CURS 3, Analiză matematică, semestrul I, 2014–2015

1 Serii numerice

Un caz particular de şiruri, date ca sume, prezintă importante particularităţi şi aplicaţii şi va fi studiat în cele ce urmează.

1.1 Serii convergente. Serii divergente

În liceu au fost studiate şi două tipuri de şiruri cu proprietăţi deosebite: progresiile aritmetice şi geometrice:

(x_n) este o **progresie aritmetică de raţie** r dacă $x_{n+1} = x_n + r,\ \forall n;$

(x_n) este o **progresie geometrică de raţie** q dacă $x_{n+1} = q \cdot x_n,\ \forall n.$

Acestor şiruri li s-a ataşat suma primilor n termeni, S_n. Se arată uşor că

$$\text{pentru progresii aritmetice: } S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n = \left(x_1 + \frac{(n-1)\,r}{2} \right) \cdot n$$

$$\text{pentru progresii aritmetice: } S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Observăm că în cazul progresiilor aritmetice şirul (S_n) este divergent cu excepţia unui singur caz: $x_1 = r = 0$ în vreme ce pentru progresiile geometrice şirul (S_n) este convergent fie dacă $q \in (-1, 1)$, $x_1 \in \mathbb{R}$, fie $x_1 = 0$, $q \in \mathbb{R}$. Mai mult, pentru $q \in (-1,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{x_1}{1-q}$.

În continuare, vom generaliza şi vom încerca să răspundem la întrebarea: “Dat un şir oarecare (x_n), ce se poate spune despre şirul (S_n), al sumei primilor n termeni din şir ?”

Definiţia 1.1 *Fiind dat un şir de numere reale (x_n), cuplul format din şirurile (x_n) şi (S_n), unde*

$$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n, \quad \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

*se numeşte **serie** de termen general (x_n). Şirul (S_n) se numeşte **şirul sumelor parţiale** asociat şirului (x_n).*

Vom nota o serie prin

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \text{ sau } \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \text{ sau } x_0 + x_1 + ... + x_n + ... \text{ sau, simplu, } \sum a_n$$

Definiţia 1.2 *1. Spunem că seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este* ***convergentă*** *dacă şirul sumelor parţiale* (S_n) *asociat lui* (a_n) *este convergent în* $\mathbb{R}$. *În acest caz,*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

se numeşte ***suma seriei*** *şi o vom nota prin* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *sau* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, *sau* $x_0 + x_1 + ... + x_n + ...$

2. Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este* ***divergentă*** *dacă şirul sumelor parţiale,* (S_n), *este divergent.*

Observaţia 1.3 *1. Prin notaţia* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *vom înţelege fie seria cu termenul general* x_n, *fie suma seriei, la ce anume se face referire reieşind din context.*

2. Uneori seria nu va fi indexată de la 0, *ci de la un număr natural* n_0 : $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} x_n$. *Convenim să notăm tot prin* S_n *suma termenilor până la cel de rang* n: $S_n = x_{n_0} + ...x_n$.

3. Faptul că o serie este convergentă sau divergentă îl vom numi ***natura seriei.***

Exemplul 1.4 *Seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ *poartă numele de* ***serie geometrică*** *(termenul general al seriei provine dintr-o serie geometrică în care primul termen are valoare* a *iar raţia este egală cu* q*). Am văzut că această serie este convergentă pentru orice* q *astfel încât* $|q| < 1$. *Suma seriei este, în acest caz,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}.$$

Exemplul 1.5 *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *este convergentă. Aceasta pentru că şirul sumelor parţiale poate fi scris:*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \end{aligned}$$

deci

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

iar de aici vedem că $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, *adică şirul sumelor parţiale este convergent.*

Exemplul 1.6 *Ca o generalizare pentru exemplul anterior, dacă termenul general al unei serii* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *poate fi scris sub forma*

$$x_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este o* ***serie telescopică.*** *Se observă că şirul sumelor parţiale este dat de:* $S_n = \alpha_1 - \alpha_n$ *şi deci seria este convergentă dacă şi numai dacă* (α_n) *este un şir convergent, caz în* *care*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \alpha_1 - \lim_{n\to\infty} \alpha_n.$$

Exemplul 1.7 *Seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ *este divergentă. Şirul sumelor parţiale este dat de*

$$S_{2n} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{iar } S_{2n+1} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplul 1.8 *Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, *numită* ***seria armonică*** *deoarece fiecare termen este media armonică a termenilor învecinaţi, este divergentă. Şirul sumelor parţiale este dat de:*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$$

şi am vazut în cursul precedent că acesta este un şir divergent (are limita $+\infty$*).*

Exemplele de mai sus prezintă şi serii pentru care putem preciza şi suma acestora. În general, asemenea situaţii sunt destul de rare, aşa că ne vom axa în special pe a stabili natura unei serii, fără a găsi, efectiv suma seriei.

1.2 Proprietăţi generale

Teorema 1.9 *Dacă unei serii i se adaugă sau i se suprimă un număr finit de termeni, atunci natura seriei nu se schimbă.*

Demonstraţie. Să presupunem că dintr-o serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ am eliminat un număr finit de termeni. Fie aceştia $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_p}$, cu $n_1 \leq n_2 ... \leq n_p$. Atunci, pentru orice $n \geq n_p$ avem $T_n = S_n - s$, unde cu (S_n) am notat şirul sumelor parţiale pentru seria iniţială, (T_n) este şirul sumelor parţiale pentru seria nou obţinută iar

$$s = x_{n_1} + x_{n_2} + ... + x_{n_p}.$$

Numărul s fiind o constantă, natura şirului (T_n) nu va depinde de acesta. În consecinţă, (T_n) este convergent dacă şi numai dacă (S_n) este convergent. În plus, în caz de convergenţă avem

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} S_n - s,$$

adică suma seriei nou obţinută se modifică cu suma finită a termenilor care se elimină.

Se raţionează similar pentru situaţia în care adăugăm seriei un număr finit de termeni. □

Teorema 1.10 (condiţia necesară de convergenţă) *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este o serie convergentă, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstraţie. Fie $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Din relaţia evidentă $x_n = S_n - S_{n-1}$ obţinem, prin trecere la limită:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0. \qquad \square$$

Consecinţa 1.11 *Dacă termenul general al unei serii nu este convergent la* 0*, atunci seria este divergentă.*

Observaţia 1.12 *Condiţia ca* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *este una necesară, nu şi suficientă pentru ca seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *să fie convergentă. De exemplu, seria armonică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *este divergentă, deşi* $\frac{1}{n} \to 0$.

Analizând din nou Exemplul 1.7, putem spune imediat că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ *este divergentă, deoarece termenul general nu are limită.*

Teorema 1.13 (operaţii cu serii) *Considerăm seriile* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *şi numărul real nenul* λ*.*

1. Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt convergente, atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ *este convergentă şi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

2. Seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\lambda x_n)$ *au aceeaşi natură.*

Demonstraţie. 1. Notând cu S_n, T_n, U_n şirurile sumelor parţiale pentru seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ şi, respectiv, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ avem

$$U_n = S_n + T_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Din proprietăţile şirurilor convergente, rezultă că (U_n) este convergent şi că $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n + \lim\limits_{n\to\infty} T_n$, ceea ce spune că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$.

2. Rezultă imediat din faptul că pentru orice număr real nenul λ un şir oarecare (x_n) are aceeaşi natură cu şirul (λx_n). $\square$

Observaţia 1.14 *Bineînţeles, dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt serii divergente, se poate întâmpla ca seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ *să fie una convergentă. De exemplu, este cazul seriilor* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1}$*. După cum am văzut anterior, acestea sunt serii divergente, dar* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n + (-1)^{n-1}\right]$ *este convergentă.*

Consecinţa 1.15 *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *sunt serii convergente, atunci seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n)$ *este convergentă şi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n - \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

Teorema 1.16 (Criteriul lui Cauchy) *Seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât pentru orice* $n \geq n_\varepsilon$ *şi orice* $p \in \mathbb{N}^*$, *să avem*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. O serie converge dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale, (S_n) este convergent, ceea ce este echivalent cu faptul că (S_n) este şir Cauchy, adică

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Dar $S_{n+p} - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + ... + x_{n+p}$ şi demonstraţia este completă. □

1.3 Serii cu termeni pozitivi

În această parte ne vom ocupa de seriile cu termeni pozitivi. Aceste serii au proprietatea că şirul sumelor parţiale este crescător:

$$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0.$$

Astfel, o serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale este majorat. Altfel spus, pentru serii cu termeni pozitivi mărginirea şirului sumelor parţiale este un criteriu suficient pentru convergenţă. Pe parcurs vom compara diferite serii cu unele a căror natură este cunoscută.

Teorema 1.17 (Criteriul de comparaţie de speţa I) *Fie seriile cu termeni pozitivi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *astfel încât* $x_n \leq y_n$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Fie $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ şi $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k$ pentru $n \in \mathbb{N}$. Din $x_n \leq y_n$ pentru orice n rezultă că $S_n \leq T_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

1. Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci T_n este majorat, deci şi S_n este majorat şi atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci şirul S_n este nemajorat şi atunci nici şirul T_n nu este majorat, deci, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă. □

Exemplul 1.18 *1. Seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, *cu* $\alpha < 1$ *este divergentă. Este suficient să remarcăm că pentru* $\alpha < 1$ *avem*

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}.$$

Dar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *este divergentă şi atunci, conform criteriului de comparaţie I rezultă ca şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *este divergentă.*

2. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *este convergentă. Într-adevăr,*

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} \quad \forall n \geq 2$$

şi cum seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ *este convergentă, rezultă că şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *este convergentă.*

Mai departe, pentru orice $\alpha > 2$, *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ *este convergentă.*

Teorema 1.19 (Criteriul de comparaţie cu limită) *Fie seriile cu termeni strict pozitivi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$.

1. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lambda \in (0,\infty)$, *atunci cele două serii au aceeaşi natură.*

2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 0$, *atunci dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă rezultă că şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă, iar dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă.*

3. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \infty$, *atunci dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă rezultă că şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, iar dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Exerciţiu! □

Exemplul 1.20 *Folosind acest criteriu, rezultă că seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$ *este divergentă. Întradevăr, considerând seria armonică* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *avem*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

deci cele două serii au aceeaşi natură. Ştim însă că seria armonică este divergentă.

Exemplul 1.21 (seria armonică generalizată) *Seria*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$$

se numeşte ***seria armonică generalizată****. Ea este:* ***convergentă dacă*** $\alpha > 1$ ***şi este divergentă în rest.***

Pentru a demonstra ultima afirmaţie, am văzut mai sus că seria este divergentă pentru $\alpha \leq 1$ *şi convergentă pentru* $\alpha \geq 2$. *Pentru a arăta că este convergentă dacă* $\alpha \in (1,2)$, *se poate aplica un alt criteriu, numit criteriul condensării.*

Teorema 1.22 (Cauchy - Hadamard: criteriul rădăcinii) *Fie seria cu termeni pozitivi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$.

1. *Dacă* $\lambda < 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\lambda > 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1. Fie $\lambda < 1$. Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $\lambda + \varepsilon < 1$. Conform definiţiei, $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}$. Există atunci un număr natural n_ε astfel încât $\sqrt[n]{x_n} < \lambda + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, adică $x_n < (\lambda + \varepsilon)^n$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Dar seria $\sum\limits_{n=n_\varepsilon}^{\infty} (\lambda + \varepsilon)^n$ este convergentă, raţia $\lambda + \varepsilon$ fiind subunitară. Conform criteriului de comparaţie de prima speţă rezultă acum că şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Să presupunem acum că $\lambda > 1$. Aplicând din nou definiţia, avem:

$$1 < \lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n}.$$

În consecinţă, termenul general nu tinde la 0, deci seria este divergentă. □

Observaţia 1.23 *Dacă* $\lambda = 1$ *nu putem decide dacă seria este convergentă sau divergentă. Pentru ambele serii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *avem* $\lambda = 1$, *dar prima este divergentă, iar a doua convergentă.*

Teorema 1.24 (D'Alembert: criteriul raportului) *Fie seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *cu* $x_n > 0$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Dacă există* $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, *atunci:*

1. *Dacă* $\ell < 1$, *seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\ell > 1$, *seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Se foloseşte proprietatea: dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$, atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$. Concluziile sunt atunci imediate, din criteriul rădăcinii. □

Observaţia 1.25 *1. Ca şi în cazul criteriului rădăcinii, dacă*

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1,$$

nu putem decide dacă seria de termen general x_n *este convergentă sau divergentă. Aceleaşi două serii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *sunt exemplu în acest sens.*

2. Există şi situaţii în care nu putem aplica nici criteriul rădăcinii, nici criteriul raportului pentru a deduce convergenţa unei serii. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *este un exemplu în acest sens.*

Atunci când folosind criteriul raportului nu putem preciza natura unei serii, putem utiliza următorul criteriu:

Teorema 1.26 (Criteriul lui Raabe - Duhamel) *Fie seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$*, cu* $x_n > 0$*, pentru orice* n*. Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \rho$*, atunci*

1. *dacă* $\rho > 1$*, seria este convergentă;*
2. *dacă* $\rho < 1$*, seria este divergentă.*

Observaţia 1.27 *Criteriul Raabe - Duhamel este mai general decât cel al raportului. Dacă există* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda \neq 1$*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } \lambda < 1 \\ -\infty, & \text{dacă } \lambda > 1, \end{cases}$$

ceea ce conduce la concluziile criteriului raportului.

Exemplul 1.28 *Să se studieze natura seriei*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Având în vedere forma termenului general, vom încerca să aplicăm criteriul raportului cu limită. Calculând $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$*, obţinem*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)},$$

raport care are limita 1, deci din criteriul raportului nu putem trage o concluzie.

Aplicăm mai departe criteriul lui Raabe-Duhamel:

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n \cdot \frac{-6n-5}{(2n+2)(2n+3)} \to -\frac{3}{2}.$$

Fiindcă limita este subunitară, seria este divergentă.

Exemplul 1.29 *Să stabilim natura seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$*, în funcţie de parametrul real* $a > 0$*. Din nou, apelăm mai întâi la criteriul raportului cu limită:*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = a \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n+1}} = a \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}} \to a,$$

având în vedere că $1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n} \to +\infty$*.*

Astfel, dacă $a > 1$ *seria este divergentă iar dacă* $a < 1$*, seria este convergentă. Pentru* $a = 1$ *nu putem trage o concluzie din criteriul raportului, aşa că încercăm să aplicăm criteriul lui Raabe - Duhamel. Notând* $1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n} = a_n$*, avem:*

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = n \cdot \frac{1}{(n+1)\,a_n} \to 0$$

deoarece $\dfrac{n}{n+1} \to 1$ *iar* $a_n \to +\infty$*. Astfel, conform criteriului lui Raabe - Duhamel, seria este divergentă pentru* $a = 1$*.*

1.4 Serii cu termeni oarecare

Pentru serii care nu au termeni pozitivi nu mai putem aplica criteriile din secţiunea precedentă. Ne vom referi în continuare la un caz particular.

1.4.1 Serii alternate

Definiţia 1.30 *Spunem despre o serie de numere reale* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *că este o* ***serie alternată*** *dacă* $x_n \cdot x_{n+1} < 0$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$*, adică dacă termenii săi alternează ca semn.*

Orice serie alternată poate fi pusă în una din formele:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x_n \text{ sau } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$$

cu $x_n \geq 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Seriile

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + ... \quad \text{sau}$$
$$-1 + 2 - 3 + 4 - ...$$

sunt serii alternate.

Teorema 1.31 (Criteriul lui Leibniz) *Dacă* (x_n) *este un şir descrescător cu limita* 0*, atunci seria alternată* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ *este convergentă.*

Exemplul 1.32 *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *este o serie convergentă. Tot convergentă este şi seria* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{x}{n}$*, pentru orice* $x \geq 0$*, şirul* $\left(\sin \frac{x}{n}\right)$ *fiind, de la un rang încolo, descrescător.*

1.4.2 Serii absolut convergente. Serii semiconvergente

Dacă având dată o serie cu termeni oarecare $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ studiem seria modulelor, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, se remarcă faptul că putem obţine atât serii convergente, cum este cazul pentru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, cât şi serii divergente, cum este cazul pentru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Se pune problema dacă există o legătură între convergenţa seriei modulelor şi convergenţa seriei iniţiale.

Definiţia 1.33 *Fie seria cu termeni oarecare* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$*.*

1. Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este* ***absolut convergentă*** *dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ *este convergentă. În acest caz, notăm* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *(AC).*

2. Spunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este* ***semiconvergentă*** *dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *este convergentă iar seria* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ *este divergentă. În acest caz, notăm* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *(SC).*

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este un exemplu de serie semiconvergentă, în vreme ce $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^2}{n^2}$ este un exemplu de serie absolut convergentă.

Teorema 1.34 *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *este absolut convergentă, atunci* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *este şi convergentă.*

Demonstraţie. Aplicăm criteriul lui Cauchy. Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ fiind convergentă, satisface condiţia Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} : |x_{n+1}| + ... + |x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dar atunci, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi $p \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n+1} + ... + x_{n+p}| \leq |x_{n+1}| + ... + |x_{n+p}| < \varepsilon.$$

Deci, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ îndeplineşte condiţia Cauchy, de unde este convergentă. □

Observaţia 1.35 *1. Reciproca acestei teoreme nu este adevărată: seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *este convergentă, fără a fi absolut convergentă.*

2. Pentru seriile cu termeni pozitivi cele două noţiuni sunt echivalente.

3. Deoarece seria modulelor ataşată unei serii cu termeni oarecare este o serie cu termeni pozitivi, putem studia absoluta convergenţă folosind criteriile stabilite pentru serii cu termeni pozitivi. În felul acesta, fiecare criteriu de convergenţă de la serii cu termeni pozitivi devine un criteriu de convergenţă pentru serii cu termeni oarecare.

4. În general, dacă seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ *este divergentă, nu se poate spune nimic despre natura seriei* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.