CURS 10, Analiză matematică, semestrul I, 2014–2015

1 Integrale curbilinii

Definiţia 1.1 *Fie I un interval de numere reale. O funcţie continuă*

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^k, \qquad \gamma(t) = (f_1(t), ..., f_k(t)).$$

*se numeşte **curbă** în $\mathbb{R}^k$.*

În cele ce urmează vom discuta numai despre două tipuri de curbe:

- $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, numite **curbe plane**;
- $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, numite **curbe în spaţiu**;

Fie $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ o curbă în spaţiu. Aceasta este descrisă prin aşa numitele ecuaţii parametrice:

$$(\gamma) \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in [\,a, b\,], \tag{1}$$

unde f, g, h sunt funcţii continue pe $[\,a, b\,]$.

Definiţia 1.2

1. *Curba γ se numeşte **închisă** dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$, adică $f(a) = f(b)$, $g(a) = g(b)$, $h(a) = h(b)$.*
2. *Curba γ se numeşte **simplă** dacă nu are puncte multiple (nu se autointersectează – cu excepţia eventuală a capetelor), adică nu există două puncte distincte $t', t'' \in [\,a, b\,]$, $a \le t' < t'' \le b$, cu cel puţin una din inegalităţile extreme stricte, astfel încât $f(t') = f(t'')$, $g(t') = g(t'')$, $h(t') = h(t'')$.*
3. *Curba γ se numeşte **netedă** dacă funcţiile f, g, h sunt de clasă C^1 pe $[\,a, b\,]$ (sunt funcţii continue cu derivate continue). O curbă se numeşte **netedă pe porţiuni**, dacă există un număr finit de subintervale ale intervalului $[\,a, b\,]$ determinate de $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ astfel ca restricţia curbei la $[\,t_{i-1}, t_i\,]$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$ să fie netedă.*
4. *Numim **lungime** a curbei γ, elementul $L(\gamma) \in [0, +\infty]$ definit prin*

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \mid a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b,\ n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

unde marginea superioară se face după toate numerele naturale n şi toate diviziunile

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

ale intervalului $[a, b]$.

*Dacă lungimea unei curbe este finită spunem că respectiva curbă este **rectificabilă**.*

Exemple de curbe şi parametrizările acestora

1. **Cercul**

   Ecuaţia generală a unui cerc de rază r cu centrul în origine este

   $$x^2 + y^2 = r^2.$$

   Ecuaţiile parametrice sunt date de:

   $$(C) \quad \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{2}$$

2. **Elipsa**

   Ecuaţia generală a unei elipse cu centrul în origine şi de semiaxe egale cu $a > 0$ şi $b > 0$ este

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

   Ecuaţiile parametrice sunt date de:

   $$(C) \quad \begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \quad t \in [0, 2\pi]. \end{cases} \tag{3}$$

3. **Parabola**

   Ecuaţia generală a unei parabole este

   $$y^2 = 2ax, \qquad a > 0.$$

4. **Spirala cilindrică**

   Ecuaţiile parametrice sunt date de:

   $$(C) \quad \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = t, \quad t \in [a, b]. \end{cases} \tag{4}$$

Teorema 1.3 *Dacă γ definită de (1) este o curbă netedă, atunci ea este rectificabilă şi lungimea ei este dată de:*

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(f')^2 + (g')^2 + (h')^2}\, dt. \tag{5}$$

Expresia

$$ds = \sqrt{(f')^2 + (g')^2 + (h')^2}\, dt \tag{6}$$

se numeşte **elementul de arc** al curbei γ.

A **orienta** o curbă înseamnă a alege un sens de parcurs pe ea. O asemenea curbă se numeşte **orientată**. Unul dintre sensuri îl numim pozitiv, iar sensul contrar se numeşte negativ. De obicei orientăm curba pozitiv în sensul creşterii parametrului t.

Dacă curba γ este închisă şi mărgineşte un domeniu oarecare, vom spune că *parcurgem curba* în **sens direct** sau *sens trigonometric* dacă prin deplasarea de-a lungul curbei domeniul mărginit este lăsat la stânga.

Exemplul 1.4 *Calculaţi lungimea curbei*

$$(\gamma) : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2} \cdot \ln(\cos t) \\ z = \operatorname{tg} t - t \end{cases}, t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Calculăm mai întâi derivatele funcţiilor x, y, z:

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\cos t} \cdot (-\sin t) = -\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} t \\ z'(t) = 1 + \operatorname{tg}^2 t - 1 = \operatorname{tg}^2 t \end{cases}$$

Elementul de arc este

$$ds = \sqrt{(f')^2 + (g')^2 + (h')^2} dt = 1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Atunci, lungimea curbei este dată de:

$$L(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \operatorname{tg} t \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2.$$

1.1 Integrala curbilinie de speţa I

Definiţia 1.5 *Fie γ o curbă netedă definită de ecuaţiile (1) şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe domeniul D ce conţine pe γ. Numim* ***integrala curbilinie de speţa I*** *sau* ***integrala curbilinie în raport cu lungimea arcului***

$$\int_\gamma F(x, y, z)\, ds = \int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) \cdot \sqrt{(f')^2 + (g')^2 + (h')^2}\, dt. \tag{7}$$

Propoziţia 1.6 *(i) Dacă γ este o curbă netedă şi $F_1, F_2 : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue pe domeniul D ce conţine pe γ iar $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci*

$$\int_\gamma [F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z)]\, ds = \int_\gamma F_1(x, y, z)\, ds + \int_\gamma F_2(x, y, z)\, ds;$$

$$\int_\gamma \alpha F_1(x, y, z)\, ds = \alpha \cdot \int_\gamma F_1(x, y, z)\, ds.$$

(ii) Fie $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, cu γ_1, γ_2 curbe netede şi fie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe domeniul D ce conţine pe γ. Atunci

$$\int_\gamma F(x, y, z)\, ds = \int_{\gamma_1} F(x, y, z)\, ds + \int_{\gamma_2} F(x, y, z)\, ds.$$

Observaţia 1.7 *Valoarea integralei curbilinii de speţa I, (7), nu depinde nici de orientarea curbei γ, nici de parametrizarea aleasă pentru curbă.*

Observaţia 1.8 *În cazul curbei plane definită parametric prin*

$$(\gamma) \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \tag{8}$$

cu f, g funcţii de clasă C^1 pe $[a, b]$ şi $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funcţie continuă pe domeniul plan D ce conţine curba γ, formula (7) se reduce la

$$\int_\gamma F(x, y)\, ds = \int_a^b F(f(t), g(t)) \cdot \sqrt{(f')^2 + (g')^2}\, dt. \tag{9}$$

Exemplul 1.9 *1) Calculaţi* $I = \int\limits_C y \cdot e^{-x} ds$*, unde* $(C) : \begin{cases} x = \ln\left(1 + t^2\right) \\ y = 2 \operatorname{arctg} t - t + 1 \end{cases}, \ t \in [0, 1]$.

Avem:

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{2t}{1 + t^2} \\ y'(t) = \dfrac{2}{1 + t^2} - 1 = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{cases}$$

Elementul de arc este:

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = \sqrt{\frac{4t^2}{(1 + t^2)^2} + \frac{(1 - t^2)^2}{(1 + t^2)^2}}dt = \frac{1}{1 + t^2}\sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}dt$$
$$= \frac{1}{1 + t^2}\sqrt{(1 + t^2)^2}dt = dt$$

*Întrucât $ds = dt$ această curbă este dată în **parametrizarea naturală**.*

$$I = \int\limits_0^1 (2 \operatorname{arctg} t - t + 1) \cdot e^{-\ln\left(1 + t^2\right)} dt = \int\limits_0^1 \frac{2 \operatorname{arctg} t - t + 1}{1 + t^2} dt$$
$$= \int\limits_0^1 \frac{2 \operatorname{arctg} t}{1 + t^2} dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{2t}{1 + t^2} dt + \int\limits_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt$$
$$= (\operatorname{arctg} t)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(1 + t^2\right) \Big|_0^1 + \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}.$$

2) Să se calculeze $I = \int\limits_C xy^2 z \cdot ds$*, unde* $(C) : \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{3}\sqrt{8t^3} \\ z = \dfrac{1}{2}t^2 \end{cases}, \ t \in [0, 1]$.

Determinăm mai întâi elementul de arc, ds. Avem:

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{8} \cdot \dfrac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cdot t \\ z'(t) = t \end{cases}$$

Atunci,

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt = \sqrt{1 + 2t + t^2}dt = (1 + t) \cdot dt,$$

deci

$$I = \int_0^1 t \cdot \frac{1}{9} \cdot 8t^3 \cdot \frac{1}{2} t^2 \,(1+t)\, dt = \frac{4}{9} \int_0^1 t^6 \,(1+t)\, dt = \frac{4}{9} \left(\int_0^1 t^6 dt + \int_0^1 t^7 dt \right)$$
$$= \frac{4}{9} \left(\frac{t^7}{7} \Big|_0^1 + \frac{t^8}{8} \Big|_0^1 \right) = \frac{4}{9} \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{15}{7 \cdot 8} = \frac{5}{42}.$$

Semnificaţii fizice ale integralei curbilinii de speţa întâi

Dacă $\rho = \rho(x,y,z) > 0$ este o funcţie continuă ce reprezintă densitatea de masă a unui fir material γ, atunci:

1. masa firului material γ este

$$M = \int_\gamma \rho(x,y,z)\, ds. \tag{10}$$

2. coordonatele centrului de greutate $G(x_G, y_G, z_G)$ sunt

$$x_G = \frac{1}{M} \int_\gamma x \cdot \rho(x,y,z)\, ds, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_\gamma y \cdot \rho(x,y,z)\, ds, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_\gamma z \cdot \rho(x,y,z)\, ds. \tag{11}$$

3. momentele de inerţie ale curbei γ în raport cu un plan (α), o dreaptă (d) sau un punct P se exprimă prin integrale de forma

$$I = \int_\gamma r^2 \cdot \rho(x,y,z)\, ds$$

unde r este distanţa punctului curent (x,y,z) de pe curbă la planul (α), dreapta (d) şi respectiv, la punctul P.

Momentele de inerţie ale curbei γ în raport cu planele de coordonate sunt date de:

$$I_{xOy} = \int_\gamma z^2\, \rho(x,y,z) ds, \quad I_{yOz} = \int_\gamma x^2\, \rho(x,y,z) ds, \quad I_{zOx} = \int_\gamma y^2\, \rho(x,y,z) ds. \tag{12}$$

Momentele de inerţie ale curbei γ în raport cu axele de coordonate sunt date de:

$$I_{Ox} = \int_\gamma (y^2+z^2)\, \rho(x,y,z) ds, \quad I_{Oy} = \int_\gamma (x^2+z^2)\, \rho(x,y,z) ds, \quad I_{Oz} = \int_\gamma (x^2+y^2)\, \rho(x,y,z) ds. \tag{13}$$

Momentul de inerţie al curbei γ în raport cu originea axelor de coordonate este

$$I_O = \int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\, \rho(x,y,z) ds. \tag{14}$$

Exerciţiul 1.10 *Să se calculeze masa şi să se determine centrul de greutate ale firului material omogen*

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

1.2 Integrala curbilinie de speţa a II-a

Definiţia 1.11 *Fie* $\gamma = \overset{\frown}{AB}$ *o curbă netedă dată de*

$$(\gamma) \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b], \tag{15}$$

orientată de la $A(t = a)$ *la* $B(t = b)$ *în sensul de creştere al parametrului* t *de la* a *la* b. *Fie* $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *funcţii continue pe domeniul* D *ce conţine curba* γ. *Numim* ***integrala curbilinie de speţa II***

$$\int_\gamma P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int_a^b \left[P(f(t), g(t), h(t)) \cdot f'(t) + Q(f(t), g(t), h(t)) \cdot g'(t) + R(f(t), g(t), h(t)) \cdot h'(t)\right] dt. \tag{16}$$

Propoziţia 1.12 *(i) Dacă* γ *este o curbă netedă şi* $P_i, Q_i, R_i : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ *sunt funcţii continue pe domeniul* D *ce conţine pe* γ *iar* $\alpha \in \mathbb{R}$, *atunci*

$$\int_\gamma (P_1 + P_2)\, dx + (Q_1 + Q_2)\, dy + (R_1 + R_2)\, dz = \int_\gamma P_1\, dx + Q_1\, dy + R_1\, dz + \int_\gamma P_2\, dx + Q_2\, dy + R_2\, dz;$$

$$\int_\gamma (\alpha P_1)\, dx + (\alpha Q_1)\, dy + (\alpha R_1)\, dz = \alpha \cdot \int_\gamma P_1\, dx + Q_1\, dy + R_1\, dz.$$

(ii) Fie $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, *cu* γ_1, γ_2 *curbe netede şi fie funcţiile continue* $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\gamma \subset D$. *Atunci*

$$\int_\gamma P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int_{\gamma_1} P\, dx + Q\, dy + R\, dz + \int_{\gamma_2} P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Observaţia 1.13 *Valoarea integralei curbilinii de speţa II depinde de orientarea curbei* γ. *Mai precis*

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Dacă curba γ *este închisă şi se alege un sens de parcurs pe curbă (dacă nu se precizează contrariul, se alege sensul direct sau sensul trigonometric), integrala de speţa II se notează*

$$\oint_\gamma P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Aplicaţii ale integralei curbilinii de speţa a doua

1. Aria unui domeniu plan D, mărginit de o curbă netedă, închisă, simplă γ este:

$$\text{Aria}(D) = \frac{1}{2} \oint_\gamma x dy - y dx. \tag{17}$$

2. Lucrul mecanic $\mathcal{L}$, al câmpului vectorial

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = P(x, y, z)\, \overrightarrow{i} + Q(x, y, z)\, \overrightarrow{j} + R(x, y, z)\, \overrightarrow{k}, \quad \text{unde } \overrightarrow{r} = x\, \overrightarrow{i} + y\, \overrightarrow{j} + z\, \overrightarrow{k}, \tag{18}$$

de-a lungul curbei γ este:

$$\mathcal{L} = \int_\gamma \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) \cdot d\overrightarrow{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{19}$$

Dacă curba este închisă, lucrul mecanic se mai numeşte **circulaţia** câmpului $\overrightarrow{F}$ de-a lungul curbei γ:

$$\mathcal{C} = \oint_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{20}$$

Exemplul 1.14 *Calculaţi următoarea integrală curbilinie de speţa a II-a:*

$$I = \int\limits_C ydx - xdy + \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dz, \quad unde\,(C) : \begin{cases} x = -t\cos t + \sin t \\ y = t\sin t + \cos t \\ z = t + 1 \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$$

Avem $P = y$; $Q = -x$; $R = x^2 + y^2 + z^2$. *Deci*

$$\begin{cases} dx = x'(t) \cdot dt = (-\cos t + t\sin t + \cos t)\,dt = (t\sin t)\,dt \\ dy = y'(t) \cdot dt = (\sin t + t \cdot \cos t - \sin t)\,dt = (t\cos t)\,dt \\ dz = z'(t) \cdot dt = dt, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (-t\cos t + \sin t)^2 + (t\sin t + \cos t)^2 + (t+1)^2 = \\ &= t^2\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + \sin^2 t + t^2\sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t + t^2 + 2t + 1 \\ &= 2t^2 + 2t + 1. \end{aligned}$$

Atunci,

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^\pi [(t\sin t + \cos t) \cdot t \cdot \sin t - (t\cos t + \sin t) \cdot t \cdot \cos t + 2t^2 + 2t + 2]dt \\ &= \int\limits_0^\pi \left(t^2\sin^2 t + t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t - t\sin t\cos t + 2t^2 + 2t + 2\right) dt = \\ &= \int\limits_0^\pi \left(3t^2 + 2t + 2\right) dt = t^3|_0^\pi + t^2|_0^\pi + 2t|_0^\pi = \pi^3 + \pi^2 + 2\pi. \end{aligned}$$

1.3 Independenţa de drum a integralei curbilinii de speţa a II-a

În cele ce urmează vom încerca să răspundem la două întrebări cât se poate de naturale

1. Depinde lucrul mecanic de forma traiectoriei?
2. Dacă traiectoria este închisă, lucrul mecanic al forţei $\overrightarrow{F}$ este întotdeauna nul ?

Definiţia 1.15 *Fie* $D \subset R^3$ *un domeniu şi fie* $P, Q, R : D \to \mathbb{R}$ *funcţii continue pe* D. *Integrala* $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ *se numeşte* ***independentă de drum*** *pe domeniul* D *dacă pentru orice* $A, B \in D$ *şi orice două curbe simple* γ_1, γ_2 *din* D *care unesc punctele* A *şi* B, *are loc relaţia*

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{21}$$

Propoziţia 1.16 *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu şi fie P, Q, $R : D \to \mathbb{R}$ funcţii continue pe D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) Integrala $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este independentă de drum;

(ii) pentru orice curbă C simplă şi închisă conţinută în D are loc:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0. \tag{22}$$

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii)$ Fie C o curbă închisă şi simplă şi fie două puncte arbitrare A, B pe C. Fie punctul M pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ şi fie punctul N pe arcul $\overset{\frown}{BA}$. Din Propoziţia 1.12, (ii), Observaţia 1.13 şi folosind independenţa de drum putem scrie

$$\begin{aligned}
&\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\overset{\frown}{AMBNA}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\
&= \int_{\overset{\frown}{AMB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{\overset{\frown}{BNA}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \\
&= \int_{\overset{\frown}{AMB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \int_{\overset{\frown}{ANB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.
\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Fie două puncte arbitrare $A, B \in D$ şi fie două drumuri arbitrare γ_1, γ_2 de la A la B. Fie punctul M pe curba γ_1 şi fie N pe γ_2. Observăm că se obţine o curbă închisă $C = AMBNA$, pentru care are loc (ii). Din

$$0 = \oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\overset{\frown}{AMB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz - \int_{\overset{\frown}{ANB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

deducem (i). □

Definiţia 1.17 *Expresia $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ se numeşte* ***diferenţială totală exactă*** *dacă există o funcţie diferenţiabilă $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, astfel încât*

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz. \tag{23}$$

Dacă avem în vedere formula diferenţialei

$$dF(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\,dz$$

deducem că relaţia (23) revine la

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z), \\
\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z), \\
\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z), \quad \forall\ (x,y,z) \in D.
\end{cases} \tag{24}$$

Pentru uşurinţa parcurgerii materialului, în cele ce urmează vom considera cazul plan al integralei $\int P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, unde P, $Q, : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unde funcţii continue.

Teorema 1.18 *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu plan în care funcţiile $P, Q : D \to \mathbb{R}$ sunt continue. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) Integrala $\displaystyle\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum;

(ii) Expresia $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ este o diferenţială totală exactă adică există $F : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă astfel încât

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \quad \forall\ (x,y) \in D. \tag{25}$$

Aceasta este dată de

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{26}$$

pe orice curbă netedă cu extremităţile $(x_0,y_0),\ (x,y) \in D$.

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii)$ Fie $A(x_0,y_0) \in D$ arbitrar fixat şi fie $M(x,y)$ un punct variabil în D. Datorită independenţei de drum, integrala curbilinie calculată de la A la M va depinde numai de punctul M, adică de coordonatele (x,y). Apare astfel funcţia definită de (26). Fie $(x_1,y_1) \in D$ arbitrar. Să arătăm că această funcţie satisface

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1) = P(x_1,y_1), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1) = Q(x_1,y_1).$$

Folosind (26) putem scrie

$$\begin{aligned}
&F(x_1+h,y_1) - F(x_1,y_1)\\
&= \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1+h,y_1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\\
&= \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{(x_1,y_1)}^{(x_1+h,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy -\\
&\quad - \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_1+h,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.
\end{aligned}$$

Dacă ţinem cont că pe curba de extremităţi $(x_1,y_1),\ (x_1+h,y_1)$ avem $dy = 0$, înlocuind mai sus, găsim,

$$F(x_1+h,y_1) - F(x_1,y_1) = \int_{x_1}^{x_1+h} P(x,y_1)\,dx.$$

Dacă folosim teorema de medie pentru integrala definită a funcţiei continue $P(\cdot,y_1)$ deducem că există ξ între x_1 şi x_1+h astfel încât

$$\frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h} P(x,y_1)dx = P(\xi,y_1)$$

Din continuitatea funcţiei P deducem

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(F(x_1+h,y_1) - F(x_1,y_1)) = \lim_{h\to 0} P(\xi,y_1) = P(x_1,y_1)$$

adică

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,y_1) = P(x_1,y_1).$$

Analog se arată că $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1,y_1) = Q(x_1,y_1)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Să presupunem acum că există funcţia F astfel încât $dF = Pdx + Qdy$ adică

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y), \quad \forall (x,y) \in D.$$

Să arătăm că pentru orice două puncte $A, B \in D$ are loc

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F(x_B, y_B) - F(x_A, y_A) \tag{27}$$

În particular din aceasta rezultă că integrala este independentă de drum. Dacă parametrizăm $\overset{\frown}{AB}$ prin

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \end{cases}$$

unde $t \in [a, b]$, $A(f(a), g(a))$, $B(f(B), g(b))$, din definiţia integrale de speţa II, putem scrie

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b [P(f(t), g(t)) \cdot f'(t) + Q(f(t), g(t)) \cdot g'(t))]\,dt$$

Din (ii) şi formula de derivare a unei funcţii compuse găsim

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(f(t), g(t)) \cdot f'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(f(t), g(t)) \cdot g'(t)\right]\,dt$$
$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left(F(f(t), g(t))\right)\,dt = F(f(b), g(b)) - F(f(a), g(a)) = F(x_B, y_B) - F(x_A, y_A). \qquad \square$$

Reţinem din această demonstraţie că, dacă $\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F(x_B, y_B) - F(x_A, y_A) \tag{28}$$

unde F este dată de (26).

Deoarece drumul de integrare care uneşte punctele (x_0, y_0) şi (x, y) poate fi ales arbitrar, alegem acest drum ca fiind format din segmentele de dreaptă paralele cu axele de coordonate $[(x_0, y_0), (x, y_0)] \cup [(x, y_0), (x, y)]$. Găsim astfel formula ce determină primitiva F:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\,dt, \quad \forall\ (x,y) \in D, \tag{29}$$

unde $(x_0, y_0) \in D$ este un punct oarecare. Funcţia F este unic determinată până la o constantă aditivă.

Teorema 1.19 *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu plan în care funcţiile P, $Q : D \to \mathbb{R}$ sunt continue. Dacă integrala $\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum şi funcţia $F : D \to \mathbb{R}$ din (25) are derivate parţiale de ordinul doi continue atunci are loc*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \quad \forall\ (x,y) \in D. \tag{30}$$

Demonstraţie. Folosim teorema lui Schwarz

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \qquad \square$$

Observaţia 1.20 *Reciproca teoremei de mai sus nu este adevărată. De exemplu dacă*

$$P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

atunci

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Dacă integrăm pe conturul unui cerc cu centrul în origine $x^2+y^2=1$, folosind parametrizarea

$$(\gamma)\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

obţinem

$$\oint_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi.$$

Dacă integrala ar fi independentă de drum ar rezulta că

$$\oint_C P dx + Q dy = 0$$

ceea ce contrazice calculul precedent. Aceasta provine din faptul că funcţiile P, Q sunt definite pe un domeniu care are "goluri" ($\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).

Un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ se numeşte **simplu conex** dacă o dată cu orice curbă γ simplă, închisă, rectificabilă conţinută în D întreg domeniul interior mărginit de γ este conţinut în D. Din punct de vedere intuitiv D nu are "goluri".

Vom demonstra capitolul "Integrala dublă" următoarea teoremă:

Teorema 1.21 *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu plan simplu conex în care funcţiile $P,\, Q : D \to \mathbb{R}$ sunt continue cu derivatele parţiale continue. Atunci integrala $\displaystyle\int P\,dx + Q\,dy$ este independentă de drum dacă şi numai dacă*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \quad \forall (x,y) \in D. \tag{31}$$

Teoremele prezentate se extind la cazul spaţial.

Teorema 1.22 *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu în care funcţiile $P,\, Q,\, R : D \to \mathbb{R}$ sunt continue. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) Integrala $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este independentă de drum;

(ii) Expresia $P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$ este diferenţială totală exactă, adică există o funcţie $F : D \to \mathbb{R}$ diferenţiabilă astfel încât

$$dF(x,y,z) = P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz, \quad \forall\ (x,y,z) \in D. \tag{32}$$

Funcţia F, dacă există, este dată de

$$F(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)\,dt \tag{33}$$

unde $(x_0,y_0,z_0) \in D$ este un punct oarecare şi F este unic determinată până la o constantă aditivă.

Dacă integrala este independentă de drum atunci

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = F(x_B,y_B,z_B) - F(x_A,y_A,z_A). \tag{34}$$

Teorema 1.23 *Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu conex în care funcţiile P, Q, $R : D \to \mathbb{R}$ sunt continue cu derivatele parţiale continue. Atunci integrala $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ este independentă de drum dacă şi numai dacă, pentru orice $(x,y,z) \in D$, au loc egalităţile*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{\partial R}{\partial y}(x,y,z), \\ \dfrac{\partial R}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial P}{\partial z}(x,y,z). \end{cases} \tag{35}$$

Definiţia 1.24 *Considerăm funcţia vectorială de clasă C^1 $\overrightarrow{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,*

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\overrightarrow{i} + Q(x,y,z)\overrightarrow{j} + R(x,y,z)\overrightarrow{k}$$

definită şi continuă în toate punctele domeniului D care conţine curba (C). Vom nota

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

şi vom numi acest determinant formal ***rotorul*** *funcţiei vectoriale $\overrightarrow{F}$. Aşadar, avem*

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F}(x,y,z) = \overrightarrow{i}\cdot\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \overrightarrow{j}\cdot\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \overrightarrow{k}\cdot\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Exemplul 1.25 *Fie $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^2\cdot\overrightarrow{i} - xz\cdot\overrightarrow{j} + yz^2\cdot\overrightarrow{k}$. Atunci*

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\cdot\left(z^2 + x\right) - \overrightarrow{j}\cdot 0 + \overrightarrow{k}\cdot(-z) = \left(x + z^2\right)\cdot\overrightarrow{i} - z\cdot\overrightarrow{k}.$$

Un câmp vectorial $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x,y,z)$ se numeşte **irotaţional** dacă

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}.$$

Condiţia necesară şi suficientă ca integrala curbilinie de speţa a II-a să fie independentă de drum într-un domeniu simplu conex este deci, folosind Teorema 1.23, ca funcţia vectorială $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}(x,y,z)$ să aibă $\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ (câmpul vectorial $\overrightarrow{F}$ să fie irotaţional).

Exemplul 1.26 *Verificând în prealabil independenţa de drum, calculaţi:*

$$I = \int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yz \cdot dx + xz \cdot dy + xy \cdot dz$$

Funcţia vectorială (câmpul vectorial ataşat) este $\overrightarrow{F}(x,y,z) = yz\overrightarrow{i} + xz\overrightarrow{j} + xy\overrightarrow{k}$. *Avem*

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(x-x) - \overrightarrow{j}(y-y) + \overrightarrow{k}(z-z) = \overrightarrow{0}.$$

În acest caz, calculul integralei curbilinii se face plecând din punctul $A(1,1,1)$ *spre punctul* $B(a,b,c)$ *prin paralele la axele de coordonate pe linia poligonală care uneşte cele* 2 *puncte. Vom avea:*

$$I = \int_{\overline{AM}} + \int_{\overline{MN}} + \int_{\overline{NB}} = I_1 + I_2 + I_3,$$

unde

$$\overline{AM} : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases},\ t \in [1,a] \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \cdot dt \\ dz = 0 \cdot dt \end{cases},$$

$$\overline{MN} : \begin{cases} x = a \\ y = t \\ z = 1 \end{cases},\ t \in [1,b] \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \cdot dt \\ dy = dt \\ dz = 0 \cdot dt \end{cases}$$

$$\overline{NB} : \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = t \end{cases},\ t \in [1,c] \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \cdot dt \\ dy = 0 \cdot dt \\ dz = dt. \end{cases}$$

Deci

$$I_1 = \int_{\overline{AM}} = \int_1^a 1 \cdot 1 \cdot dt = t\Big|_1^a = a - 1,$$

$$I_2 = \int_{\overline{MN}} = \int_1^b a \cdot dt = a \cdot dt\Big|_1^b = a(b-1)$$

$$I_3 = \int_{\overline{NB}} = \int_1^c ab \cdot dt = ab \cdot t\Big|_1^c = ab(c-1)$$

şi

$$I = a - 1 + a(b-1) + ab(c-1) = a - 1 + ab - a + abc - ab = abc - 1.$$