CURS 12, Analiză matematică, semestrul I, 2014–2015

1 Integrale triple

1.1 Definiţie

Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact (închis şi mărginit). Analog cu cazul domeniilor plane, vom presupune că $V_1, V_2, ..., V_n$ este un şir finit de domenii compacte, fără puncte interioare comune, astfel încât

$$V = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_n. \tag{1}$$

Vom spune că relaţia (1) defineşte o *descompunere a domeniului* V şi notăm cu $\Delta := \{V_i\}_{i=\overline{1,n}}$ clasa tuturor mulţimilor ce formează această descompunere.

Din nou ca în cazul prezentat în cursul anterior, cel mai mare dintre diametrele mulţimilor $V_1, ..., V_n$ se notează cu $\|\Delta\|$ şi se numeşte *diametrul descompunerii* Δ. În fiecare subdomeniu V_i considerăm câte un punct $(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \in V_i$.

Fiind dată o funcţie $f : V \to \mathbb{R}$, formăm suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \cdot \text{Vol}(V_i). \tag{2}$$

Această sumă se va numi *suma Riemann asociată funcţiei* f, *domeniului* V, *descompunerii* Δ *şi punctelor* $\{(\xi_i, \eta_i, \delta_i)\}_{i=\overline{1,n}}$, şi o notăm cu

$$\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i, \delta_i).$$

Definiţia 1.1 *Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact şi $f : V \to \mathbb{R}$. Funcţia f se numeşte* integrabilă Riemann *pe domeniul V dacă există $I \in \mathbb{R}$ astfel încât, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice descompunere Δ cu $\|\Delta\| < \delta$ şi orice ar fi punctele $(\xi_i, \eta_i, \delta_i) \in V_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ este satisfăcută relaţia:*

$$|\sigma_\Delta(f; \xi_i, \eta_i, \delta_i) - I| < \varepsilon.$$

În această situaţie, numărul I se numeşte integrala triplă în sens Riemann *a funcţiei f pe domeniul V şi se notează prin*

$$I = \iiint_D f(x, y, z) dxdydz.$$

Se observă că dacă $f(x, y, z) = 1, \ \forall (x, y, z) \in V$, atunci f este integrabilă Riemann pe V şi

$$\text{Vol}(V) = \iiint_D dxdydz. \tag{3}$$

Teorema 1.2 *Fie $V \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact şi $f : V \to \mathbb{R}$ continuă pe V. Atunci f este integrabilă pe domeniul V.*

1.2 Calculul integralei triple

În această secţiune prezentăm câteva cazuri în care integrala triplă se poate calcula.

(a) Să considerăm cazul în care V este un paralelipiped cu laturile paralele cu axele de coordonate, adică:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [\,a, b\,],\ y \in [\,c, d\,],\ z \in [\,e, g\,]\,\} \tag{4}$$

Teorema 1.3 *Fie $f : V \to \mathbb{R}$ continuă pe domeniul V. Atunci, funcţia*

$$F\,(x, y) = \int_e^g f\,(x, y, z)\,dz, \quad \forall (x, y) \in [\,a, b\,] \times [\,c, d\,] \tag{5}$$

este integrabilă pe $D = [\,a, b\,] \times [\,c, d\,]$. În plus,

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iint_D \left[\int_e^g f\,(x, y, z)\,dz\right] dxdy. \tag{6}$$

Demonstraţie. Să considerăm o descompunere a domeniului V, efectuată cu ajutorul unor plane paralele de forma $x = x_i$, $i = \overline{0, m}$, $y = y_j$, $j = \overline{0, n}$, $z = z_k$, $k = \overline{0, p}$, unde:

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{m-1} < x_m = b,\ c = y_0 < y_1 < ... < y_{n-1} < y_n = d,$$

$$e = z_0 < z_1 < ... < z_{p-1} < z_p = g.$$

Notăm

$$V_{ijk} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [\,x_{i-1}, x_i\,],\ y \in [\,y_{j-1}, y_j\,],\ z \in [\,z_{k-1}, z_k\,]\,\},$$
$$m_{ijk} = \inf_{V_{ijk}} f(x, y, z), \quad M_{ijk} = \sup_{V_{ijk}} f(x, y, z),$$

pentru orice $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, p}$.

În baza proprietăţii de monotonie a integralei, avem

$$m_{ijk}(z_k - z_{k-1}) \le \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(x, y, z)\,dz \le M_{ijk}(z_k - z_{k-1}),$$

pentru orice $(x, y, z) \in V_{ijk}$.

Folosind o teoremă de medie pentru integrala Riemann, rezultă că există $\xi \in [e, g]$ astfel încât

$$F\,(x, y) = \int_e^g f\,(x, y, z)\,dz = \frac{1}{g - e} f(x, y, \xi),\ \forall (x, y) \in D.$$

Rezultă că F este continuă pe $D = [\,a, b\,] \times [\,c, d\,]$, deci este integrabilă pe D. În plus, pe orice dreptunghi $D_{ij} = [\,x_{i-1}, x_i\,] \times [\,y_{j-1}, y_j\,]$, cu $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, avem

$$\sum_{k=1}^{p} m_{ijk}(z_k - z_{k-1})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \le \iint_{D_{ij}} \left[\int_e^g f\,(x, y, z)\,dz\right] dxdy \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{p} M_{ijk}(z_k - z_{k-1})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Din aceste relaţii, prin sumare după $i = \overline{1,m}$ şi $j = \overline{1,n}$, obţinem inegalităţile

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} m_{ijk}\cdot \mathrm{Vol}(V_{ijk}) \le \iint_D \left[\int_e^g f\left(x,y,z\right)dz\right] dxdy \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} M_{ijk}\cdot \mathrm{Vol}(V_{ijk})$$

Dar, cum f este continuă pe domeniul compact V_{ijk}, valorile m_{ijk} şi M_{ijk} se ating, în baza Teoremei lui Weierstrass, în puncte din domeniul V_{ijk}, adică sumele din dreapta şi stânga relaţiei precedente sunt sume Riemann. Mai mult, norma descompunerii obţinute va tinde către 0 când $n \to \infty$, $m \to \infty$, $p \to \infty$, iar cum f este integrabilă pe V, va rezulta că ambele sume tind către $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$. Astfel, obţinem relaţia (6). □

Observaţia 1.4 *1. Pentru simplitatea scrierii, se preferă notaţia*

$$\iint_D \left[\int_e^g f\left(x,y,z\right)dz\right] dxdy = \iint_D dxdy \int_e^g f\left(x,y,z\right)dz. \tag{7}$$

Dacă ţinem cont că domeniul D este un dreptunghi, avem

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_e^g f\left(x,y,z\right)dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g f(x,y,z)\,dz, \tag{8}$$

ordinea de integrare fiind de la dreapta la stânga.

2. Întrucât funcţia f este continuă pe V, se poate schimba ordinea de integrare în relaţia (6) şi astfel obţinem formule analoage:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{[a,b]\times[g,e]} dxdz \int_c^d f\left(x,y,z\right)dy = \int_a^b dx \int_g^e dz \int_c^d f(x,y,z)\,dy,$$
$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{[c,d]\times[g,e]} dydz \int_a^b f\left(x,y,z\right)dx = \int_c^d dy \int_g^e dz \int_a^b f(x,y,z)\,dx.$$

Exemplul 1.5 *Să se calculeze integrala $I = \iiint_V xy\,dxdydz$, unde $V = [1,2]\times[-2,1]\times\left[0,\frac{1}{2}\right]$.*

Soluţie. Întrucât domeniul V este un paralelipiped cu muchiile paralele cu axele de coordonate, avem:

$$I = \int_1^2 dx \int_{-2}^1 dy \int_0^{\frac{1}{2}} xy\ dz.$$

Să calculăm integrala

$$J\left(x,y\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} xy\,dz = xyz\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{xy}{2}.$$

Astfel,

$$I = \int_1^2 dx\ \int_{-2}^1 \frac{xy}{2}\,dy.$$

Atunci

$$I(x) = \int_{-2}^1 \frac{xy}{2}\,dy = \frac{xy^2}{4}\Big|_{-2}^{\ 1} = -\frac{3x}{4},$$

de unde

$$I = \int_1^2 \left(-\frac{3x}{4}\right) dx = -\frac{3x^2}{8}\bigg|_1^2 = -\frac{9}{8}. \qquad \square$$

(b) Să considerăm cazul în care V este un cilindru, adică:

$$V = D \times [\,e, g\,] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D,\ z \in [\,e, g\,]\}, \tag{9}$$

unde D este un domeniu compact din planul xOy.

Corpul V poate fi inclus în paralelipipedul V', care are muchiile paralele cu axele de coordonate, astfel încât proiecţia lui V' pe planul xOy este un dreptunghi de forma

$$D = \{(x, y) \mid x \in [\,a, b\,],\ y \in [\,c, d\,]\},$$

unde $a < b$, $c < d$.

În acest caz vom reduce calculul integralei triple

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz$$

la situaţia precedentă.

Definim funcţia $\bar{f} : V' \to \mathbb{R}$ prin

$$\bar{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in V \\ 0, & (x, y, z) \in V' \setminus V. \end{cases}$$

Întrucât funcţia $f(x, y, z)$ este integrabilă pe V, rezultă folosind definiţia că şi funcţia $\bar{f}(x, y, z)$ este integrabilă pe V'. Mai mult, are loc relaţia:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_{V'} \bar{f}(x, y, z)\, dxdydz.$$

În baza teoremei precedente, avem

$$\iiint_{V'} \bar{f}(x, y, z)\, dxdydz = \iint_{D'} \left[\int_e^g \bar{f}\,(x, y, z)\, dz\right] dxdy,$$

unde domeniul D' este proiecţia lui V' pe planul xOy.

Din definiţia funcţiei $\bar{f}$, pe mulţimea D avem

$$\int_e^g \bar{f}(x, y, z)\, dz = \int_e^g f(x, y, z)\, dz,$$

iar pe mulţimea $D' \setminus D$, $\displaystyle\int_e^g \bar{f}(x, y, z)\, dz = 0.$

În consecinţă,

$$\iiint_{V'} \bar{f}(x, y, z)\, dxdydz = \iint_D \left[\int_e^g f\,(x, y, z)\, dz\right] dxdy.$$

Aşadar, şi în acest caz, pentru calculul integralei triple pe V se aplică formula (6).

(c) Vom considera în continuare cazul în care V este un domeniu simplu în raport cu una din axele de coordonate.

Definiţia 1.6 *1. Domeniul V se numeşte* simplu în raport cu axa *Oz dacă există un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ şi două funcţii continue φ, $\psi : D \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\varphi(x, y) < \psi(x, y), \forall(x, y) \in D$, astfel încât*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y), \forall\, (x, y) \in D\}. \tag{10}$$

2. Domeniul V se numeşte simplu în raport cu axa *Oy dacă există un domeniu compact $D' \subset \mathbb{R}^2$ şi două funcţii continue α, $\beta : D' \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\alpha(x, z) < \beta(x, z), \forall(x, z) \in D'$, astfel încât*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha(x, z) \leq y \leq \beta(x, z), \forall\, (x, z) \in D'\}. \tag{11}$$

3. Domeniul V se numeşte simplu în raport cu axa *Ox dacă există un domeniu compact $D'' \subset \mathbb{R}^2$ şi două funcţii continue γ, $\delta : D'' \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\gamma(y, z) < \psi(y, z), \forall(y, z) \in D''$, astfel încât*

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \gamma(y, z) \leq x \leq \delta(y, z), \forall\, (y, z) \in D''\}. \tag{12}$$

Observaţia 1.7 *Din definiţia de mai sus deducem că un domeniu $V \subset \mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa Oz dacă orice paralelă dusă prin puncte interioare lui D intersectează* $\mathrm{Fr}\, V$ *în exact două puncte. Analog pentru cazul domeniilor simple în raport cu Oy, respectiv Ox.*

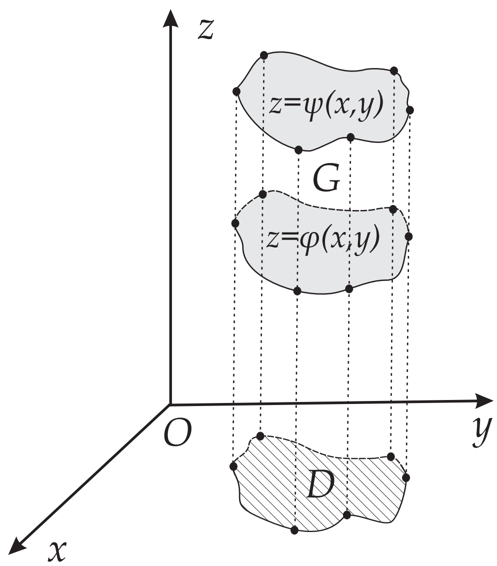


Figura 1: Domeniu simplu în raport cu Oz

Teorema 1.8 *Fie $f : V \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, continuă pe domeniul V. Atunci funcţia*

$$F(x, y) = \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z)dz, \quad \forall(x, y) \in D \tag{13}$$

este integrabilă pe D şi, în plus:

$$\iiint_V f(x, y, z)\, dxdydz = \iint_D \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f\,(x, y, z)\, dz\right] dxdy. \tag{14}$$

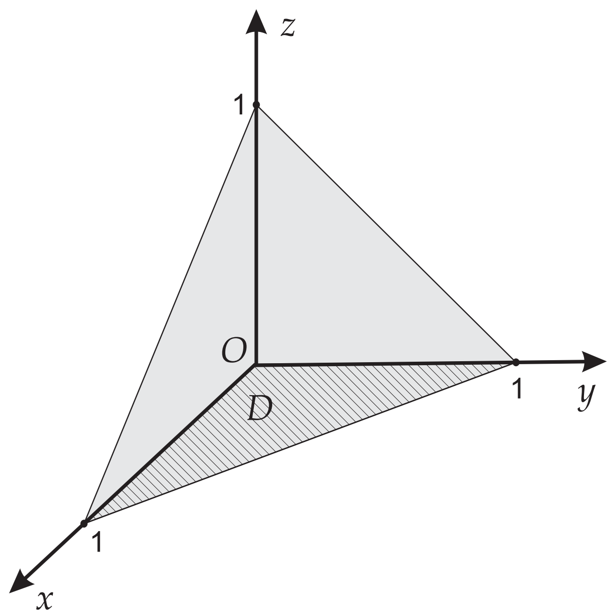
Observaţia 1.9 *1. Pentru simplitatea scrierii, se preferă notaţia*

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f\left(x,y,z\right)dz, \tag{15}$$

integrarea realizându-se de la dreapta la stânga.

Exemplul 1.10 *Să se calculeze integrala triplă* $I = \iiint_V \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}\,dxdydz$, *unde* V *este domeniul limitat de planele* $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Soluţie. Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:



Să observăm că acesta este simplu în raport cu axa Oz având reprezentarea

$$V : \begin{cases} 0 \le z \le 1-x-y, \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

unde domeniul D, situat în planul xOy, este dat prin:

$$D : \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x. \end{cases}$$

Avem atunci

$$I = \iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

Calculăm integrala

$$\begin{aligned} J(x,y) &= \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\bigg|_0^{1-x-y} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right]. \end{aligned}$$

Astfel,

$$I = \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dxdy.$$

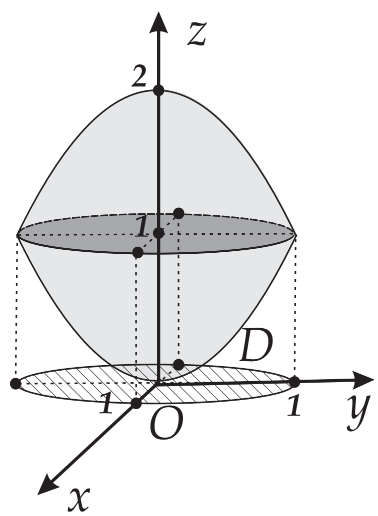
Dar domeniul D este simplu în raport cu axa Oy, deci putem scrie

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+x+y} - \frac{y}{4} \right) \Bigg|_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x} - \frac{1-x}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{3x}{4} + \frac{x^2}{8} + \ln(1+x) \right) \Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right). \end{aligned}$$

□

Exemplul 1.11 *Să se determine volumul regiunii mărginite de suprafeţele* $z = x^2 + y^2$ *şi* $z = 2 - x^2 - y^2$.

Soluţie.



Intersecţia celor două suprafeţe este discul de rază 1 situat la înălţimea $z = 1$. Proiecţia volumului pe planul xOy este discul de rază 1, cu centrul în origine (în panul xOy). Avem, atunci:

$$I = \iiint\limits_V 1 dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{2-x^2-y^2}^{x^2+y^2} dz \right) dxdy = 2 \iint\limits_D \left(x^2 + y^2 + 1 \right) dxdy,$$

unde D este discul de proiecţie.

Facem schimbarea de variabile (trecem la coordonate polare)

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, r \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Jacobianul transformării este

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Atunci,

$$I = 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} r(r^2+1)drd\theta = \left(2\int_0^1 r(r^2+1)dr\right) \cdot \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{10\pi}{3}.$$

1.3 Proprietăţi ale integralei triple

Teorema 1.12 (Proprietatea de liniaritate în raport cu integrandul) *Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, f, g două funcţii integrabile pe V şi α un număr nenul. Atunci funcţiile $f+g$, $\alpha \cdot f$ sunt integrabile pe V şi, în plus:*

$$\iint_D (f+g)(x,y,z)dxdydz = \iint_D f(x,y,z)\,dxdydz + \iint_D g(x,y,z)\,dxdydz,$$
$$\iint_D (\alpha \cdot f)(x,y,z)dxdydz = \alpha \cdot \iint_D f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Teorema 1.13 (Proprietatea de aditivitate în raport cu domeniul) *Dacă $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ şi sunt separate printr-o suprafaţă de volum nul, iar f este integrabilă pe V, atunci f este integrabilă pe V_i, $i = 1, 2$ şi rezultă*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz.$$

Reciproc, dacă f este integrabilă pe V_i, $i = 1, 2$, atunci f este integrabilă pe V şi are loc aceeaşi relaţie.

Teorema 1.14 *Dacă $f : V \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe V şi*

$$f(x,y,z) \geq 0,\ \forall (x,y,z) \in V,$$

atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

Teorema 1.15 (monotonie) *Dacă $f, g : V \to \mathbb{R}$ sunt integrabile pe V şi*

$$f(x,y,z) \leq g(x,y,z),\ \forall (x,y,z) \in V,$$

atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint_V g(x,y,z)dxdydz.$$

Dacă pentru orice $(x,y,z) \in V$ are loc

$$m \leq f(x,y,z) \leq M$$

atunci este adevărată şi inegalitatea

$$m \cdot \mathrm{Vol}(V) \leq \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \leq M \cdot \mathrm{Vol}(V).$$

Teorema 1.16 *Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$, iar f o funcţie integrabilă pe V. Atunci funcţia $|f|$ este integrabilă pe V şi are loc:*

$$\left|\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz\right| \leq \iiint_V |f(x,y,z)|\,dxdydz.$$

Teorema 1.17 (de medie pentru integrala triplă) *Fie V un domeniu compact din $\mathbb{R}^3$ şi $f : V \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe V. Atunci există un punct $(x_0, y_0, z_0) \in V$ astfel încât*

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = f(x_0,y_0,z_0) \cdot \mathrm{Vol}(V).$$

1.4 Interpretarea mecanică a integralei triple

Considerăm un corp de volum V, care are în fiecare punct densitatea de masă dată printr-o funcţie continuă şi pozitivă $\rho(x,y,z)$.

1. **masa** corpului este:

$$M = \iint_D \rho(x,y,z)\,dxdydz.$$

2. **coordonatele centrului de greutate** sunt date de formulele:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{M} \cdot \displaystyle\iint_D x \cdot \rho(x,y,z)\,dxdydz, \\ y_G = \dfrac{1}{M} \cdot \displaystyle\iint_D y \cdot \rho(x,y,z)\,dxdydz, \\ z_G = \dfrac{1}{M} \cdot \displaystyle\iint_D z \cdot \rho(x,y,z)\,dxdydz. \end{cases}$$

3. **momentul de inerţie** al unui corp de volum V, în raport cu un plan π, o dreaptă d sau cu un punct P este:

$$I = \iiint_V r^2(x,y,z) \cdot \rho(x,y,z)\,dxdydz$$

unde $r = r(x,y,z)$ este distanţa de la un punct curent al plăcii, $M(x,y,z)$, respectiv la planul π, dreapta d şi punctul P.

În particular, momentele de inerţie I_{xOy}, I_{xOz} şi I_{yOz} ale corpului V în raport cu planele de coordonate sunt:

$$I_{xOy} = \iiint_V z^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dxdydz, \quad I_{xOz} = \iiint_V y^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$I_{yOz} = \iiint_V x^2 \cdot \rho(x,y,z)\,dxdydz.$$

De asemenea, momentele I_{Ox}, I_{Oy} şi I_{Oz} ale corpului de volum V în raport cu axele de coordonate Ox, Oy, respectiv Oz, sunt:

$$I_{Ox} = \iiint_V (y^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dxdydz, \quad I_{Oy} = \iiint_V (x^2+z^2) \cdot \rho(x,y,z)\,dxdydz,$$

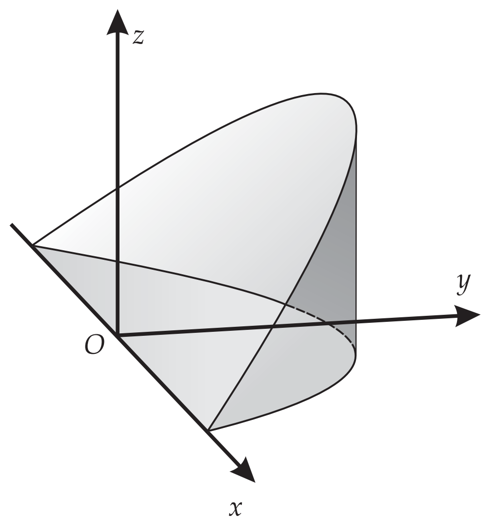
$$I_{Oz} = \iiint_V (x^2+y^2)\cdot\rho\,(x,y,z)\,dxdydz,$$

iar momentul de inerţie al corpului de volum V în raport cu originea axelor de coordonate este:

$$I_O = \iint_D \left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\rho\,(x,y,z)\,dxdydz.$$

Exemplul 1.18 *Să se determine masa regiunii V din cilindrul solid $x^2+y^2\le 4$ situată deasupra planului xOy şi sub planul $y=z$ ştiind că densitatea în fiecare punct al lui V este egală cu $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.*

Soluţie. Domeniul V are următoarea reprezentare grafică:



Observăm că proiecţia regiunii V pe planul xOy este un semidisc de rază 2. Avem:

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \iint_D\left(\int_0^y \sqrt{x^2+y^2}dz\right)dxdy$$

unde D este semidiscul din planul xOy:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases},r\in[0,2],\quad \theta\in[0,\pi].$$

Astfel, $I=\iint\limits_D y\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ şi făcând schimarea de varibilă de mai sus, avem:

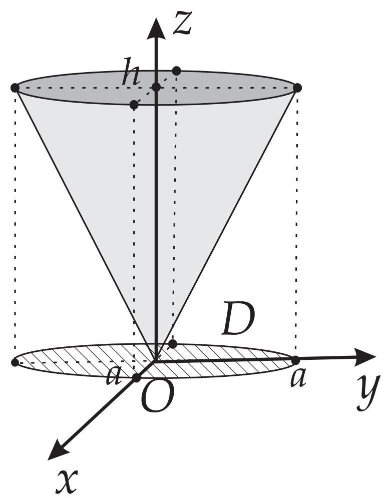
$$I=\int\limits_0^2\int\limits_0^\pi r^3\sin\theta drd\theta = \left(\int\limits_0^2 r^3dr\right)\cdot\left(\int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta\right)=8.$$

1.5 Exerciţii

Exerciţiul 1.19 *Calculaţi următoarele integrale triple pe domeniile indicate:*

1. $I=\iiint_V z\,dxdydz$, unde V este domeniul limitat de suprafeţele $z^2=\dfrac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)$, $z=0$, $z=h$.

Soluţie. Reprezentarea geometrică a domeniului este următoarea:



Domeniul V este simplu în raport cu axa Oz, putând fi scris sub forma:

$$V : \begin{cases} \dfrac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2} \le z \le h, \\ (x,y) \in D, \end{cases}$$

unde domeniul D, situat în planul xOy, este caracterizat prin

$$D : x^2 + y^2 \le a^2.$$

Avem

$$I = \iiint_V z\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\,dz.$$

Calculăm integrala

$$J(x,y) = \int_{\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\,dz = \left.\frac{z^2}{2}\right|_{\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} = \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{2a^2}(x^2+y^2).$$

Astfel,

$$I = \iint_D \frac{h^2}{2a^2}(a^2 - x^2 - y^2)\,dxdy = \frac{h^2}{2a^2}\iint_D (a^2 - x^2 - y^2)\,dxdy.$$

Întrucât D este un disc în planul xOy, cu centrul în origine şi de rază $r = a$, facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}, \ (r,\varphi) \in [0,2\pi] \times [0,a]\,.$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} I &= \frac{h^2}{2a^2} \iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,a]} (a^2 - \rho^2)\rho\,d\rho d\varphi = \frac{h^2}{2a^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^a (a^2\rho - \rho^3)\,d\rho \\ &= \frac{h^2\pi}{a^2} \cdot \left.\left(\frac{a^2r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\right|_0^a = \frac{\pi h^2 a^2}{4}. \end{aligned}$$

2. $I = \iiint_V (x^2+y^2)z\,dxdydz$, unde V este domeniul limitat de paraboloidul de ecuaţie $z = x^2+y^2$ şi de sfera de ecuaţii $x^2+y^2+z^2 = 6$, $z \geq 0$.

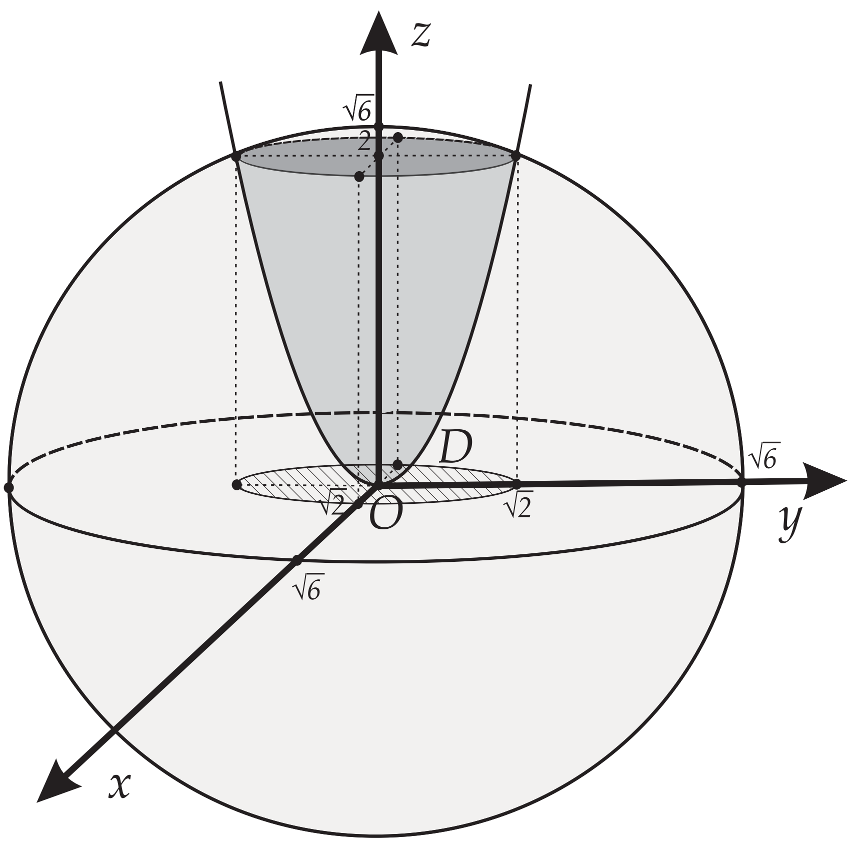
Soluţie. Observăm că V este simplu în raport cu axa Oz şi poate fi caracterizat prin:

$$V : \begin{cases} x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{6-x^2-y^2}, \\ (x,y) \in D \end{cases}$$

unde D este proiecţia lui V pe planul xOy.

Cum intersecţia dintre paraboloid şi sferă este cercul de ecuaţii $\begin{cases} x^2+y^2 = 2, \\ z = 2 \end{cases}$, deducem că domeniul plan D este dat de

$$D: \; x^2+y^2 \leq 2.$$



Obţinem astfel:

$$I = \iiint_V (x^2+y^2)z\,dxdydz = \iint_D dxdy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z\,dz.$$

Calculăm integrala

$$J(x,y) = \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z\,dz = (x^2+y^2)\cdot\left[6-x^2-y^2-(x^2+y^2)^2\right].$$

Astfel,

$$I = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) \cdot \left[6 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2\right] \, dxdy.$$

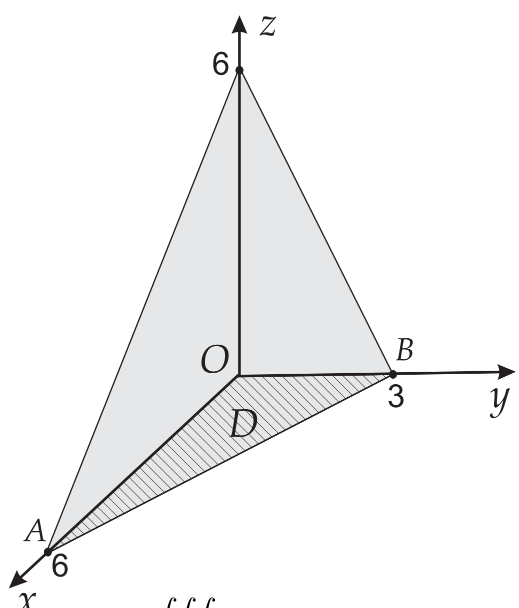
Întrucât D este un disc în planul xOy, cu centrul în origine şi de rază $r = \sqrt{2}$, facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}, \ (\rho, \varphi) \in \left[0, \sqrt{2}\right] \times [0, 2\pi] \, .$$

Rezultă

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_{\left[0,\sqrt{2}\right] \times [0,2\pi]} \rho^2 (6 - \rho^2 - \rho^4) \rho \, d\rho d\varphi = \pi \int_0^{\sqrt{2}} (6\rho^3 - \rho^5 - \rho^7) \, d\rho \\ &= \pi \left(\frac{6r^4}{4} - \frac{r^6}{6} - \frac{r^8}{8} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

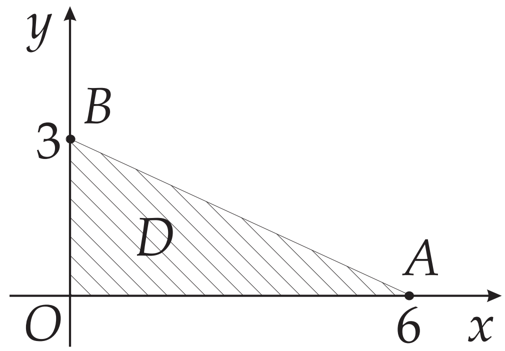
3. Aflaţi volumul tetraedrului mărginit de planele de coordonate şi de planul $x + 2y + z = 6$. Aflaţi apoi masa M a tetraedrului ştiind că are densitatea $\rho(x, y, z) = 6 - x$.
Soluţie.



Volumul îl determinăm cu formula $V = \iiint_V 1 \cdot dxdydz$. Avem:

$$V = \iint_D \left(\int_0^{6-x-2y} dz \right) dxdy,$$

unde D este proiecţia tetraedrului pe planul xOy. Este clar că D este triunghiul AOB, dreptunghic în O, unde $A(6, 0, 0)$ iar $B(0, 3, 0)$ împreună cu interiorul acestui triunghi.



Având în vedere că dreapta AB are ecuaţia $x+2y=6$ obţinem:

$$V=\int_0^6\left(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\left(\int_0^{6-x-2y}dz\right)dy\right)dx=\int_0^6\left(\int_0^{\frac{6-x}{2}}(6-x-2y)\,dy\right)dx$$
$$=\int_0^6\left(6y-xy-y^2\right)\Big|_0^{\frac{6-x}{2}}dx=\frac{1}{4}\int_0^6(x-6)^2\,dx=\frac{(x-6)^3}{12}\Big|_0^6=18.$$

Folosind cele de mai sus şi formula masei, avem:

$$M=\iiint_V\rho(x,y,z)dxdydz=\int_0^6\left(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\left(\int_0^{6-x-2y}(6-x)dz\right)dy\right)dx$$
$$=\int_0^6\left((6-x)\cdot\int_0^{\frac{6-x}{2}}\left(\int_0^{6-x-2y}dz\right)dy\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^6(6-x)^3\,dx=-\frac{(6-x)^4}{16}\Big|_0^6=81.$$

1.6 Schimbarea de variabilă în integrale triple

Considerăm două domenii compacte V şi V' din $\mathbb{R}^3$ şi o transformare $T:V'\to V$, de forma

$$\begin{array}{l}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{array}\ ,\quad (u,v,w)\in V', \tag{16}$$

unde:

1. x,y,z sunt de clasă $C^1(V')$;
2. T este surjectivă;
3. Jacobianul $J\,(u,v,w)=\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0$ pe V'.

O funcţie cu aceste proprietăţi va fi numită *schimbare de variabile* sau de *coordonate*.

Teorema 1.20 *Dacă f este integrabilă pe V, atunci are loc*

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \cdot |J\,(u,v,w)|\,dudvdw. \tag{17}$$

Observaţia 1.21 *Scopul schimbării de variabile în integrala triplă este înlocuirea domeniului de integrare printr-un alt domeniu, ceea ce conduce la un calculul mai uşor al integralei.*

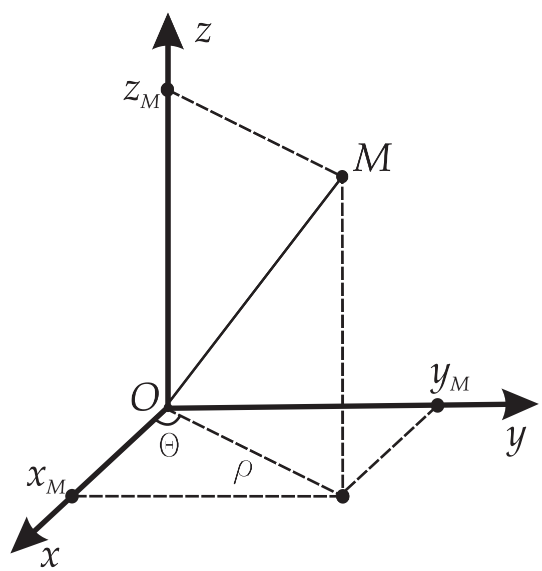
1.6.1 Schimbări de variabilă frecvent utilizate

1. Coordonate cilindrice

Una dintre schimbările importante de variabile în integrala triplă o reprezintă trecerea de la coordonate carteziene la *coordonate cilindrice*. Această transformare de coordonate este dată de:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \\ z = z, \end{cases}$$

unde $(\rho,\theta,z) \in V',\ V' = \{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ z \in \mathbb{R}\}$.



În acest caz, ρ reprezintă proiecţia razei vectoare pe planul xOy, θ este unghiul făcut de această proiecţie cu axa Ox, iar z este cota carteziană.

Jacobianul transformării este:

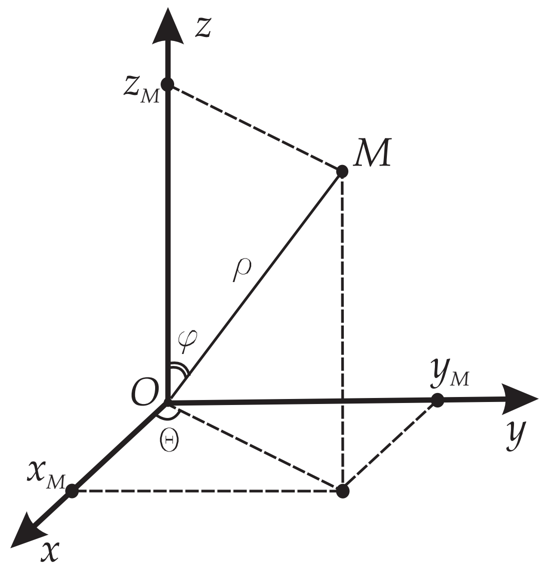
$$J\,(\rho,\theta,z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \rho \cdot \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = \rho.$$

2. Coordonate sferice

Dacă domeniul V este o sferă, un sector sferic sau o coroană sferică, atunci trecem de la coordonate carteziene la coordonate sferice. Această transformare de coordonate este dată de:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ z = \rho \cdot \cos\varphi, \end{cases} \tag{18}$$

unde $(r, \theta, \varphi) \in V',\ V' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid \rho \geq 0,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi,\, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$.



În acest caz, ρ reprezintă raza vectoare, θ este unghiul format de proiecţia razei vectoare pe planul xOy cu axa Ox, iar φ este unghiul format de raza vectoare cu axa Oz.

Jacobianul transformării este:

$$J(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\theta & -\rho \sin\varphi \sin\theta & \rho \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & \rho \cos\varphi \sin\theta & \rho \sin\varphi \sin\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho \sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2 (\sin\theta) \begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\theta & -\sin\varphi & \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & \cos\varphi & \sin\varphi \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$= -(\sin\theta)\rho^2 \left(\cos^2\theta \cos^2\varphi + \cos^2\varphi \sin^2\theta + \sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta \sin^2\varphi\right)$$

$$= -\rho^2 (\sin\theta) [\cos^2\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin^2\varphi(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -\rho^2 \sin\theta.$$

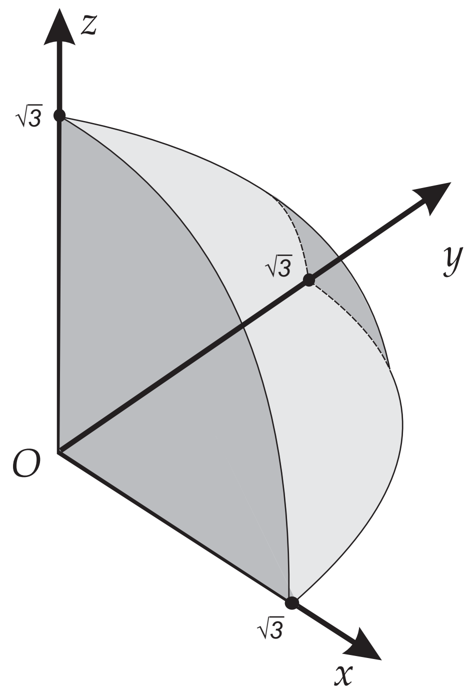
În formula schimbării variabilelor avem de considerat $|J(\rho, \varphi, \theta)| = \left|-\rho^2 \sin\theta\right| = \rho^2 \sin\theta$. De aceea, în continuare la aplicaţii vom folosi

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \sin\theta.$$

1.6.2 Exemple

1. Calculaţi $\iiint\limits_V \frac{x}{x^2+y^2} dxdydz$, unde V este regiunea din primul octant mărginită de sfera de rază 3.

Soluţie.



Vom trece la coordonate sferice:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}, \rho \in [0,3], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Avem:

$$dxdydz = \rho^2 \sin\theta \; d\rho d\theta d\varphi$$

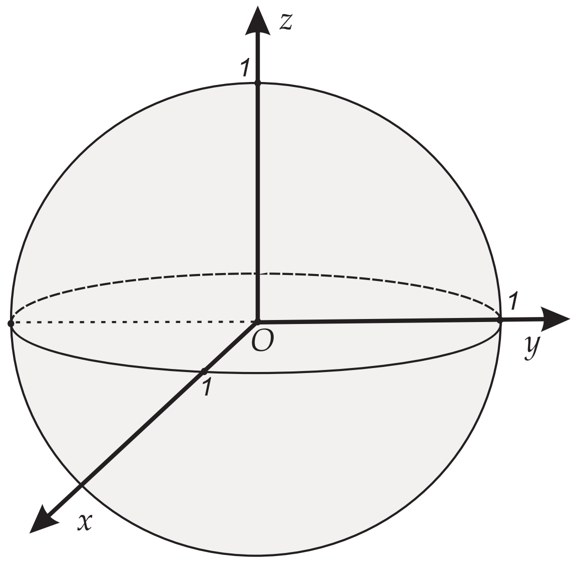
şi astfel

$$\iiint_V \frac{x}{x^2+y^2} dxdydz = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho\sin\theta\cos\varphi}{\rho^2\sin^2\theta} \cdot \rho^2 \sin\theta \; d\rho d\theta d\varphi = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos\phi d\rho d\theta d\varphi$$

$$== \left(\int_0^3 \rho d\rho\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi\right) = \frac{9\pi}{4}.$$

2. Calculaţi integrala $I = \iiint_B x^2 dxdydz$, unde B este bila unitate: $B = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$.

Soluţie.



Deoarece domeniul pe care se integrează este bila unitate, vom trece la coordonate sferice:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}, \rho \in [0,1], \varphi \in [0,2\pi], \theta \in [0,\pi].$$

Jacobianul schimbării de variabile are modulul $|J| = \rho^2 \sin\theta$. Integrala devine:

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho^4 \sin^3\theta \cos^2\phi d\rho d\theta d\phi = \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta\right).$$

Notăm cele tei integrale cu I_1, I_2 respectiv I_3. Evident, $I_1 = \dfrac{1}{5}$.

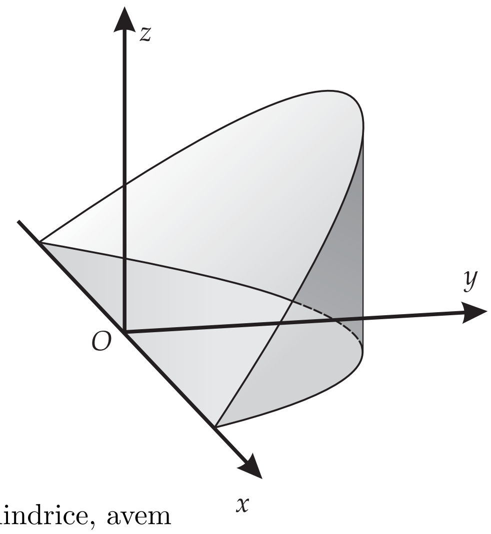
$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi.$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot \left(1 - \cos^2\theta\right) d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (\cos\theta)' \cdot \cos^2\theta d\theta \\ &= 2 + \frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Astfel, $I = \dfrac{4\pi}{15}$.

3. Folosing coordonatele cilindrice, să se calculeze $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dxdydz$, unde V este regiunea din cilindrul $x^2 + y^2 \leq 4$ situată între planul xOy şi planul $y = z$.

Soluţie. Domeniul V are următoarea reprezentare grafică (acceaşi problemă a fost rezolvată anterior, prin altă metodă):



Folosind coordonatele cilindrice, avem

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \sin\theta \\ z = z \end{cases}, \rho \in [0,2],\ \theta \in [0,\pi],\ z \in [0, \rho\sin\theta],$$

deoarece ecuaţia cilindrului $x^2 + y^2 = 4$ este $\rho = 2$, iar a planului $z = y$ este $z = \rho \cdot \sin\theta$. Obţinem

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz = \iint\limits_{[0,2]\times[0,\pi]} \left(\int_0^{\rho\sin\theta} \rho \cdot \rho\ dz \right) d\rho d\theta \\ &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,\pi]} \left(\rho^2 \cdot y \Big|_0^{\rho\sin\theta} \right) d\rho d\theta = \iint\limits_{[0,2]\times[0,\pi]} \rho^3 \cdot \sin\theta d\rho d\theta \\ &= \left(\int_0^2 \rho^3 d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \right) = 8. \end{aligned}$$

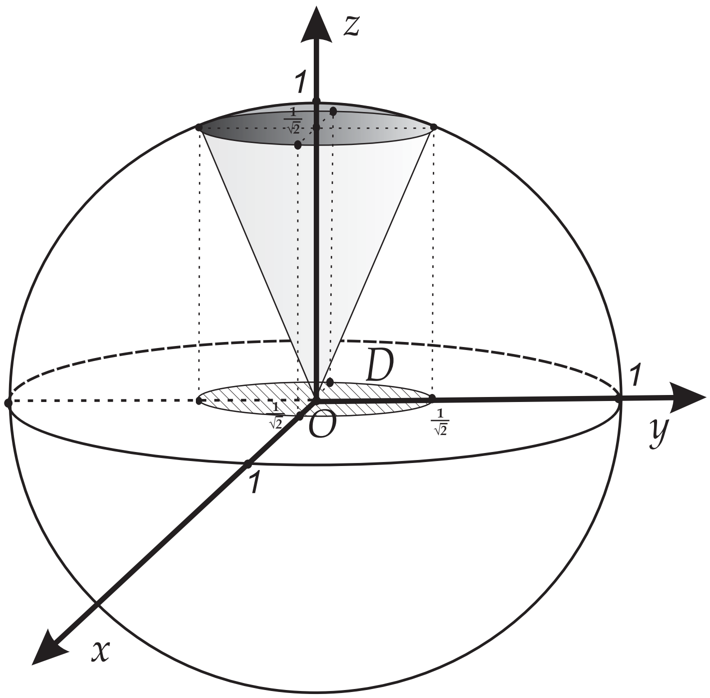
4. Să se determine masa porţiunii din conul solid $x^2 + y^2 \le z^2$ mărginită de sfera unitate, situată în semispaţiul $z \ge 0$ ştiind că are densitatea $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Soluţie. Corpul are forma unui "cornet de îngheţată", a cărui proiecţie pe planul xOy este dată de discul de intersecţie dintre suprafaţa conică şi sfera unitate. Intersecţia se află rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ z \ge 0. \end{cases}$$

Se obţine imediat că intersecţia este discul de rază $\frac{1}{\sqrt{2}}$ situat la înălţimea $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, în plan paralel cu xOy. Trecem la coordonate sferice, observând că generatoarea conului face un unghi de măsură $\frac{\pi}{4}$ cu axa Oz:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}, \rho \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$



Jacobianul transformării este $J = \rho^2 \sin\theta$. Avem:

$$M = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^3 \sin\theta \; d\rho d\varphi d\theta$$
$$= \left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta d\theta\right) = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$