notăm cu $\varepsilon := \frac{M-M'}{2}$. Din (ii), rezultă că există $x_\varepsilon \in A$ aşa încât $M - \varepsilon < x_\varepsilon$, adică $\frac{M+M'}{2} < x_\varepsilon$. Dar $M < \frac{M+M'}{2}$ şi atunci $M < x_\varepsilon$, ceea ce contrazice condiţia (i). Deci, presupunerea făcută este falsă şi atunci $M \leq M'$, ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Observaţia 3.5 *Conform acestei teoreme, dacă* $M = \sup A$, *pentru orice număr natural nenul* n *există* $x_n \in A$ *astfel încât* $0 < M - x_n < \frac{1}{n}$.

În mod analog se poate demonstra următorul rezultat, care caracterizează marginea inferioară a unei mulţimi:

Teorema 3.6 *Fie* $A \subset \mathbb{R}$, *nevidă şi* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Atunci* $m = \inf A$ *dacă şi numai dacă:*
(i) $m \leq a, \forall a \in A$ *şi*
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$, *există un element* $x_\varepsilon \in A$ *astfel încât* $x_\varepsilon < m + \varepsilon$.

Observaţia 3.7 *Dacă* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *atunci* $\sup(a, b) = b$, $\inf(a, b] = a$ *etc.*

Observaţia 3.8 *Dacă* $A = \left\{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q^2 \leq 2\right\}$ *atunci* $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ *iar* $\inf A = 0$. *Deşi* $\mathbb{Q}$ *este un corp total ordonat, el nu este complet în sensul precizat de următoarea axiomă.*

Axioma de completitudine (Cantor - Dedekind). Orice submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$ care este majorată admite cel puţin o margine superioară în $\mathbb{R}$, adică există $\sup A \in \mathbb{R}$.

Propoziţia 3.9 *Orice submulţime nevidă, minorată a lui* $\mathbb{R}$ *admite margine inferioară în* $\mathbb{R}$.

Teorema 3.10 (Proprietatea lui Arhimede) *Dacă* x *şi* y *sunt numere reale strict pozitive, atunci există* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $nx > y$.

Demonstraţie. Presupunem că are loc contrariul: pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem $nx \leq y$. Atunci, mulţimea $A := \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ este majorată de y şi deci, conform axiomei de completitudine, are margine superioară în $\mathbb{R}$. Fie $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$. Pentru $\varepsilon := x > 0$, există un element de forma $kx \in A$ astfel încât $\alpha - \varepsilon < kx$ sau, echivalent, $\alpha < kx + x = (k+1)x$. Dar $(k+1)x \in A$ şi astfel relaţia $\alpha < (k+1)x$ contrazice faptul că α este marginea superioară a lui A. Presupunerea făcută este deci falsă şi există $n \in \mathbb{N}$ cu $nx > y$. □

Observaţia 3.11 *1. Aplicând Proprietatea lui Arhimede pentru* $x := \varepsilon > 0$ *oarecare şi* $y := 1$, *obţinem că există* $n \in \mathbb{N}^*$ *astfel încât* $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. *De aici rezultă că* $\inf \left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\} = 0$.

2. Aplicând Proprietatea lui Arhimede pentru $x := 1$ *şi* $y := a > 0$, *obţinem că există* $n \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $a < n$.

Teorema 3.12 (Densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$) *Între orice două numere reale distincte se află cel puţin un număr raţional.*

Demonstraţie. Fie x şi y numere reale cu $x \neq y$. Pentru a fixa lucrurile, să presupunem că $x < y$. Trebuie să arătăm că există $r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x < r < y$. Deoarece $y - x > 0$, conform Proprietăţii lui Arhimede există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\frac{1}{n} < y - x. \tag{1}$$

Fie $m := [x]$, partea întreagă a lui x. Atunci $m - 1 \leq nx < m$ sau, împărţind această relaţie prin n:

$$\frac{m}{n} - \frac{1}{n} < x < \frac{m}{n}. \tag{2}$$

Combinând acum relaţiile (2) şi (1), obţinem:

$$x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y.$$

Numărul raţional căutat este $r = \dfrac{m}{n}$. $\square$

Teorema 3.13 (Densitatea lui $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$) *Între orice două numere reale distincte se află cel puţin un număr iraţional.*

Demonstraţie. Fie $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Folosind densitatea lui $\mathbb{Q}$ în $\mathbb{R}$, putem găsi $p \in \mathbb{Q}$ astfel încât $x < p < y$. Folsind Proprietatea lui Arhimede, găsim că, pentru $n \in \mathbb{N}^*$ suficient de mare, $x < p + \frac{\sqrt{2}}{n} < y$. Cum $p + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, rezultă concluzia. $\square$

4 Dreapta reală încheiată

În secţiunea anterioară am observat că există submulţimi ale lui $\mathbb{R}$ minorate dar nemajorate ($\mathbb{N}$) sau invers, respectiv altele care nu sunt nici majorate, nici minorate ($\mathbb{Z}$). Pentru a evita această situaţie (dar şi din alte motive) se face convenţia de a adăuga mulţimii $\mathbb{R}$ două elemente care nu fac parte din $\mathbb{R}$, notate cu $+\infty$ şi $-\infty$. Mulţimea $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ o vom nota cu $\overline{\mathbb{R}}$ şi o vom numi **dreapta reală încheiată** sau **compactificată**. Vom prelungi ordinea uzuală a lui $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$ prin:

$$-\infty < x, \quad x < +\infty, \quad -\infty < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

În acest fel, $\overline{\mathbb{R}}$ devine o mulţime total ordonată.

De asemenea, prelungim şi operaţiile algebrice din $\mathbb{R}$ la $\overline{\mathbb{R}}$, fără a fi însă definite peste tot:
$x + \infty = \infty + x = \infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$
$x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$
$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty$, pentru $x > 0$ şi $x \in \overline{\mathbb{R}}$
$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty$, pentru $x < 0$ şi $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Următoarele operaţii sunt nedefinite (se mai numesc şi **nedeterminări**, şi vor fi reluate mai târziu):

$$\infty + (-\infty), \quad (-\infty) + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este o mulţime nevidă, majorată, atunci $\sup A \in \mathbb{R}$, conform axiomei de completitudine. Dacă A nu este majorată, atunci vom pune, prin definiţie, $\sup A := +\infty$, iar daca A nu este minorată, vom pune $\inf A := -\infty$. În acest fel, orice submulţime nevidă din $\overline{\mathbb{R}}$ are margine superioară şi margine inferioară în $\overline{\mathbb{R}}$.

Putem să extindem acum şi notaţiile pentru intervale de numere reale. Dacă a şi b sunt două elemente din $\overline{\mathbb{R}}$, cu $a < b$ definim:

- $(a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$, numit **interval deschis**;
- $[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\}$, numit **interval închis**;
- $(a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b\}$, numit **interval deschis în a, închis în b**;
- $[a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b\}$, numit **interval închis în a, deschis în b**.

5 Spaţiul $\mathbb{R}^k$

Considerăm $k \in \mathbb{N}^*$ şi fie

$$\mathbb{R}^k := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{\text{de } k \text{ ori}} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_k) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, k}\}.$$

Această mulţime se organizează ca spaţiu liniar real în raport cu operaţiile

$$\text{“}+\text{”} : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k,\ x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_k + y_k),$$
$$\text{“}\cdot\text{”} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k,\ a \cdot x = (ax_1, ax_2, ..., ax_k),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^k$ şi orice $a \in \mathbb{R}$, operaţii numite **adunarea şi înmulţirea cu scalari**. După cum se va vedea la cursul de algebră liniară, acest lucru înseamnă de fapt următoarele:

I. $(\mathbb{R}^k, +)$ este grup abelian, adică
1. $(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^k$;
2. $\exists \theta := (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^k$ astfel încât $x + \theta = \theta + x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}^k, \exists - x := (-x_1, -x_2, ..., -x_k) \in \mathbb{R}^k$ astfel încât $x + (-x) = (-x) + x = \theta$;
4. $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

II. Înmulţirea cu scalari satisface proprietăţile
1. $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^k$;
2. $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$;
3. $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$;
4. $1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$.

De cele mai multe ori, pentru simplitatea scrierii, vom nota 0 în locul elementului θ de mai sus, contextul permiţându-ne să deducem că avem de-a face cu originea spaţiului $\mathbb{R}^k$, şi nu cu numărul real 0.

În cele ce urmează, vom preciza noţiuni şi proprietăţi privitoare la $\mathbb{R}^k$ legate mai mult de aspecte de ordin topologic, ce ne vor permite mai apoi studierea unor concepte cum ar fi limita, continuitatea, derivabilitatea, diferenţiabilitatea, acest lucru neputând fi realizat doar prin analiza proprietăţilor algebrice ale acestui spaţiu.

Definiţia 5.1 *O aplicaţie $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ se numeşte **normă** pe $\mathbb{R}^k$ dacă îndeplineşte relaţiile:*
(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
(N_2) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$;
(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Proprietăţile $(N_1) - (N_3)$ se mai numesc **axiomele normei**. Având definită o normă $\|\cdot\|$ pe $\mathbb{R}^k$, vom spune că $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ este **spaţiu liniar normat**. Pentru un element $x \in \mathbb{R}^k$, vom numi $\|x\|$ **norma** sau **lungimea** vectorului x.

Propoziţia 5.2 *Presupunem că $\|\cdot\|$ este o normă pe $\mathbb{R}^k$. Atunci:*
(i) $\|-x\| = \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$;
(ii) $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$;
(iii) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Demonstraţie. Deoarece (i) este evidentă, să arătăm (ii). Pentru aceasta, să observăm că, pentru orice $x \in \mathbb{R}^k$,

$$0 = \|\theta\| = \|x + (-x)\| \le \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|.$$

Pentru (iii), observăm că

$$\begin{aligned}
&\|x\| = \|(x-y)+y\| \le \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \le \|x-y\|, \\
&\|y\| = \|(y-x)+x\| \le \|y-x\| + \|x\| = \|x-y\| + \|x\| \\
&\quad \Rightarrow \|y\| - \|x\| \le \|x-y\|.
\end{aligned}$$

□

Prezentăm în continuare câteva exemple remarcabile de norme.

Exemplul 5.3 *Pentru $k = 1$, funcţia modul $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o normă, deoarece satisface*
(N_1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(N_2) $|\lambda x| = |\lambda| |x|, \quad \forall \lambda, x \in \mathbb{R}$;
(N_3) $|x + y| \le |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Următoarele norme definite pe $\mathbb{R}^k$ vor fi importante în cele ce urmează.

Exemplul 5.4 *1. Aplicaţia $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k, \tag{3}$$

satisface $(N_1) - (N_3)$ şi se numeşte ***norma euclidiană.***
2. Aplicaţia $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{k} |x_i|, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k. \tag{4}$$

satisface $(N_1) - (N_3)$ şi se numeşte ***norma Manhattan.***
3. Aplicaţia $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\|x\|_\infty := \max_{i=\overline{1,k}} |x_i|, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k. \tag{5}$$

satisface $(N_1) - (N_3)$ şi se numeşte ***norma maximum.***

Să mai observăm că toate cele trei norme definite anterior se reduc, în cazul $k = 1$, la funcţia modul.

Exerciţiul 5.5 *Să se calculeze normele $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ pentru vectorii:*
a) $x = (-1, 3) \in \mathbb{R}^2$;
b) $y = (2, -1, 5) \in \mathbb{R}^3$;
c) $z = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right) \in \mathbb{R}^4$.

Soluţie. a) $\|x\|_2 = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$; $\quad \|x\|_1 = |-1| + |3| = 4$; $\quad \|x\|_\infty = \max\{|-1|, |3|\} = 3$.
b) $\|y\|_2 = \sqrt{30}$, $\quad \|y\|_1 = 8$; $\quad \|y\|_\infty = 5$.
c) $\|z\|_2 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{65}}{12}$, $\quad \|z\|_1 = \frac{5}{4}$; $\quad \|z\|_\infty = \frac{1}{2}$. □

6 Elemente de topologie pe $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$ şi $\overline{\mathbb{R}}$

6.1 Vecinătăţile unui punct

Fie $a \in \mathbb{R}^k, r > 0$ şi $\|\cdot\|$ o normă pe $\mathbb{R}^k$.

Definiţia 6.1 *Se numeşte* ***bilă deschisă de centru*** a ***şi rază*** r *mulţimea*

$$B(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x-a\| < r\}.$$

Se numeşte ***bilă închisă de centru*** a ***şi rază*** r *mulţimea*

$$D(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x-a\| \leq r\}.$$

Se numeşte ***sferă de centru*** a ***şi rază*** r *mulţimea*

$$S(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x-a\| = r\}.$$

Exemplul 6.2 *În cazul lui* $\mathbb{R}$ *înzestrat cu metrica uzuală, obţinem* $B(a,r) = (a-r, a+r)$, $D(a,r) = [a-r, a+r]$, $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$.

Exemplul 6.3 *Să considerăm cazul lui* $\mathbb{R}^2$. *Pentru norma euclidiană* $\|\cdot\|_2$, *bila deschisă, bila închisă şi sfera de centru* $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ *şi rază* $r > 0$ *vor fi, respectiv*

$$\begin{aligned}
B_2(a,r) &= \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\},\\
D_2(a,r) &= \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 \leq r^2\},\\
S_2(a,r) &= \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 = r^2\}.
\end{aligned}$$

În cazul normei $\|\cdot\|_1$, *mulţimile corespunzătoare sunt:*

$$\begin{aligned}
B_1(a,r) &= \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1-a_1| + |x_2-a_2| < r\},\\
D_1(a,r) &= \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1-a_1| + |x_2-a_2| \leq r\},\\
S_1(a,r) &= \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1-a_1| + |x_2-a_2| = r\}.
\end{aligned}$$

În sfârşit, în cazul normei $\|\cdot\|_\infty$, *obţinem următoarele:*

$$\begin{aligned}
B_\infty(a,r) &= \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1-a_1|, |x_2-a_2|\} < r\},\\
D_\infty(a,r) &= \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1-a_1|, |x_2-a_2|\} \leq r\},\\
S_\infty(a,r) &= \{x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x_1-a_1|, |x_2-a_2|\} = r\}.
\end{aligned}$$

Definiţia 6.4 *Mulţimea* A *din spaţiul* $\mathbb{R}^k$ *se numeşte* ***mărginită*** *dacă există* $a \in \mathbb{R}^k$ *şi* $r > 0$ *astfel încât* $A \subset D(a,r)$. *În caz contrar,* A *se numeşte* ***nemărginită***.

Observaţia 6.5 *Mărginirea unei mulţimi* $A \subset \mathbb{R}^k$ *este echivalentă cu existenţa unui* $r > 0$ *astfel încât*

$$\|x\| \leq r, \quad \forall x \in A.$$

Definiţia 6.6 *Se numeşte* ***vecinătate*** *a punctului $x \in \mathbb{R}^k$ orice mulţime care conţine o bilă deschisă centrată în x. Vom nota cu $\mathcal{V}(x)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor punctului x şi o vom numi* ***sistem de vecinătăţi*** *pentru punctul x.*

Exemplul 6.7 *Pentru $\mathbb{R}$, înzestrat cu metrica uzuală, avem că atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}$,*

$$V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \text{există } r > 0 \text{ astfel încât } (x - r, x + r) \subset V.$$

În cazul lui $\overline{\mathbb{R}}$, să vedem cum arată vecinătăţile punctelor acestui spaţiu.

Definiţia 6.8 *Fie $x \in \overline{\mathbb{R}}$.*
Dacă $x \in \mathbb{R}$, atunci $V \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow$ există $r > 0$ astfel încât $(x - r, x + r) \subset V$;
Dacă $x = +\infty$, atunci $V \in \mathcal{V}(+\infty) \Leftrightarrow$ există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, +\infty] \subset V$;
Dacă $x = -\infty$, atunci $V \in \mathcal{V}(-\infty) \Leftrightarrow$ există $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $[-\infty, b) \subset V$.

Următorul rezultat are drept consecinţă importantă faptul că permite demonstrarea unicităţii limitei unei funcţii într-un punct (deci şi a limitei unui şir).

Teorema 6.9 (Proprietatea de separaţie Haussdorff) *Dacă x şi y sunt puncte distincte din $\mathbb{R}^k$, atunci există $V_x \in \mathcal{V}(x), V_y \in \mathcal{V}(y)$ astfel încât $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Demonstraţie. Dacă $x \neq y$, atunci putem defini $r := \|x - y\| > 0$. Considerăm $V_x := B\left(x, \frac{r}{3}\right) \in \mathcal{V}(x)$, $V_y := B\left(y, \frac{r}{3}\right) \in \mathcal{V}(y)$. Să presupunem că $V_x \cap V_y \neq \emptyset$, adică există $z \in B\left(x, \frac{r}{3}\right) \cap B\left(y, \frac{r}{3}\right)$. Atunci

$$r = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| < \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = \frac{2r}{3},$$

contradicţie. În concluzie, presupunerea făcută este falsă, deci teorema este demonstrată. □

6.2 Mulţimi deschise. Mulţimi închise

Definiţia 6.10 *O submulţime $D \subset \mathbb{R}^k$ se numeşte* ***deschisă*** *dacă $D = \emptyset$ sau D este vecinătate pentru orice punct al său.*

Exemplul 6.11 *1. Orice bilă deschisă $B(x, r)$ din $\mathbb{R}^k$ este mulţime deschisă. În particular, în cazul $k = 1$, avem că orice interval de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ este o mulţime deschisă.*
2. În cazul lui $\mathbb{R}$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, intervalele de forma (a, b), $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ sunt mulţimi deschise.
3. Pentru $a \in \mathbb{R}^k$ şi $r > 0$, mulţimea $A := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| > r\}$ este o mulţime deschisă.
4. Mulţimea $(0, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2\}$ nu este deschisă deoarece nu este vecinătate pentru 2 (nicio bilă deschisă centrată în 2 nu este inclusă în $(0, 2]$).

Teorema 6.12 (Proprietăţi ale mulţimilor deschise) *Au loc următoarele afirmaţii:*
(i) Orice reuniune (finită sau infinită) de mulţimi deschise este o mulţime deschisă;
(ii) Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este o mulţime deschisă;
(iii) $\mathbb{R}^k$ este o mulţime deschisă.

Demonstraţie. Exerciţiu! □

Observaţia 6.13 *Să remarcăm faptul că, dacă am considera o intersecţie oarecare de mulţimi deschise, aceasta nu este în mod necesar deschisă, după cum o arată exemplul următor: fie, pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, *mulţimea deschisă* $D_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. *Atunci* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} D_n = \{0\}$, *mulţime care, în mod evident, nu este deschisă în* $\mathbb{R}$.

Definiţia 6.14 *O submulţime* $D \subset \mathbb{R}^k$ *se numeşte* ***închisă*** *dacă mulţimea sa complementară,* $cD := \mathbb{R}^k \setminus D$, *este deschisă.*

Exemplul 6.15 *1.* $\emptyset, \mathbb{R}^k$ *sunt mulţimi închise, deoarece* $c\emptyset = \mathbb{R}^k$, $c\mathbb{R}^k = \emptyset$ *sunt deschise.*

2. Orice bilă închisă $D(a, r)$ *dintr-un spaţiu metric este mulţime închisă deoarece complementara sa,* $\mathbb{R}^k \setminus D(x, r) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - a\| > r\}$, *este deschisă.*

Teorema 6.16 (Proprietăţi ale mulţimilor închise) *Au loc următoarele afirmaţii:*

(i) Orice reuniune finită de mulţimi închise este o mulţime închisă;

(ii) Orice intersecţie (finită sau infinită) de mulţimi închise este o mulţime închisă.

Demonstraţie. Se folosesc formulele lui de Morgan şi Teorema 6.12. □

Exerciţiul 6.17 *Precizaţi dacă mulţimile următoare sunt deschise sau închise în* $\mathbb{R}^4$*:*

a) $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid |x_1| > 0,\ x_2 < 1,\ x_3 \neq -2\}$;

b) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 1,\ x_3 \neq -4\}$;

c) $C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 1,\ -3 \leq x_2 \leq 1,\ x_4 = -5\}$.

Soluţie. a) Fie:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid |x_1| > 0\} \\ A_2 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 < 1\} \\ A_3 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_3 \neq -2\}. \end{aligned}$$

Atunci $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Cum A_1, A_2 şi A_3 sunt evident mulţimi deschise şi o intersecţie finită de mulţimi deschise este deschisă, rezultă că A este deschisă.

b) Observăm că $B \notin \mathcal{V}(1, 0, 0, 0)$, deci B nu este deschisă. De asemenea,

$$cB = \mathbb{R}^4 \setminus B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 \neq 1,\ x_3 = -4\}$$

nu este deschisă, deci B nu este închisă. În concluzie, B nu este nici deschisă, nici închisă.

c) Se observă că mulţimea

$$cC = \mathbb{R}^4 \setminus C = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 \neq 1,\ x_2 \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty),\ x_4 \neq -5\}$$

se poate scrie ca intersecţie de mulţimi deschise, deci este deschisă. În concluzie, C este închisă în $\mathbb{R}^4$. O demonstraţie simplă a acestui lucru se va putea face după ce vom da caracterizarea cu şiruri a mulţimilor închise în $\mathbb{R}^k$. □

6.3 Interior, aderenţă, frontieră, mulţime derivată, puncte izolate

Definiţia 6.18 *Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime nevidă. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numeşte* ***punct interior*** *mulţimii A dacă $A \in \mathcal{V}(x)$. Totalitatea punctelor interioare mulţimii A se notează cu $\overset{\circ}{A}$ sau cu* $\operatorname{int} A$ *şi se numeşte* ***interiorul*** *mulţimii A.*

Exemplul 6.19 *1. În cazul lui $\mathbb{R}$, fie intervalele: (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$. Interiorul tuturor mulţimilor este egal cu (a,b).*

2. Fie $k=1$ şi mulţimile $A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Avem $\overset{\circ}{A}=\overset{\circ}{B}=\emptyset$, deoarece pentru orice punct $x\in\mathbb{R}$, niciuna din mulţimile A,B nu poate conţine intervale de forma $(x-r,x+r)$ cu $r>0$.

3. Fie $X=\mathbb{R}^2$ şi $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}\cup\{(3,0)\}$. Vom avea

$$\overset{\circ}{A}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}<1\right\}.$$

Teorema 6.20 *Au loc următoarele:*

(i) $\overset{\circ}{A}\subset A, \quad \forall A\subset\mathbb{R}^k$;

(ii) $A=\overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A$ *este deschisă;*

(iii) $A_1\subset A_2 \Rightarrow \overset{\circ}{A}_1\subset\overset{\circ}{A}_2$;

(iv) $\overset{\circ}{\overbrace{A_1\cap A_2}}=\overset{\circ}{A}_1\cap\overset{\circ}{A}_2$;

(v) $\overset{\circ}{\overbrace{A_1\cup A_2}}\supset\overset{\circ}{A}_1\cup\overset{\circ}{A}_2$;

(vi) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}=\overset{\circ}{A}$, *deci* $\overset{\circ}{A}$ *deschisă.*

Demonstraţie. Exerciţiu! □

Definiţia 6.21 *Fie $A\subset\mathbb{R}^k$. Un punct $x\in\mathbb{R}^k$ se numeşte* ***punct aderent*** *mulţimii A dacă pentru orice $V\in\mathcal{V}(x)$, avem $V\cap A\ne\emptyset$. Totalitatea punctelor aderente mulţimii A se notează cu $\overline{A}$ sau cu* $\operatorname{cl} A$ *şi se numeşte* ***aderenţa****, sau* ***închiderea*** *mulţimii A.*

Exemplul 6.22 *1. În cazul $k=1$, aderenţa tuturor intervalelor (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ este mulţimea $[a,b]$.*

2. Pentru $\mathbb{R}$ şi mulţimile $A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, avem $\overline{A}=\overline{B}=\mathbb{R}$, deoarece pentru orice punct $x\in\mathbb{R}$ şi orice $V\in\mathcal{V}(x)$, avem $V\cap A\ne\emptyset$ şi $V\cap B\ne\emptyset$.

3. Pentru $X=\mathbb{R}^2$ şi $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}\cup\{(3,0)\}$, obţinem $\overline{A}=A$.

Următoarea teoremă face legătura între noţiunile de aderenţă şi interior.

Teorema 6.23 *Fie $A\subset\mathbb{R}^k$. Atunci:*

$$c\overset{\circ}{A}=\overline{cA} \text{ şi } c\overline{A}=\overset{\circ}{\overbrace{cA}}.$$

Demonstraţie. Pentru prima relaţie, să considerăm $x\in c\overset{\circ}{A}$, sau $x\notin\overset{\circ}{A}$. Dar această relaţie este echivalentă cu faptul că, pentru orice $V\in\mathcal{V}(x)$, $V\not\subset A$, ceea ce, la rândul său, este echivalent cu faptul că, pentru orice $V\in\mathcal{V}(x)$, $V\cap cA\ne\emptyset$, adică $x\in\overline{cA}$. A doua relaţie se arată analog. □

Teorema 6.24 *Fie (X, d) un spaţiu metric. Au loc următoarele:*

(i) $A \subset \overline{A}$;

(ii) $A = \overline{A} \Leftrightarrow A$ *este închisă;*

(iii) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \overline{A}_1 \subset \overline{A}_2$;

(iv) $\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$;

(v) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$;

(vi) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, *deci* $\overline{A}$ *este închisă.*

Demonstraţie. Exerciţiu! □

Definiţia 6.25 *Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Numim **frontieră** a mulţimii A, notată* $\operatorname{Fr} A$, *mulţimea* $\overline{A} \cap \overline{cA}$.

Exemplul 6.26 *1. Pentru $\mathbb{R}$ şi A una din mulţimile (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, avem* $\operatorname{Fr} A = \{a, b\}$.

2. Pentru $\mathbb{R}$ şi $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, obţinem $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$. *Analog,* $\operatorname{Fr} B = \mathbb{R}$.

3. $\operatorname{Fr} \mathbb{R} = \emptyset$.

4. Pentru $X = \mathbb{R}^2$ şi $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\} \cup \{(3, 0)\}$, *obţinem*

$$\operatorname{Fr} A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\} \cup \{(3, 0)\}.$$

Următorul rezultat face legătura între o mulţime, frontieră, interiorul şi aderenţa sa şi permite identificarea cu uşurinţă a mulţimilor deschise şi închise: pentru o mulţime oarecare, dacă se înlătură punctele frontierei sale obţinem interiorul, iar dacă se adaugă punctele forntierei se va obţine închiderea mulţimii.

Teorema 6.27 *Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Atunci:*

(i) $\mathring{A} = A \setminus \operatorname{Fr} A$;

(ii) $\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr} A$.

Demonstraţie. (i) Avem

$$\begin{aligned} A \setminus \operatorname{Fr} A &= A \setminus \left(\overline{A} \cap \overline{cA}\right) = \left(A \setminus \overline{A}\right) \cup \left(A \setminus \overline{cA}\right) \\ &= \emptyset \cup \left(A \cap c\left(c\mathring{A}\right)\right) = A \cap \mathring{A} = \mathring{A}. \end{aligned}$$

(ii) Să observăm că $A \cup c\mathring{A} \supset A \cup cA = \mathbb{R}^k$, adică $A \cup c\mathring{A} = \mathbb{R}^k$. Atunci

$$\begin{aligned} A \cup \operatorname{Fr} A &= A \cup \left(\overline{A} \cap c\mathring{A}\right) = \left(A \cup \overline{A}\right) \cap \left(A \cup c\mathring{A}\right) \\ &= \overline{A} \cap X = \overline{A}. \end{aligned}$$

□

Definiţia 6.28 *Fie $A \subset \mathbb{R}^k$. Un punct $x \in \mathbb{R}^k$ se numeşte **punct de acumulare** al mulţimii A dacă pentru orice $V \in \mathcal{V}(x)$, avem $(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$. Totalitatea punctelor de acumulare ale mulţimii A se notează cu A' şi se numeşte **mulţimea derivată** asociată mulţimii A.*

*Un punct $x \in A$ cu proprietatea că $x \notin A'$ se numeşte **punct izolat** al mulţimii A.*

Exemplul 6.29 *1. Pentru* $\mathbb{R}$, *mulţimea derivată asociată tuturor intervalelor* (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$ *este mulţimea* $[a,b]$.

2. Pentru $\mathbb{R}$ *şi mulţimile* $A=\mathbb{Q}$, $B=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, *avem* $A'=B'=\mathbb{R}$, *deoarece pentru orice punct* $x\in\mathbb{R}$ *şi orice* $V\in\mathcal{V}(x)$, *avem* $(V\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset$ *şi* $(V\setminus\{x\})\cap B\neq\emptyset$.

3. Pentru $X=\mathbb{R}^2$ *şi* $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1\right\}\cup\{(3,0)\}$, *obţinem*

$$A'=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1\right\}.$$

Punctul $(3,0)$ *este punct izolat pentru mulţimea* A.

Ca în cazul aderenţei, se poate arăta uşor următorul rezultat.

Teorema 6.30 *Fie* $A\subset\mathbb{R}^k$. *Atunci*

$$x\in A' \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, (B(x,\varepsilon)\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset.$$

Observaţia 6.31 *Dacă* $x\in A'$, *atunci în orice vecinătate a lui* x *se află o infinitate de puncte ale mulţimii* A. *Într-adevăr, dacă ar exista o vecinătate care conţine o mulţime finită de puncte diferite de* x *de tipul* $\{x_1,x_2,...,x_p\}$, *putem considera* $r_0:=\min\{\|x-x_1\|,\|x-x_2\|,...,\|x-x_p\|\}>0$ *astfel încât* $(B(x,r_0)\setminus\{x\})\cap A=\emptyset$, *contradicţie.*

Folosind această observaţie, deducem că mulţimile finite nu au puncte de acumulare.

Are loc următorul rezultat.

Teorema 6.32 *Au loc următoarele:*

(i) $A'\subset\overline{A}$;
(ii) $A_1\subset A_2\Rightarrow A_1'\subset A_2'$;
(iii) $(A_1\cap A_2)'\subset A_1'\cap A_2'$;
(iv) $(A_1\cup A_2)'=A_1'\cup A_2'$;
(v) $\overline{A}=A\cup A'$;
(vi) A *este închisă* $\Leftrightarrow A'\subset A$.

Demonstraţie. (i), (ii) şi (iii) rezultă imediat.

(iv) Cum $A_1,A_2\subset A_1\cup A_2$, rezultă din (iii) că $A_1',A_2'\subset(A_1\cup A_2)'$, deci $A_1'\cup A_2'\subset(A_1\cup A_2)'$. Fie acum $x\in(A_1\cup A_2)'$. Atunci, pentru orice $V\in\mathcal{V}(x)$, $(V\setminus\{x\})\cap(A_1\cup A_2)\neq\emptyset$, de unde $(V\setminus\{x\})\cap A_1\neq\emptyset$ sau $(V\setminus\{x\})\cap A_2\neq\emptyset$, adică $x\in A_1'$ sau $x\in A_2'$, sau $x\in A_1'\cup A_2'$.

(v) Cum $A,A'\subset\overline{A}$, avem $A\cup A'\subset\overline{A}$. Fie acum $x\in\overline{A}\setminus A$. Atunci, conform definiţiei, $V\cap A\neq\emptyset$. Deoarece $x\notin A$, rezultă $(V\cap A)\setminus\{x\}\neq\emptyset$, adică $(V\setminus\{x\})\cap A\neq\emptyset$, sau $x\in A'$. De aici, $\overline{A}\setminus A\subset A'$, ceea ce implică $\overline{A}=\left(\overline{A}\setminus A\right)\cup A\subset A'\cup A$.

(vi) Avem că A este închisă $\Leftrightarrow A=\overline{A}\Leftrightarrow A=A\cup A'\Leftrightarrow A'\subset A$. □

Exerciţiul 6.33 *Precizaţi frontiera, interiorul, închiderea următoarelor mulţimi:*

a) $A=\{(x,y,z)\mid |x|<1,\ \ |y|<1,\ \ z\in\mathbb{R}\}$
b) $B=\left\{(x,y,1)\mid x^2+y^2\leq 1\right\}$

Soluţie. a) Obţinem

$$\begin{aligned}
\operatorname{Fr} A &= \{(x,y,z) \mid |x| = 1,\ |y| < 1,\ z \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \cup \{(x,y,z)\ \ |x| < 1,\ |y| = 1,\ z \in \mathbb{R}\} \\
&\quad \cup \{(x,y,z)\ \ |x| = 1,\ |y| = 1,\ z \in \mathbb{R}\}, \\
\overline{A} &= \{(x,y,z) \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ z \in \mathbb{R}\}, \\
\overset{\circ}{A} &= A.
\end{aligned}$$

b) În acest caz, vom avea $\operatorname{Fr} B = \overline{B} = B$, $\overset{\circ}{B} = \emptyset$.