CURS 4, Analiză matematică, semestrul I, 2014–2015

1 Limite de funcţii

1.1 Definiţie. Proprietăţi generale

Fie $k, p \geq 1$, $A \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime nevidă şi $f : A \to \mathbb{R}^p$ o funcţie. În cazul în care vom considera norme pe spaţiile $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^p$, le vom nota $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^k}$ şi $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$, respectiv. Uneori vom nota ambele norme prin $\|\cdot\|$, contextul permiţându-ne să deducem pe care dintre spaţii este considerată norma respectivă. Ca de obicei, notăm cu A' mulţimea punctelor de acumulare ale mulţimii A, şi fie $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$.

Definiţia 1.1 *Spunem că funcţia f **are limita** ℓ **în punctul** a, şi notăm*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell, \text{ sau } f(x) \to \ell \text{ pentru } x \to a,$$

dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell)$, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, pentru orice x din $U \cap A$ diferit de a, să avem $f(x) \in V$, sau, formalizat,

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}(a) : f(U \cap A \setminus \{a\}) \subset V. \tag{1}$$

Observaţia 1.2 *Punctul a nu trebuie să aparţină neapărat mulţimii A, însă trebuie să existe puncte în mulţimea A oricât de apropiate de a, adică să fie punct de acumulare al mulţimii A.*

Teorema 1.3 (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a limitei) *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci f are limita ℓ în punctul a dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\|_{\mathbb{R}^k} < \delta : \|f(x) - \ell\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \tag{2}$$

Demonstraţie.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că (1) este satisfăcută şi fixăm $\varepsilon > 0$. Atunci, pentru $V := B(\ell, \varepsilon) \in \mathcal{V}(\ell)$, există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U \cap A \setminus \{a\}) \subset V$. Deci, există $\delta > 0$ astfel încât $B(a, \delta) \subset U$. Fie acum $x \in A \setminus \{a\}$ cu $\|x - a\| < \delta$. Dar asta înseamnă exact $x \in B(a, \delta) \cap A \setminus \{a\}$, de unde $x \in U \cap A \setminus \{a\}$. Atunci $f(x) \in V = B(\ell, \varepsilon)$, adică $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$.

" $\Leftarrow$ " Presupunem acum că (2) este îndeplinită şi fie $V \in \mathcal{V}(\ell)$ oarecare. Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât $B(\ell, \varepsilon) \subset V$. Folosind (2), există $U := B(a, \delta) \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, pentru orice $x \in B(a, \delta) \cap A \setminus \{a\}$ să avem $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$, ceea ce implică $f(x) \in B(\ell, \varepsilon) \subset V$. □

Teorema 1.4 (Caracterizarea cu şiruri a limitei) *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'$, $\ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci f are limita ℓ în punctul a dacă şi numai dacă*

$$\forall (x_n) \subset A \setminus \{a\}, x_n \to a \text{ implică } f(x_n) \to \ell. \tag{3}$$

Demonstraţie.

" $\Rightarrow$ " Presupunem că $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ şi considerăm (x_n) arbitrar din $A \setminus \{a\}$ astfel încât $x_n \to a$. Fie acum $V \in \mathcal{V}(\ell)$. Atunci, folosind relaţia (1), există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât $f(U \cap A \setminus \{a\}) \subset V$. Cum $x_n \to a$, există $n_U \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_U$ să avem $x_n \in U$. Cum alegerea lui U depinde de V, avem că $n_U = n_V$. Atunci, pentru orice $n \geq n_V$, deoarece $x_n \in U \cap A \setminus \{a\}$, rezultă $f(x_n) \in V$, de unde $f(x_n) \to \ell$.

" $\Leftarrow$ " Raţionăm prin reducere la absurd. Să presupunem că (3) este adevărată, dar că (1) nu este satisfăcută. Aşadar, există $V \in \mathcal{V}(\ell)$ astfel încât, pentru orice $U \in \mathcal{V}(a)$, există $x \in U \cap A, x \neq a$ astfel încât $f(x) \notin V$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $U_n := B\left(a, \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{V}(a)$, deci vom găsi $x_n \in U_n \cap A, x_n \neq a$ astfel încât $f(x_n) \notin V$. Deoarece $\|x_n - a\| < \frac{1}{n}$, rezultă că $x_n \to a$. Cum $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$, avem din (3) că $f(x_n) \to \ell$. Dar asta înseamnă că, pentru n suficient de mare, $f(x_n) \in V$, contradicţie. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă şi deci demonstraţia este încheiată. $\square$

Observaţia 1.5 *Uneori, una din relaţiile (2), respectiv (3), se consideră a fi definiţia limitei funcţiei f în punctul a, numite şi* ***definiţia $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii într-un punct,*** *respectiv* ***definiţia cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct.***

Teorema 1.4 ne permite să arătăm în anumite cazuri că nu există limita unei funcţii într-un punct. Mai precis, are loc următorul rezultat.

Consecinţă 1.6 *Dacă există $(x_n), (u_n) \subset A \setminus \{a\}$ astfel încât $x_n \to a, u_n \to a$, iar $f(x_n) \to \ell_1, f(u_n) \to \ell_2$, cu $\ell_1 \neq \ell_2$, atunci nu există limita funcţiei f în punctul a.*

Exemplul 1.7 *Să se arate că $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x+1} = 2$.*

Să observăm că $\left|\sqrt{x+1} - 2\right| < \varepsilon \Leftrightarrow 2 - \varepsilon < \sqrt{x+1} < 2 + \varepsilon$. Dacă $\varepsilon \in (0,2)$, alegem $\delta := \varepsilon(4-\varepsilon) > 0$. Atunci

$$\begin{aligned}
|x-3| < \delta &\Rightarrow -\varepsilon(4-\varepsilon) < x - 3 \Rightarrow (2-\varepsilon)^2 < x+1 \Rightarrow 2 - \varepsilon < \sqrt{x+1}, \\
|x-3| < \delta &\Rightarrow x - 3 < \varepsilon(4-\varepsilon) < \varepsilon(4+\varepsilon) \Rightarrow x+1 < (2+\varepsilon)^2 \\
&\overset{0<x+1}{\Rightarrow} \sqrt{x+1} < 2 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Pentru $\varepsilon > 2$, alegem $\delta := 4 > 0$. Atunci

$$\begin{aligned}
|x-3| < \delta &\Rightarrow -4 < x - 3 \Rightarrow 0 < x+1 \Rightarrow 2 - \varepsilon < 0 < \sqrt{x+1}, \\
|x-3| < \delta &\Rightarrow x - 3 < 4 < \varepsilon(4+\varepsilon) \Rightarrow x+1 < (2+\varepsilon)^2 \\
&\overset{0<x+1}{\Rightarrow} \sqrt{x+1} < 2 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, pentru orice $\varepsilon > 0$, am găsit $\delta > 0$ astfel încât, dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, cu $|x-3| < \delta$, avem $\left|\sqrt{x+1} - 2\right| < \varepsilon$. Folosind caracterizarea $\varepsilon - \delta$, rezultă afirmaţia dorită.

Exemplul 1.8 *Să se arate că funcţia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ are limita 0 în punctul $(0,0)$.*
Vom considera $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu norma euclidiană, demonstraţia pentru altă normă făcându-se analog. Observăm mai întâi că $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \dfrac{1}{2}$ pentru orice $(x,y) \neq (0,0)$. Într-adevăr, pentru orice $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -(x^2+y^2) \leq 2xy \leq (x^2+y^2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-y)^2 \geq 0 \\ (x+y)^2 \geq 0. \end{array} \right.$$

Deducem de aici că

$$0 \le |f(x,y)| = |xy| \cdot \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \right| \le \frac{|xy|}{2}.$$

Considerăm $\varepsilon > 0$ *arbitrar şi definim* $\delta := \sqrt{\varepsilon}$. *Dacă* $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *are proprietatea că* $\|(x,y)-(0,0)\|_2 < \delta$, *rezultă* $\max\{|x|,|y|\} \le \delta = \sqrt{\varepsilon}$, *deci*

$$|f(x,y) - 0| \le \frac{|xy|}{2} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Folosind caracterizarea $\varepsilon - \delta$, *rezultă concluzia.*

Exemplul 1.9 *Să se arate că nu există limita funcţiei* $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ *în punctul* 0.

Să considerăm şirurile $(x_n), (u_n)$ *date prin* $x_n := \frac{1}{n\pi}$, $u_n := \frac{2}{(4n+1)\pi}$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *şi şă observăm că* $x_n \to 0, u_n \to 0$. *Însă* $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$, *iar* $f(u_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$. *Aplicând Corolarul 1.6, obţinem că nu există limita funcţiei* f *în punctul* 0.

Exemplul 1.10 *Să se arate că nu există limita funcţiei* $f : \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *în punctul* $(0,0)$.

Considerăm şirurile $(u_n), (v_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$, *ambele convergente la* $(0,0)$, *date prin* $u_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $v_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *Atunci*

$$f(u_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2},$$
$$f(v_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5} \to \frac{2}{5}.$$

Aplicăm Corolarul 1.6 şi deducem că nu există limita funcţiei f *în punctul* $(0,0)$.

Folosind unicitatea limitei unui şir de puncte dintr-un spaţiu metric şi caracterizarea cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct, se obţine imediat următorul rezultat.

Teorema 1.11 *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A'$. *Dacă* f *are limită în punctul* a, *aceasta este unică.*

Să observăm în continuare că funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k \ge 1, p > 1$ poate fi gândită ca fiind echivalentă cu p funcţii cu valori reale. Într-adevăr, având date funcţia f şi $x \in A$, dacă notăm

$$f(x) = y = (y_1, y_2, ..., y_p) \in \mathbb{R}^p,$$

putem defini în punctul x funcţiile f_i, $i \in \overline{1,p}$, prin $f_i(x) := y_i$. Construim aşadar funcţiile $f_i : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,p}$ astfel încât

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x)), \quad \forall x \in A. \tag{4}$$

Invers, considerând un sistem format din p funcţii cu valori reale $f_i : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,p}$, putem defini funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ prin relaţia (4).

Dacă avem $k, p > 1$, funcţia f se numeşte **funcţie vectorială de argument vectorial**, iar funcţiile f_i sunt numite **funcţiile componente**, sau **funcţiile coordonate** ale funcţiei f, şi scriem

$f = (f_1, f_2, ..., f_p)$. În cazul $k = 1, p > 1$, funcţia f se numeşte **funcţie vectorială de argument real**, iar dacă $k > 1, p = 1$, funcţia f se numeşte **funcţie reală de argument vectorial**. Dacă $k = p = 1$, funcţia f se numeşte **funcţie reală de argument real**.

Folosind Teorema care asigură faptul că, pentru un şir de elemente din $\mathbb{R}^p$, convergenţa este echivalentă cu convergenţa pe coordonate, precum şi caracterizarea cu şiruri a existenţei limitei unei funcţii într-un punct, rezultă uşor următorul rezultat.

Teorema 1.12 *Fie funcţia $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'$. Atunci f are limita $\ell = (\ell_1, \ell_2, ..., \ell_p) \in \mathbb{R}^p$ în punctul a dacă şi numai dacă există simultan $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = \ell_i, i = \overline{1, p}$.*

Teorema de mai sus permite reducerea studiului limitelor funcţiilor vectoriale de argument vectorial $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ la studiul limitelor funcţiilor componente $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

1.2 Limite laterale

În cazul în care ne referim la funcţii $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p, p \geq 1$, putem exploata structura de ordine a mulţimii $\mathbb{R}$, ajungând la noţiuni mai rafinate, cu ar fi cea de limită laterală.

Definiţia 1.13 *Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $A \subset \mathbb{R}$. Vom nota*

$$A_s = A \cap (-\infty, a], \quad A_d = A \cap [a, \infty).$$

*Punctul a se numeşte **punct de acumulare la stânga** (respectiv **dreapta**) pentru A dacă este punct de acumulare pentru mulţimea A_s (respectiv A_d). Vom nota mulţimea punctelor de acumulare la stânga (respectiv dreapta) cu A'_s (respectiv A'_d). Cu alte cuvinte,*

$$\begin{aligned} a \in A'_s &\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(a), (V \cap A_s) \setminus \{a\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, (a - r, a + r) \cap A \cap (-\infty, a) \\ &\Leftrightarrow \forall r > 0, (a - r, a) \cap A \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Analog,

$$a \in A'_d \Leftrightarrow \forall r > 0, (a, a + r) \cap A \neq \emptyset.$$

Definiţia 1.14 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$.*

*(i) Dacă $a \in A'_s$, spunem că elementul $\ell_s \in \mathbb{R}^p$ este **limită la stânga** a funcţiei f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell_s)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in (U \cap A_s) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell_s$ sau $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \ell_s$.*

*(ii) Dacă $a \in A'_d$, spunem că elementul $\ell_d \in \mathbb{R}^p$ este **limită la dreapta** a funcţiei f în punctul a dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(\ell_d)$ există $U \in \mathcal{V}(a)$, astfel încât dacă $x \in (U \cap A_d) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$. În acest caz vom scrie $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell_d$ sau $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \ell_d$.*

Are loc următoarea caracterizare a limitei unei funcţii prin intermediul limitelor laterale.

Teorema 1.15 *Fie $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A'_s \cap A'_d$. Atunci f are limită în punctul a dacă şi numai dacă există limitele la stânga şi la dreapta în punctul a şi sunt egale. În acest caz,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x).$$

Demonstraţie. " $\Rightarrow$ " Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ atunci, folosind caracterizarea cu şiruri a limitei, pentru orice şir $(x_n) \subset A\setminus\{a\}$ convergent la a, avem $f(x_n) \to \ell$. Considerând pe rând şiruri crescătoare din $A_s\setminus\{a\}$, respectiv descrescătoare din $A_d\setminus\{a\}$, convergente la a, şi folosind caracterizarea cu şiruri a limitelor laterale dată de teorema anterioară, obţinem că există limitele laterale, ambele egale cu ℓ.

" $\Leftarrow$ " Să presupunem că există $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$. Atunci, combinând definiţiile celor două limite laterale, ne va rezulta că, pentru orice $V \in \mathcal{V}(\ell)$, există $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât

$$\begin{aligned} &\forall x \in (U_1 \cap A_s) \setminus \{a\} = U \cap A \cap (-\infty, a), \text{ are loc } f(x) \in V,\\ &\forall x \in (U_2 \cap A_d) \setminus \{a\} = U \cap A \cap (a, +\infty), \text{ are loc } f(x) \in V. \end{aligned}$$

Aşadar, dacă notăm $U := U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(a)$ obţinem că, pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \in V$, de unde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. $\square$

1.3 Proprietăţi ale funcţiilor cu limită

Vom discuta în cele ce urmează diverse proprietăţi care apar în acest cadru al funcţiilor care au limită.

Definiţia 1.16 *Fie $A \subset \mathbb{R}^k$ şi $B \subset A$. O funcţie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ se numeşte **mărginită pe** B dacă mulţimea*

$$f(B) := \{y \in \mathbb{R}^p \mid \exists x \in B : f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in B\}$$

este mărginită. Cu alte cuvinte, f este mărginită pe B dacă există $r > 0$ astfel încât $f(B) \subset B(0, r)$ sau, echivalent, dacă există $r > 0$ astfel încât $\|f(x)\| < r$ pentru orice $x \in B$.
*Mulţimea $f(A) = \{y \in \mathbb{R}^p \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$ se va nota uneori cu $\operatorname{Im} f$ şi se va numi **imaginea** funcţiei f. În cazul în care o funcţie este mărginită pe întregul său domeniu de definiţie, se va numi simplu **mărginită**.*

Exemplul 1.17 *Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ nu este mărginită deoarece, dacă am presupune că există $r > 0$ astfel încât $|f(x)| < r$ pentru orice $x \in (0, \infty)$ ar rezulta că $\dfrac{1}{r} < x$ pentru orice $x \in (0, \infty)$. Luând $x := \dfrac{1}{r} \in (0, \infty)$, obţinem în mod evident o contradicţie.*

Teorema 1.18 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ o funcţie şi $a \in A'$. Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât f să fie mărginită pe $(U \cap A) \setminus \{a\}$.*

Demonstraţie. Folosind caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii într-un punct pentru $\varepsilon := 1$, ne rezultă existenţa lui $U = B(a, \delta) \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât, pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, să avem $\|f(x) - \ell\| < 1$, ceea ce implică $f(x) \in B(0, \|\ell\| + 1)$ pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, de unde concluzia. $\square$

Teorema 1.19 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ şi $a \in A'$. Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^p$, $\ell \neq 0$, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) \neq 0$. În cazul $p = 1$, rezultatul rămâne valabil dacă $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Demonstraţie. Arătăm cazul general, situaţia $p = 1$ demonstrându-se analog.

Aplicăm caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a limitei cu $\varepsilon := \dfrac{\|\ell\|}{2} > 0$. Va exista atunci $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in (B(a,\delta) \cap A) \setminus \{a\}$, să avem

$$\begin{aligned} |\|f(x)\| - \|\ell\|| \le \|f(x) - \ell\| < \frac{\|\ell\|}{2}, \\ -\frac{\|\ell\|}{2} < \|f(x)\| - \|\ell\| < \frac{\|\ell\|}{2}, \end{aligned}$$

de unde $\|f(x)\| > \dfrac{\|\ell\|}{2}$ pentru orice $x \in (B(a,\delta) \cap A) \setminus \{a\}$. Urmează concluzia. $\square$

Dacă $p = 1$, rezultatul anterior se poate rafina astfel.

Consecinţă 1.20 (Păstrarea semnului) *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, a \in A'$. Dacă există $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, $\ell > 0$ (respectiv $\ell < 0$), atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in (U \cap A) \setminus \{a\}$, are loc $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$).*

Teorema 1.21 *Fie $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, a \in A'$. Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ şi există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât g este mărginită pe U, atunci există $\lim\limits_{x\to a} (f \cdot g)(x) = 0$.*

Demonstraţie. Fie $(x_n) \subset A \setminus \{a\}, x_n \to a$. Există aşadar $n_U \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \ge n_U$, să avem $x_n \in U$. Rezultă că există $r > 0$ astfel încât $|g(x_n)| < r$ pentru orice $n \ge n_U$. Cum $f(x_n) \to 0$, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, există $n_\varepsilon \ge n_U$ astfel încât, pentru orice $n \ge n_\varepsilon$, $|f(x_n)| < \dfrac{\varepsilon}{r}$ şi $|g(x_n)| < r$. Deci, pentru orice $n \ge n_\varepsilon$, avem că $|f(x_n) \cdot g(x_n)| < \dfrac{\varepsilon}{r} \cdot r = \varepsilon$, de unde deducem că şirul $(f(x_n) \cdot g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ are limita 0. De aici, concluzia rezultă folosind caracterizarea cu şiruri a limitei. $\square$

Rezultatul următor se referă la calculul limitelor în cazul compunerii de funcţii.

Teorema 1.22 *Fie $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}^p, a \in A', b \in B'$ şi funcţiile $f : B \to \mathbb{R}^m$, $g : A \to B \setminus \{b\}$. Dacă $\lim\limits_{y\to b} f(y) = \ell$ şi $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, atunci*

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = \ell.$$

Demonstraţie. Să observăm că $f \circ g : A \to \mathbb{R}^m$ este bine definită şi că $a \in A'$, deci are sens să vorbim de limita funcţiei $f \circ g$ în a. Fie acum $(x_n) \subset A \setminus \{a\}$, $x_n \to a$. Cum $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, folosind Teorema 1.4, rezultă că $g(x_n) \to b$. Cum $g : A \to B \setminus \{b\}$, avem că şirul $(g(x_n)) \subset B \setminus \{b\}$ are proprietatea $g(x_n) \to b$. Utilizând acum $\lim\limits_{y\to b} f(y) = \ell$ şi Teorema 1.4, rezultă $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to \ell$. Obţinem aşadar concluzia, aplicând din nou caracterizarea cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct. $\square$

În cazul în care funcţiile considerate au valori reale, putem arăta rezultate referitoare la operaţii cu limite de funcţii. Demonstraţia se va realiza folosind, în fiecare situaţie în parte, caracterizările cu şiruri formulate anterior. Astfel, considerând $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, putem defini funcţiile $f + g$, αf, $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$, $\dfrac{f}{g} : A \setminus \{x \in A \mid g(x) = 0\} \to \mathbb{R}$, $f^g : D \subset A \to \mathbb{R}$ prin

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x), \\ (\alpha f)(x) &:= \alpha \cdot f(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x), \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)} \text{ şi} \\ (f^g)(x) &:= f(x)^{g(x)} \end{aligned} \tag{5}$$

pentru fiecare x din domeniul de definiţie al fiecărei funcţii.

Teorema 1.23 (Operaţii cu limite de funcţii) *Fie funcţiile* $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *şi* $a \in A'$. *Presupunem că există* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Dacă suma $\ell_1 + \ell_2$ *a limitelor are sens, atunci funcţia* $f + g$ *are limită în* a *şi are loc relaţia:*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2 = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

(caz exceptat: una dintre limitele ℓ_1, ℓ_2 *este egală cu* $+\infty$, *iar cealaltă cu* $-\infty$*).*

(ii) Funcţia αf *are limită în* a *şi au loc relaţiile:*

$$\lim_{x\to a}(\alpha f)(x) = \alpha \cdot \ell_1 = \alpha \cdot \lim_{x\to a} f(x), \ \text{dacă } \alpha \neq 0,$$
$$\lim_{x\to a}(\alpha f)(x) = 0, \ \text{dacă } \alpha = 0.$$

(iii) Dacă produsul $\ell_1 \cdot \ell_2$ *al limitelor are sens, atunci funcţia* $f \cdot g$ *are limită în* a *şi are loc relaţia:*

$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \ell_1 \cdot \ell_2 = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

(cazuri exceptate: una dintre limitele ℓ_1, ℓ_2 *este egală cu* 0, *iar cealaltă este* $+\infty$ *sau* $-\infty$*).*

(iv) Dacă raportul $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ *al limitelor are sens şi există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât funcţia* $\dfrac{f}{g}$ *este bine definită pe* $(U \cap A) \setminus \{a\}$, *atunci funcţia* $\dfrac{f}{g}$ *are limită în* a *şi are loc relaţia:*

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

(cazuri exceptate: $\ell_2 = 0$, *sau ambele limite* ℓ_1, ℓ_2 *sunt infinite).*

(v) Dacă $\ell_1^{\ell_2}$ *are sens şi există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât funcţia* f^g *este bine definită pe* $(U \cap A) \setminus \{a\}$, *atunci funcţia* f^g *are limită în* a *şi are loc relaţia:*

$$\lim_{x\to a}\left(f^g\right)(x) = \ell_1^{\ell_2} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

(cazuri exceptate: $(\ell_1, \ell_2) = (0, 0)$, $(\ell_1, \ell_2) = (+\infty, 0)$, $(\ell_1, \ell_2) = (1, +\infty)$*).*

Asimptote

Cele prezentate anterior permit introducerea noţiunilor de asimptote la graficul unei funcţii. Intuitiv, asimptotele sunt drepte faţă de care graficul unei funcţii se "apropie" oricât de mult, dar nu le "atinge".

Definiţia 1.24 *Fie* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*) este punct de acumulare pentru* A.

(i) Spunem că dreapta $y = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, *este* ***asimptotă orizontală la*** $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*) pentru funcţia* f *dacă există* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = y_0$ *(respectiv* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$*).*

(ii) Spunem că dreapta $y = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, *este* ***asimptotă oblică la*** $+\infty$ *(respectiv* $-\infty$*) pentru funcţia* f, *dacă există* $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x) - mx - n| = 0$ *(respectiv* $\lim\limits_{x\to-\infty} |f(x) - mx - n| = 0$*).*

2 Continuitate

2.1 Definiţie. Proprietăţi generale

Definiţia 2.1 *Spunem că funcţia* $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ ***este continuă în punctul*** $a \in A$ *dacă pentru orice vecinătate* $V \in \mathcal{V}(f(a))$, *există o vecinătate* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât, pentru orice* x *din* $U \cap A$, *să avem* $f(x) \in V$, *sau, formalizat,*

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), \exists U \in \mathcal{V}(a) : f(U \cap A) \subset V. \tag{6}$$

Dacă funcţia f *nu este continuă în punctul* $a \in A$, *vom spune că* f *este* ***discontinuă în punctul*** a, *sau că* a *este un* ***punct de discontinuitate*** *pentru funcţia* f.

Vom spune că funcţia f *este* ***continuă pe o mulţime*** $B \subset A$ *dacă* f *este continuă în orice punct* $x \in B$.

Teorema 2.2 (Caracterizare a continuităţii cu limita) *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A' \cap A$. *Atunci* f *este continuă în* a *dacă şi numai dacă există* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Am observat, în secţiunea anterioară, că noţiunea de limită admite unele caracterizări, analitice sau prin intermediul şirurilor. Acest lucru este valabil şi în cazul continuităţii, iar demonstraţiile se bazează pe teorema anterioară şi pe teoremele respective de caracterizare din cazul limitei.

Teorema 2.3 (Caracterizarea $\varepsilon - \delta$ a continuităţii) *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A$. *Atunci* f *este continuă în punctul* a *dacă şi numai dacă*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_{\mathbb{R}^k} < \delta : \|f(x) - f(a)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon. \tag{7}$$

Teorema 2.4 (Caracterizarea cu şiruri a continuităţii) *Fie* $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A$. *Atunci* f *este continuă în punctul* a *dacă şi numai dacă*

$$\forall (x_n) \subset A, x_n \to a \text{ implică } f(x_n) \to f(a). \tag{8}$$

Observaţia 2.5 *Uneori, ca în cazul limitei, una din relaţiile (7), respectiv (8), se consideră a fi definiţia continuităţii funcţiei* f *în punctul* a, *numite şi* ***definiţia*** $\varepsilon - \delta$ ***a continuităţii unei funcţii într-un punct,*** *respectiv* ***definiţia cu şiruri a continuităţii unei funcţii într-un punct.***

Exerciţiul 2.6 *Să se arate că funcţia:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{dacă } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{dacă } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Soluţie. *În orice punct* $(a,b) \neq (0,0)$, *funcţia este continuă, aşa cum rezultă cu uşurinţă din definiţia cu şiruri.*

Pentru a dovedi continuitatea în $(0,0)$, *observăm că:*

$$\left|x^3\right| \le \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} \text{ şi } \left|y^3\right| \le \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}},$$

de unde rezultă:

$$|f(x,y)-f(0,0)| \leq \frac{2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Dacă $(x_n, y_n) \to (0,0)$, *atunci* $\sqrt{x_n^2+y_n^2} \to 0$, *deci:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Aşadar, f *este continuă şi în* $(0,0)$.

Teorema de caracterizare cu şiruri a continuităţii ne permite caracterizarea continuităţii unei funcţii vectoriale de variabilă vectorială prin intermediul proprietăţii similare a funcţiilor componente.

Teorema 2.7 *Fie* $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k \geq 1, p > 1$ *şi* $a \in A$. *Atunci* f *este continuă în punctul* a *dacă şi numai dacă funcţiile* $f_1, f_2, ..., f_p : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *sunt continue în* a.

2.2 Continuitate laterală. Discontinuităţi

Asemănător cu cazul limitelor de funcţii, pentru a putea vorbi de continuitate laterală, avem nevoie de funcţii de variabilă reală.

Definiţia 2.8 *Fie* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A$.

(i) Spunem că f *este* ***continuă la stânga*** *în* a *dacă pentru orice* $V \in \mathcal{V}(f(a))$, *există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât dacă* $x \in U \cap A_s$, *să avem* $f(x) \in V$.

(ii) Spunem că f *este* ***continuă la dreapta*** *în* a *dacă pentru orice* $V \in \mathcal{V}(f(a))$, *există* $U \in \mathcal{V}(a)$ *astfel încât dacă* $x \in U \cap A_d$, *să avem* $f(x) \in V$.

Ţinând seama de definiţia de mai sus şi de definiţiile limitelor laterale, deducem uşor următoarea teoremă de caracterizare a continuităţii laterale.

Teorema 2.9 *Fie* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A$.

(i) Dacă $a \in A'_s$, *atunci* f *este continuă la stânga în* a *dacă şi numai dacă există* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a)$.

(ii) Dacă $a \in A'_d$, *atunci* f *este continuă la dreapta în* a *dacă şi numai dacă există* $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)$.

Ţinând cont de caracterizarea limitei prin intermediul limitelor laterale, obţinem de asemenea următorul rezultat.

Teorema 2.10 *Fie* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A \cap A'$. *Atunci* f *este continuă în* a *dacă şi numai dacă* f *este continuă la stânga şi la dreapta în* a.

Noţiunile de limite laterale ne permit de asemenea, clasificarea punctelor de discontinuitate în mai multe categorii.

Definiţia 2.11 *Fie* $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ *şi* $a \in A$ *punct de discontinuitate pentru* f. *Punctul* a *se numeşte* ***punct de discontinuitate de specia I*** *dacă există limitele laterale în* a *şi sunt finite. În caz contrar vom spune că* a *este* ***punct de discontinuitate de specia a II-a****.*

2.3 Proprietăţi ale funcţiilor continue

Ţinând seama de proprietăţile prezentate secţiunea anterioară şi de caracterizarea cu limită a continuităţii, putem deduce rezultate analoage în cazul funcţiilor continue, ale căror demonstraţii le omitem fiind foarte asemănătoare cu cele din cazul funcţiilor cu limită.

Teorema 2.12 (Compunerea funcţiilor continue) *Fie $A \subset \mathbb{R}^k, B \subset \mathbb{R}^p$ şi funcţiile $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}^m, k, p, m \geq 1$.*

(i) Dacă f este continuă în $a \in A$, iar g este continuă în $f(a)$, atunci $g \circ f$ este continuă în a.

(ii) Dacă f este continuă pe A, iar g este continuă pe B, atunci $g \circ f$ este continuă pe A.

Referitor la operaţii algebrice cu funcţii continue avem următorul rezultat.

Teorema 2.13 (Operaţii cu funcţii continue) *Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi funcţiile $f, g : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ continue pe A. Atunci:*

(i) $f + g$, λf sunt funcţii continue pe A;

(ii) $f \cdot g$ este continuă pe A;

(iii) $\dfrac{f}{g}$ este continuă pe mulţimea $A \setminus \{x \in A \mid g(x) = 0\}$;

(iv) $|f|, \min(f, g), \max(f, g)$ sunt funcţii continue pe A.

Teorema 2.14 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ o funcţie şi $a \in A$. Dacă f este continuă în a, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât f să fie mărginită pe $U \cap A$.*

Teorema 2.15 *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p, k, p \geq 1$ şi $a \in A$ astfel încât $f(a) \neq 0$. Dacă f este continuă în a, atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) \neq 0$.*

Consecinţă 2.16 (Păstrarea semnului) *Fie $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, a \in A$. Dacă f este continuă în a şi $f(a) > 0$ (respectiv, $f(a) < 0$), atunci există $U \in \mathcal{V}(a)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$, are loc $f(x) > 0$ (respectiv $f(x) < 0$).*

Teorema 2.17 (Funcţii continue pe mulţimi compacte) *Dacă $A \subset \mathbb{R}^k$ este o mulţime compactă (mărginită şi închisă) şi $f : A \to \mathbb{R}^p$ este continuă, atunci $f(A)$ este compactă.*

Demonstraţie. Fie un şir oarecare $(y_n) \subset f(A)$. Atunci, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, va exista $x_n \in A$ astfel încât $f(x_n) = y_n$. Fiindcă mulţimea A este compactă şi $(x_n) \subset A$, există (x_{n_p}) un subşir al şirului (x_n) convergent la $x \in A$. Folosind acum caracterizarea cu şiruri a continuităţii funcţiei f, deducem că $f(x_{n_p}) \to f(x) \in f(A)$. Cum $\left(y_{n_p}\right)$ este subşir al şirului (y_n), şi $y_{n_p} \to f(x) \in f(A)$, rezultă că mulţimea $f(A)$ este compactă. □

Urmează un rezultat central în teoria funcţiilor continue.

Teorema 2.18 (Weierstrass) *Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este continuă şi A este o mulţime compactă, atunci f este mărginită pe A şi îşi atinge marginile: există $a, b \in A$, astfel încât $\sup\limits_{x \in A} f(x) = f(a)$ şi $\inf\limits_{x \in A} f(x) = f(b)$.*

Demonstraţie. Conform teoremei precedente, $f(A)$ este compactă, deci mărginită. Prin urmare, funcţia f este mărginită pe A. Fie $\alpha = \sup f(A) \in \mathbb{R}$. Din teorema de caracterizare a marginii superioare, există un şir $(y_n) \subset f(A)$ astfel încât $y_n \to \alpha$. Cum $f(A)$ este închisă, $\alpha \in f(A)$, deci există $a \in A$ astfel încât $f(a) = \alpha$. Pentru marginea inferioara se procedează analog. □