CURS 2, Analiză matematică, semestrul I, 2014–2015

1 Şiruri de numere reale

Acest capitol este dedicat studiului şirurilor de numere reale, cu accent pe noţiunea de convergenţă a şirurilor. O parte dintre rezultatele prezentate sunt cunoscute din liceu. Vom întâlni însă şi altele, cum ar fi: şirul fundamental sau şirul Cauchy, lema lui Cesàro, limitele superioară şi inferioară pentru un şir numeric.

1.1 Noţiuni generale

Definiţia 1.1 *Numim* ***şir numeric*** *sau* ***şir de numere reale*** *o funcţie* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Vom nota $f(n)$ cu x_n, $n \in \mathbb{N}$ şi vom spune că x_n este termenul general al şirului f. Mai departe un şir îl vom nota prin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau (x_n) sau simplu, precizând termenul general, x_n.

Şirul fiind o funcţie, vor fi de interes proprietăţi specifice funcţiilor, în special monotonie şi mărginire.

Definiţia 1.2 *Spunem că un şir numeric este* ***majorat (minorat)*** *dacă mulţimea termenilor săi este majorată (minorată). Dacă un şir este şi majorat şi minorat vom spune despre acesta că este* ***mărginit****.*

Conform definiţiei, un şir este mărginit dacă şi numai dacă există numerele reale α şi β astfel încât

$$\alpha \le x_n \le \beta, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Având în vedere că orice interval $[\alpha, \beta]$ este conţinut într-un interval simetric centrat în origine, $[-M, M]$, mărginirea unui şir revine la:

$$\exists M > 0 \quad \text{astfel încât} \quad |x_n| \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Definiţia 1.3 *Spunem că un şir* (x_n) *este* ***nemărginit*** *dacă nu este mărginit.*

Conform celor de mai sus, un şir (x_n) este nemărginit dacă

$$\forall M > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ astfel încât } |x_n| > M.$$

Exemplul 1.4

1. *Şirul* $x_n = \sin n$ *este mărginit, deoarece* $|x_n| \le 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. *Şirul* $x_n = \dfrac{1}{n}$ *este mărginit, deoarece* $0 \le x_n \le 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
3. *Şirul* $x_n = n^2$ *este minorat de* 0 *dar nu este majorat (deci este nemărginit).*
4. *Şirul* $x_n = -n$ *este majorat de* 0 *dar nu este minorat (deci este nemărginit).*
5. *Şirul* $x_n = (-1)^n \cdot n$ *nu este nici majorat nici minorat.*

Definiţia 1.5

1. Spunem că un şir (x_n) este ***crescător*** *(respectiv* ***descrescător****) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ (respectiv $x_n \geq x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

2. Spunem că un şir (x_n) este ***strict crescător*** *(respectiv* ***strict descrescător****) dacă $x_n < x_{n+1}$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$) pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Un şir crescător sau descrescător va fi numit **şir monoton**, în timp ce un şir strict crescător sau strict descrescător va fi numit **şir strict monoton**.

Exemplul 1.6

1. Şirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ este un şir strict descrescător.

2. Şirul $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ este strict crescător.

3. Şirurile $x_n = \sin n, \quad y_n = (-1)^n, \quad z_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ nu sunt şiruri monotone.

Definiţia 1.7 *Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale. Şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte* ***subşir*** *al şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dacă există o funcţie $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strict crescătoare, astfel încât pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ să avem*

$$y_n = x_{\varphi(n)}.$$

Dacă vom nota $\varphi(k) = n_k$, atunci $y_k = x_{n_k}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Cum funcţia φ este strict crescătoare, va rezulta că $n_k \geq k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Exemplul 1.8

1. Şirul $x_{2n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ este subşir al şirului $x_n = (-1)^n$.

2. Pentru şirul $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$ se evidenţiază următoarele subşiruri:

$$x_{4k} = \sin 2k\pi = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$x_{4k+1} = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$x_{4k+2} = \sin(2k\pi + \pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
$$x_{4k+3} = \sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

1.2 Limita unui şir de numere reale

Definiţia 1.9 *Spunem că un şir de numere reale (x_n) are* ***limita*** *$x \in \mathbb{R}$ dacă orice vecinătate a lui x conţine toţi termenii şirului, cu excepţia, eventual, a unui număr finit dintre aceştia sau, echivalent:*

$$\forall V \in \mathcal{V}(x),\ \exists n_V \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_V : x_n \in V.$$

În acest caz vom scrie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ sau $x_n \to x$. Un şir care are limită în $\mathbb{R}$ se numeşte ***şir convergent****. Un şir care nu are limită în $\mathbb{R}$ se numeşte* ***şir divergent****.*

Următoarea caracterizare a limitei unui şir este foarte utilă.

Teorema 1.10 *Şirul de numere reale (x_n) este convergent la $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Presupunem întâi că $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece intervalul $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ este o vecinătate a lui x, conform definiţiei există un rang n_ε astfel încât începând cu acest rang toţi termenii şirului să se afle în acest interval. Altfel spus,

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon).$$

Dar acest lucru este echivalent cu $|x_n - x| < \varepsilon$.

Reciproc, să presupunem că are loc relaţia din enunţ şi fie V o vecinătate oarecare a lui x. Conform definiţiei vecinătăţii, există un $\varepsilon > 0$ astfel încât $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset V$. Atunci, conform ipotezei, există un rang n_ε începând cu care toţi termenii şirului satisfac inegalitatea

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Acest lucru este echivalent cu $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ şi, cu atât mai mult, $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Deci, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

Proprietatea enunţată în Teorema 1.10 poate fi luată ca definiţie pentru limita unui şir de numere reale. O vom numi definiţia cu ε, iar definiţia iniţială o vom numi definiţia cu vecinătăţi a limitei unui şir.

Teorema 1.11 *Un şir $(x_n) \subset \mathbb{R}$ are limita $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă şirul $(|x_n - x|)$ are limita 0.*

Exemplul 1.12

1. Şirul $x_n = \dfrac{1}{n}$ are limita 0. Aceasta deoarece, conform proprietăţii lui Arhimede, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\varepsilon \cdot n_\varepsilon > 1$, adică $\dfrac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Dar atunci, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ avem

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

2. Şirul $x_n = 2^n$ nu este convergent. Acest şir este nemajorat şi strict crescător. În consecinţă, o vecinătate de forma $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ a unui număr real x, nu poate conţine decât un număr finit de termeni ai şirului.

3. Şirul $x_n = (-1)^n$ nu este convergent. Dacă presupunem că există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, pentru $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|(-1)^n - x| < \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Dar atunci, dacă $n > n_\varepsilon$ avem şi $n+1 > n_\varepsilon$ iar

$$2 = \left|(-1)^n - (-1)^{n+1}\right| \leq |(-1)^n - x| + \left|(-1)^{n+1} - x\right| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

ceea ce este absurd.

1.3 Proprietăţi ale şirurilor convergente

Vom prezenta în această secţiune câteva proprietăţi de bază ale şirurilor convergente.

Teorema 1.13 *Dacă un şir de numere reale are limită reală, atunci aceasta este unică.*

Demonstraţie. Să presupunem prin reducere la absurd că există un şir (x_n) care admite două limite diferite, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Atunci, conform proprietăţii de separaţie Hausdorff, există două vecinătăţi disjuncte ale celor două numere, U şi respectiv V. Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell_1$, conform definiţiei limitei, în afara lui U rămâne doar un număr finit de termeni. Astfel, V nu poate conţine decât un număr finit de termeni ai şirului, iar în afara sa rămân o infinitate de termeni (cel puţin toţi termenii care se află în U). Acest lucru contrazice însă faptul că $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell_2$. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă şi deci limita unui şir, dacă există, este unică. □

Următorul rezultat se demonstrează imediat, folosind definiţia limitei unui şir.

Teorema 1.14 *Dacă unui şir îi adăugăm sau eliminăm un număr finit de termeni, atunci natura şirului nu se schimbă. În caz de convergenţă nu se schimbă nici limita.*

Mai mult, deoarece poziţia termenilor unui şir pe dreapta reală nu depinde de rangul termenilor, ci de valoarea lor, are loc şi următorul rezultat.

Teorema 1.15 *Dacă schimbăm ordinea termenilor unui şir, natura şirului nu se schimbă, iar în caz de convergenţă nu se schimbă nici limita şirului.*

Teorema 1.16 *Orice subşir al unui şir convergent este convergent şi are aceeaşi limită.*

Demonstraţie. Fie (x_n) un şir convergent, cu $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şi (x_{n_k}) un subşir al său. Conform definiţiei limitei,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon.$$

Dar, dacă (x_{n_k}) este un subşir, am văzut că $n_k \geq k$. Atunci, pentru orice $k \geq n_\varepsilon$ avem $n_k \geq k \geq n_\varepsilon$ şi deci $|x_{n_k} - x| < \varepsilon$, ceea ce arată că $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. □

Observaţia 1.17 *Conform acestei teoreme, dacă un şir are două subşiruri convergente la limite diferite, atunci şirul este divergent. Astfel, de exemplu, şirul* $x_n = (-1)^n$ *analizat anterior conţine subşirurile* $x_{2n} = 1$, *care are limita* 1, *şi* $x_{2n+1} = -1$, *care are limita* -1. *Deci,* $x_n = (-1)^n$ *este un şir divergent.*

Teorema 1.18 *Orice şir convergent este mărginit.*

Demonstraţie. Fie (x_n) un şir convergent, $x_n \to x$. Luăm în definiţia cu ε pe $\varepsilon = 1$. Atunci există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_1$ să avem $|x_n - x| < 1$. Atunci, pentru orice $n \geq n_1$,

$$|x_n| \leq |x_n - x| + |x| \leq 1 + |x|.$$

Luând acum $M := \max\{|x_1|, ..., |x_{n_1}|, 1 + |x|\}$ avem $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, adică şirul (x_n) este mărginit. □

Consecinţa 1.19 *Dacă un şir nu este mărginit, atunci el este divergent.*

Observaţia 1.20 *Mărginirea este o condiţie necesară, nu şi suficientă pentru convergenţă. De exemplu şirul* $x_n = (-1)^n$ *deşi este mărginit, nu este convergent.*

Teorema 1.21 (Criteriul majorării) *Dacă pentru şirul* (x_n) *există* $x \in \mathbb{R}$ *şi un şir de numere pozitive* (α_n) *convergent la* 0 *astfel încât*

$$|x_n - x| \leq \alpha_n, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

atunci (x_n) *este convergent şi* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Demonstraţie. Şirul α_n fiind convergent la 0, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. astfel încât $\alpha_n < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Dar atunci, din ipoteză, rezultă că

$$|x_n - x| < \alpha_n < \varepsilon$$

pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, adică $x_n \to x$. $\square$

1.4 Operaţii cu şiruri convergente

În continuare ne vor preocupa operaţiile cu şiruri şi legăturile între limitele şirurilor şi limita rezultatului operaţiei.

Dacă (a_n) şi (b_n) sunt două şiruri de numere reale, definim:

$$\begin{aligned}
&(a_n) \pm (b_n) := (a_n \pm b_n);\\
&(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n);\\
&\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right), \text{ dacă } b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.22 *Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri convergente, cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Atunci:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda a$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$, *dacă* $b \neq 0$.

Observaţia 1.23 *Din punctul (iii) se obţine un rezultat foarte util:*

$$\text{dacă } (a_n) \text{ este un şir mărginit iar } b_n \to 0 \text{ atunci } a_n b_n \to 0.$$

Astfel, de exemplu, şirul $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$ *are limita* 0*, deoarece şirul* $\sin n$ *este un şir mărginit de* 1 *iar* $\dfrac{1}{n} \to 0$.

Teorema 1.24 *Fie (a_n) şi (b_n) două şiruri convergente, $a_n \to a$, $b_n \to b$. Dacă $a_n \leq b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $a \leq b$.*

Observaţia 1.25 *Chiar dacă inegalitatea dintre termenii celor două şiruri din teorema anterioară este strictă, putem avea $a = b$. De exemplu, pentru $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ şi $b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ avem $a_n < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ dar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.*

Teorema 1.26 (Teorema cleştelui) *Considerăm trei şiruri de numere reale (x_n), (y_n), (z_n) astfel încât*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell \in \mathbb{R}$, atunci şirul (y_n) este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell$.

Demonstraţie. Scădem din fiecare membru al inegalităţii date x_n. Obţinem:

$$0 \leq y_n - x_n \leq z_n - x_n \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - x_n) = 0$. Aplicând acum criteriul majorării pentru şirul $(y_n - x_n)$ obţinem convergenţa acestui şir, cu

$$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0.$$

Dar (x_n) este şir convergent şi atunci

$$y_n = (y_n - x_n) + x_n$$

este de asemenea convergent, fiind o sumă de două şiruri convergente. Mai mult,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) + \lim_{n\to\infty} x_n = 0 + x = x. \qquad \square$$

Cu ajutorul proprietăţilor evidenţiate până în acest moment pot fi stabilite următoarele limite fundamentale:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \text{ pentru orice } \alpha > 0.$$
$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0 \text{ pentru orice } a \text{ cu } |a| < 1.$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ pentru orice } a > 0.$$

1.5 Rezultate fundamentale

Prezentăm în cele ce urmează câteva teoreme centrale în teoria şirurilor de numere reale.

Teorema 1.27 (de convergenţă a şirurilor monotone)

1. *Un şir de numere reale (x_n) crescător şi majorat este convergent, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.*
2. *Un şir de numere reale (x_n) descrescător şi minorat este convergent, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.*

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm punctul 1. Pentru punctul 2., dacă (x_n) este descrescător, atunci $(-x_n)$ este crescător. Rezultatul este complet demonstrat aplicând 1. şi relaţia

$$\sup(-x_n) = -\inf x_n.$$

Pentru a demonstra 1., fie $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (există în $\mathbb{R}$ deoarece şirul este majorat). Conform teoremei de caracterizare a marginii superioare,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : M - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}.$$

Dar atunci, deoarece şirul (x_n) este crescător, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ avem:

$$M - \varepsilon \leq x_{n_\varepsilon} \leq x_n \leq M < M + \varepsilon$$

sau, echivalent,

$$|x_n - M| < \varepsilon.$$

Dar acest lucru arată că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (ceea ce trebuia demonstrat). $\square$

De multe ori în probleme apar şiruri pentru care nu interesează valoarea limitei ci numai natura şirului: convergent sau divergent. În toate rezultatele de până acum am folosit valoarea limitei. Se pune întrebarea dacă se poate pune în evidenţă o condiţie în baza căreia să decidem dacă un şir este convergent sau nu, fără a avea nevoie de valoarea limitei.

Definiţia 1.28 *Spunem despre un şir de numere reale că este* ***şir Cauchy*** *sau* ***şir fundamental*** *dacă*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_\varepsilon : |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Luând în definiţia anterioară $n \geq n_\varepsilon$ şi $m = n + p$, unde $p \in \mathbb{N}$, obţinem formularea echivalentă:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} : |x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Legătura dintre şirurile fundamentale şi şirurile Cauchy este dată de următoarea teoremă.

Teorema 1.29 (Cauchy) *Un şir de numere reale este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental.*

Exemplul 1.30

1. Considerăm şirul

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}.$$

Acest şir nu este şir fundamental, deci nu este convergent. Într-adevăr, observăm că

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} + ... + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p} \quad \forall n, p \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci, pentru $p = n$ obţinem $|x_{2n} - x_n| \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Deci şirul dat nu îndeplineşte condiţia de şir Cauchy.

2. Pentru şirul

$$x_n = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + ... + \frac{\sin nx}{2^n}$$

avem:

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + ... + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \leq \\
&\leq \frac{|\sin(n+1)x|}{2^{n+1}} + ... + \frac{|\sin(n+p)x|}{2^{n+p}} \leq \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + ... + \frac{1}{2^{n+p}} \leq \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Cum $\frac{1}{2^n} \to 0$, rezultă că şirul este Cauchy, deci convergent.

1.6 Şiruri cu limita $+\infty$ şi $-\infty$

Dintre şirurile divergente se disting unele care au o comportare similară cu cele convergente. De exemplu, şirul $x_n = n$ este divergent, fiind nemărginit. Ne amintim totuşi că vecinătăţile lui $+\infty$ conţin intervale de forma $(a, +\infty]$ şi remarcăm că toţi termenii şirului x_n, de la un rang încolo, se află într-un astfel de interval. De asemenea, pentru a permite introducerea unor noţiuni în secţiunea următoare, vom permite ca şirurile să aibă ca elemente $\pm\infty$. Se va numi aşadar şir de elemente din $\overline{\mathbb{R}}$ orice funcţie $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Definiţia 1.31 *Spunem că un şir (x_n) din $\overline{\mathbb{R}}$ are **limita** $+\infty$ (sau $-\infty$) sau că este **divergent la** $+\infty$ (respectiv $-\infty$) dacă orice vecinătate a punctului $+\infty$ conţine toţi termenii şirului, cu excepţia, eventual, a unui număr finit dintre aceştia.*

Aceasta este definiţia cu vecinătăţi. Ca şi la şirurile convergente, avem şi o definiţie cu ε, pe care o vom da ca proprietate echivalentă cu cea definită mai sus.

Teorema 1.32

1. Şirul (x_n) din $\overline{\mathbb{R}}$ are limita $+\infty$ dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : x_n \geq \varepsilon.$$

2. Şirul (x_n) din $\overline{\mathbb{R}}$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon : x_n \leq -\varepsilon.$$

Demonstraţie. 1. Fie (x_n) un şir cu limita $+\infty$. şi fie $\varepsilon > 0$. Mulţimea $(\varepsilon, \infty]$ este o vecinătate a lui $+\infty$, aşa încât, conform definiţiei, conţine toţi termenii, cu excepţia, eventual a unui număr finit dintre aceştia. Astfel, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $\forall n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n \in (\varepsilon, \infty]$ sau, echivalent, $x_n > \varepsilon$.

Reciproc, să presupunem că are loc relaţia din enunţ şi fie V o vecinătate a punctului $+\infty$. Există $\varepsilon > 0$ astfel încât $(\varepsilon, \infty] \subset V$. Corespunzător, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ să avem $x_n \geq \varepsilon$. Atunci, cu atât mai mult pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ avem $x_n \in V$ şi afirmaţia este demonstrată.

În mod cu totul analog se procedează pentru punctul 2. □

Ca şi în cazul şirurilor convergente, putem pune în evidenţă câteva criterii pentru ca un şir să divească la $+\infty$ sau $-\infty$, dar şi reguli de calcul pentru astfel de şiruri.

Teorema 1.33

1. Dacă (α_n) este un şir cu limita $+\infty$ iar (x_n) este un şir astfel încât $\alpha_n \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2. Dacă (β_n) este un şir cu limita $-\infty$ iar (x_n) este un şir astfel încât $x_n \leq \beta_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Teorema 1.34

1. Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, atunci $x_n + y_n \to +\infty$.

2. Dacă $x_n \to -\infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, atunci $x_n + y_n \to -\infty$.

3. Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in (0, \infty]$, atunci $x_n \cdot y_n \to +\infty$.

4. Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to y$, unde $y \in [-\infty, 0)$, atunci $x_n \cdot y_n \to -\infty$.

Observaţia 1.35

1. De remarcat că în demonstraţia teoremei anterioare nu se foloseşte esenţial faptul că $y_n \to y$. Teorema rămâne valabilă dacă în loc de $y_n \to y$ cerem doar (de exemplu) ca şirul (y_n) să fie mărginit inferior pentru punctul 1., respectiv superior, pentru punctul 2. Lăsăm cititorul să pună condiţii mai generale pentru punctele 3. şi 4.

2. Dacă $x_n \to \infty$ şi $y_n \to -\infty$ nu se poate spune nimic despre natura şirului $(x_n + y_n)$. De exemplu

- *pentru $x_n = n$ şi $y_n = -n$ avem $x_n + y_n \to 0$;*
- *pentru $x_n = n$ şi $y_n = -2n$ avem $x_n + y_n \to -\infty$;*
- *pentru $x_n = 2n$ şi $y_n = -n$ avem $x_n + y_n \to +\infty$;*
- *pentru $x_n = (-1)^n + n$ şi $y_n = -n$ avem $x_n + y_n = (-1)^n$, care nu are limită.*

Despre astfel de situaţii vom spune că sunt ***cazuri de nedeterminare****, sau* ***cazuri exceptate****.*

Teorema 1.36 *Dacă $x_n \to \infty$ sau $x_n \to -\infty$ atunci $\dfrac{1}{x_n} \to 0$. Invers, dacă $x_n \to 0$ şi (x_n) are un număr finit de termeni mai mici sau egali cu 0 (respectiv mai mari sau egali cu 0) atunci $\dfrac{1}{x_n}$ (definit cu excepţia acelor termeni pentru care $x_n = 0$) are limita $+\infty$ (respectiv $-\infty$).*

Observaţia 1.37 *Dacă nu punem condiţii suplimentare asupra şirului $x_n \to 0$ în teorema anterioară, nu mai putem asigura faptul că $\dfrac{1}{x_n} \to +\infty$ (sau $-\infty$). De exemplu, pentru şirul $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ avem $x_n \to 0$ dar $\dfrac{1}{x_n} = (-1)^n \cdot n$, care nu are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.*

Încheiem această parte din capitol cu un rezultat asupra şirurilor monotone de numere reale, a căror demonstraţie este imediată.

Teorema 1.38

1. Dacă un şir (x_n) este crecător şi nemărginit atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2. Dacă un şir (x_n) este descrecător şi nemărginit atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Consecinţa 1.39 *Orice şir monoton de numere reale are limită în $\overline{\mathbb{R}}$.*

2 Şiruri de puncte în $\mathbb{R}^k$

Considerăm în continuare spaţiul $\mathbb{R}^k$ înzestrat cu norma euclidiană

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2}, \quad \forall x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Definiţia 2.1 *Se numeşte şir de puncte în $\mathbb{R}^k$ o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$. Notăm şirul cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau (a_n), unde*

$$a_n = f(n) = (a_{1,n}, a_{2,n}, ..., a_{k,n}).$$

Exemplul 2.2

1. $x_n = \left(\frac{1}{n}, n^2\right)$ *este un şir de puncte din* $\mathbb{R}^2$

2. $x_n = \left(\sin\frac{1}{n}, \mathrm{arctg}(n^2-1), \frac{3}{n+1}\right)$ *este un şir de puncte din* $\mathbb{R}^3$

3. $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{k}{n}\right)$ *este un şir de puncte în* $\mathbb{R}^k$*. Se remarcă faptul că un şir de puncte din* $\mathbb{R}^k$ *se compune din k şiruri, câte unul pentru fiecare componentă.*

Definiţia 2.3 *Spunem că un şir de puncte din* $\mathbb{R}^k$ *este mărginit dacă există* $M > 0$ *a.î.* $\|x_n\| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplul 2.4

1. Şirul $x_n = \left(\frac{1}{n}, n^2\right)$ *nu este mărginit deoarece* $\|x_n\| \geq n^2, \ \forall n \geq 1$.

2. Şirul $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{k}{n}\right)$ *este mărginit deoarece*

$$\|x_n\|_2 = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + ... + \frac{k^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{k(k+1)(2k+1)}}{\sqrt{6}n}$$

care este o cantitate mărginită, k fiind fixat. De observat că dacă una din componentele unui şir de elemente din $\mathbb{R}^k$ *nu este mărginită, atunci şirul nu este mărginit. De fapt, avem următorul rezultat*

Teorema 2.5 *Un şir de puncte din* $\mathbb{R}^k$ *este mărginit dacă şi numai dacă toate şirurile componente sunt şiruri mărginite (de numere reale).*

Demonstraţie. Fie (x_n) un şir mărginit de puncte din $\mathbb{R}^k$. Notăm:

$$x_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n})$$

pentru a pune în evidenţă componentele elementului x_n. Evident, avem

$$|x_{i,n}| \leq \|x_n\| \leq M,$$

unde M este constanta de mărginire a şirului (x_n). Altfel spus, şirul de pe componenta i este mărginită.

Reciproc, dacă toate şirurile $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sunt mărginite, există $M_i > 0, \ i = 1..k$ a.i. $|x_{i,n}| \leq M_i \ \forall n \geq 1$. Dar atunci,

$$\|x_n\| = \sqrt{x_{1,n}^2 + ... + x_{k,n}^2} \leq \sqrt{M_1^2 + ...M_k^2}$$

iar ultima cantitate este o constantă ce nu depinde de n, adică şirul (x_n) este mărginit. □

Observaţia 2.6 *Este clar că noţiunea de şir monoton nu mai are sens în cazul şirurilor de puncte în* $\mathbb{R}^k, \ k > 1$.

Definiţia 2.7 *Fie* (x_n) *un şir de puncte din* $\mathbb{R}^k$*. Spunem că şirul* (x_n) *are limita* $\ell \in \mathbb{R}^k$ *dacă în orice vecinătate a lui* ℓ *se găsesc toţi termenii şirului cu excepţia, eventual, a unui număr finit dintre aceştia:*

$$\forall \ V \in \mathcal{V}(\ell) \ \exists \ n_V \in \mathbb{N}, \ a.î. \ x_n \in V \ \forall \ n \geq n_V$$

Un şir care are limită se numeşte şir convergent. Vom nota $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$.

Ca şi în cazul şirurilor de numere reale, se pot demonstra imediat următoarele proprietăţi pentru şiruri de puncte în $\mathbb{R}^k$:

Teorema 2.8 (proprietăţi ale şirurilor convergente)

1. *Un şir convergent are limită unică.*
2. *Orice şir convergent este mărginit.*
3. *Prin schimbarea ordinii termenilor unui şir convergent se obţine tot un şir convergent, având aceeaşi limită.*
4. *Dacă unui şir i se adaugă sau i se suprimă un număr finit de termeni, natura şirului nu se modifică iar în caz de convergenţă, nici limita.*

Pentru a determina limita unui şir de puncte din $\mathbb{R}^k$ ne vom folosi de următorul rezultat:

Teorema 2.9 *Fie $(x_n)_{n\geq 1} = ((x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k,n}))$ un şir de puncte din $\mathbb{R}^k$. Acest şir este convergent dacă şi numai dacă şirurile componentelor: $(x_{1,n})_{n\geq 1}, ..., (x_{k,n})_{n\geq 1}$ sunt convergente.*

Mai mult, în caz de convergenţă limita lui (x_n) are drept componente limitele şirurilor componente, altfel spus:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(\lim_{n\to\infty} x_{1,n}, ..., \lim_{n\to\infty} x_{k,n}\right).$$

Exemplul 2.10 *Limita şirului* $x_n = \left(\sin\dfrac{1}{n}, \operatorname{arctg}(n+1)\right)$ *este punctul* $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *deoarece* $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{n} = 0$ *iar* $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(n+1) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exemplul 2.11 *Şirul* $x_n = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, ..., \dfrac{k}{n}\right)$ *este convergent iar* $\lim\limits_{n\to\infty} x_{1,n} = ... = \lim\limits_{n\to\infty} x_{k,n} = 0$, *de unde* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = (0, 0, ..., 0)$.

Exemplul 2.12 *Şirul* $x_n = \left(\dfrac{1}{n}, (-1)^n\right)$ *nu este convergent deoarece şirul de pe a doua componentă,* $x_{2,n} = (-1)^n$ *este un şir divergent.*