CURS 6, Analiză matematică, semestrul I, 2014–2015

1 Derivarea funcţiilor de mai multe variabile

1.1 Derivata după o direcţie

Vom lua în discuţie mai întâi cazul funcţiilor reale de mai multe variabile, adică al funcţiilor $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Pentru astfel de funcţii, observăm că

$$\phi(t) = f(x + tv),\ unde\ v \in \mathbb{R}^k\ \|v\| = 1,\ t \in \mathbb{R}$$

este o funcţie reală, de o variabilă reală.

Definiţia 1.1 *Fie $f : D \to \mathbb{R}$, unde D este un deschis din $\mathbb{R}^k$.*

1. *Numim* ***derivată a lui f în a după versorul*** *v*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a + tv) - f(a)) \overset{not}{=} \frac{df}{dv}(a)$$

ori de câte ori limita există.

2. *Dacă $\frac{df}{dv}(a) \in \mathbb{R}$ vom spune că f este* ***derivabilă în*** *a* ***după versorul*** *v.*

Observaţia 1.2 În loc de a spune că *funcţia f este derivabilă după versorul* v de multe ori se mai foloseşte expresia *funcţia f este derivabilă în direcţia* v deoarece $x = a + tv$ este ecuaţia dreptei care trece prin punctul a şi are direcţia v.

Exemplul 1.3 Fie $f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$, pentru $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu $x + y \neq 0$ şi $f(x, y) = 0$ în rest. Am văzut în cursul trecut că această funcţie nu este continuă în origine. Fie $v \in \mathbb{R}^2$ un versor oarecare şi să calculăm derivata pe direcţia $v = (v_1, v_2)$ în (0,0):

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f((0, 0) + tv) - f(0, 0)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{tv_1 \cdot tv_2}{tv_1 + tv_2} = \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}.$$

Astfel, deşi nu este continuă în (0,0), funcţia f este derivabilă în origine pe orice direcţie $v = (v_1, v_2)$ pentru care $v_1 + v_2 \neq 0$. Mai mult, dacă $v_1 + v_2 = 0$, $f(tv) = 0$ şi atunci f este derivabilă în (0,0) şi pe astfel de direcţii.

1.2 Derivate parţiale pentru funcţii de mai multe variabile

Definiţia 1.4 *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$.*

1. *Spunem că funcţia f are* ***derivată parţială în raport cu variabila x_i în punctul a*** *dacă există derivata funcţiei f după direcţia e_i, unde $e_i = (0, ...0, 1, 0...0)$, 1 aflându-se pe poziţia i). Aceasta se notează fie cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ sau $f'_{x_i}(a)$.*

2. *Spunem că funcţia f este* ***derivabilă parţial în raport cu variabila*** x_i ***în punctul*** a *dacă* $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}$.

Observăm că

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \frac{df}{de_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + t, ...a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{t}$$

adică a deriva parţial în raport cu o anumită variabilă revine la a deriva considerând toate celelalte variabile ca fiind nişte constante.

Exemplul 1.5 Să se calculeze derivatele parţiale ale funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, dată prin

$$f(x, y) = x \ln(xy), \qquad (x, y \in D = \{(x, y);\ xy > 0\})$$

Aplicând regulile uzuale de calcul cu derivate obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \ln(xy) + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{y}$$

Definiţia 1.6 *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi o funcţie $f : D \to \mathbb{R}$.*

1. *Spunem că f este derivabilă parţial pe D dacă este derivabilă parţial în raport cu fiecare variabilă, în orice punct al lui D.*

2. *Spunem că f este de clasă C^1 pe D dacă f este derivabilă parţial pe D şi toate derivatele sale parţiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1..k$ sunt continue pe D. În acest caz vom nota $f \in \mathcal{C}^1(D)$.*

Ne vine uşor acum să vorbim de derivabilitate parţială pentru funcţii cu valori vectoriale.

Definiţia 1.7 *Fie D un deschis din $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$ şi $F : D \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$, în care*

$$F = (f_1, f_2, ..., f_m) \text{ cu } f_i : D \to \mathbb{R},\ i = 1..m.$$

i. *Spunem că F este* ***derivabilă parţial în*** *$a \in D$ dacă orice funcţie f_i este derivabilă parţial în a în raport cu toate variabilele $x_1, ..., x_k$.*

ii. *Spunem că F este de clasă C^1 pe D dacă toate funcţiile f_i sunt de clasă C^1 pe D. Notăm $F \in \mathcal{C}^1(D)$.*

Dacă o funcţie vectorială

$$F = (f_1, f_2, ..., f_m) \text{ cu } f_i : D \to \mathbb{R},\ i = 1, ..., m.$$

este derivabilă parţial în punctul a în raport cu toate variabilele, definim **matricea Jacobiană a lui F în punctul a** (matricea care este formată din derivatele parţiale ale funcţiilor $f_1, ..., f_m$ în punctul a):

$$J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(a) \end{pmatrix}$$

Observaţia 1.8 Dacă avem $k = m$, matricea $J_F(a)$ este pătratică iar determinantul $det\ J_F(a)$ se numeşte jacobianul sau determinantul funcţional al funcţiilor $f_1, ..., f_k$ în punctul a şi se notează

$$\det J_F(a) = \frac{D(f_1, ..., f_k)}{D(x_1, ..., x_k)}.$$

2 Derivate parţiale de ordin superior

Definiţia 2.1 *Fie D un deschis din $\mathbb{R}^k$ şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă parţial pe D. Fie*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., k$$

cele k derivate parţiale ale lui f.

1. *Dacă există derivata parţială în $a \in D$ în raport cu x_j a funcţiei $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, atunci aceasta se va numi **derivată parţială de ordinul 2** a funcţiei f în punctul a şi se va nota prin*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad sau\ f''_{x_i x_j}, \quad pentru\ \ i \neq j$$

   şi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \quad sau\ f''_{x_i^2} \quad pentru\ \ i = j$$

   (pentru $i \neq j$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ se numesc derivate parţiale mixte).

2. *Dacă derivatele de la punctul 1. sunt finite în orice punct din D, obţinem funcţiile*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : D \to \mathbb{R}\ pentru\ \ i \neq k \qquad respectiv\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} : D \to \mathbb{R}\ pentru\ i = j,$$

   *numite **derivate parţiale de ordin 2**.*

3. *Spunem că funcţia f este **de clasă C^2 pe** D dacă este derivabilă parţial de ordinul doi pe D în raport cu toate variabilele şi acestea sunt continue.*

Exemplul 2.2 *Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = x_1 \cdot \sin x_2$. Derivatele parţiale de ordinul 1 sunt:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sin x_2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \cdot \cos x_2.$$

Derivatele parţiale de ordinul 2 sunt:

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2) = 0$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2) = \cos x_2$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x_1, x_2) = \cos x_2$

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2) = -x_1 \cdot \sin x_2$

Observaţia 2.3 *1. În mod analog se pot defini derivatele parţiale de ordin $q, q \geq 2$ şi funcţiile de clasă C^q $q \geq 2$.*

2. În exemplul de mai sus derivatele parţiale mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ sunt egale. Acest lucru nu este adevărat în general. A se analiza derivatele parţiale mixte de ordinul 2 pentru funcţia

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Avem însă rezultate care rezolvă această problemă:

Teorema 2.4 (Teorema lui Schwartz) *Fie D un deschis din $\mathbb{R}^k$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă f are derivatele parţiale mixte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $(i \neq j)$ într-o vecinătate a unui punct $a \in D$ şi dacă funcţiile $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ şi $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sunt continue în a, atunci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Observaţia 2.5 *Matricea care conţine toate derivatele parţiale de ordinul 2 ale unei funcţii $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ (într-un punct $a \in D$)poartă numele de Hessiana funcţiei f (în punctul a):*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & ... & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2}(a) & ... & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & ... & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Pentru o funcţie care satisface condiţiile teoremei lui Schwartz $H_f(a)$ este o matrice simetrică.