1 Diferenţiabilitate pentru funcţii de mai multe variabile

1.1 Diferenţiala unei funcţii

Definiţia 1.1 *Spunem că $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este o **aplicaţie liniară,** sau un **operator liniar**, dacă satisface condiţiile:*
(AL_1) $T(x+y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^k$;
(AL_2) $T(\lambda x) = \lambda T(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^k$.

Vom nota cu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^p)$ mulţimea aplicaţiilor liniare definite între spaţiile $\mathbb{R}^k$ şi $\mathbb{R}^p$.
În cele ce urmează, vom considera $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă.

Definiţia 1.2 *Funcţia $f : D \to \mathbb{R}^p$ se numeşte **diferenţiabilă** în $x \in D$ dacă există o aplicaţie liniară $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^p)$ astfel încât*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Th}{\|h\|} = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - T(y-x)}{\|y-x\|} = 0. \tag{1}$$

*Operatorul T se numeşte **diferenţiala** funcţiei f în punctul x.*

Operatorul T din definiţia de mai sus se notează cu $df(x)$.
Observăm acum că relaţia (1) este echivalentă cu următoarea condiţie:

$$\begin{aligned} &\exists \alpha : D \to \mathbb{R}^p : \lim_{h \to 0} \alpha(x+h) = \alpha(x) = 0, \\ &\quad f(x+h) = f(x) + Th + \|h\| \cdot \alpha(x+h) \quad \forall h \in D - \{x\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Să arătăm acest lucru. Presupunem că (1) are loc şi definim $\alpha : D \to \mathbb{R}$ prin

$$\alpha(x+h) := \begin{cases} \dfrac{f(x+h) - f(x) - Th}{\|h\|}, & \text{dacă } h \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } h = 0. \end{cases}$$

Atunci, folosind (1), avem că $\lim_{h \to 0} \alpha(x+h) = \alpha(x) = 0$. De asemenea, pentru $h \in D - \{x\}$, $h \neq 0$, avem partea finală a relaţiei (2) satisfăcută potrivit definiţiei funcţiei α. Pentru $h \in D - \{x\}$, $h = 0$, ultima egalitate din (2) este satisfăcută trivial. Invers, dacă relaţia (2) are loc, atunci avem că

$$0 = \lim_{h \to 0} \alpha(x+h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Th}{\|h\|},$$

de unde f este diferenţiabilă în x.

Relaţia (2) arată de fapt că f poate fi "bine aproximată" în jurul lui x de către funcţia afină $h \mapsto f(x) + Th$, adică

$$f(x+h) \approx f(x) + Th.$$

O exprimare echivalentă se poate obţine dacă folosim **notaţia lui Landau**: vom numi o funcţie definită pe $\mathbb{R}^n$ cu valori reale **de tip** $o(h)$ dacă

$$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{\|h\|}=0.$$

Atunci, folosind (2), diferenţiabilitatea Fréchet a funcţiei f în x este echivalentă cu a spune că $f(x+h)-f(x)-Th=o(h)$, adică

$$f(x+h)=f(x)+Th+o(h). \tag{3}$$

Notaţia $o(h)$ va fi foarte utilă când vom avea de a face cu demonstraţii în care intervin limite.

Din cele afirmate până acum, putem deduce următorul rezultat.

Teorema 1.3 *Fie $f:D\to\mathbb{R}^p$ definită pe mulţimea deschisă $D\subset\mathbb{R}^k$ şi $x\in D$.*
(i) Dacă f este diferenţiabilă în x, atunci diferenţiala sa este unică.
(ii) Dacă f este diferenţiabilă în x, atunci f este derivabilă în orice direcţie v şi $\dfrac{df}{dv}(x)=df(x)(v)$.
(iii) Dacă f este diferenţiabilă în x, atunci f este continuă în x.

Demonstraţie. (i) rezultă imediat din definiţie, folosind unicitatea limitei unei funcţii într-un punct.
(ii) Alegem $h:=tv$, cu $t>0$, în definiţia diferenţiabilităţii, unde $v\in\mathbb{R}^k$, $\|v\|=1$ este o direcţie arbitrară, şi obţinem

$$0=\lim_{tv\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)-T(tv)}{t\,\|v\|}=\frac{1}{\|v\|}\lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}-Tv,$$

de unde $\dfrac{df}{dv}(x)$ există şi este egală cu Tv. Rezultă concluzia.
(iii) Să observăm că dacă f este diferenţiabilă în x, atunci folosind (2) şi făcând $h\to 0$, obţinem $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$, de unde f este continuă în x. □

Putem arăta că diferenţiabilitatea este echivalentă, pentru o funcţie vectorială, cu diferenţiabilitatea corespunzătoare a funcţiilor componente.

Teorema 1.4 *Fie $D\subset\mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă, $f=(f_1,f_2,...,f_p):D\to\mathbb{R}^p$ o funcţie şi $x\in D$. Atunci f este diferenţiabilă în x dacă şi numai dacă toate funcţiile componente $f_1,.,,,f_p:D\to\mathbb{R}$ sunt diferenţiabile în x. În acest caz*

$$df(x)=(df_1(x),...,df_p(x)).$$

Demonstraţie. Rezultă din teorema de echivalenţă a limitei unei funcţii vectoriale cu limitele funcţiilor coordonate. □

Interpretarea geometrică a diferenţialei

Pentru o funcţie $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ care este diferenţiabilă într-un punct $a=(a_1,a_2)$, graficul funcţiei va admite un plan tangent în punctul $(a,f(a))$, ce are ecuaţia:

$$z-f(a)=df(a)(x-a_1,y-a_2).$$

Aşadar, ca şi în cazul funcţiilor reale de variabilă reală, graficul diferenţialei $df(a)$ este translaţia acestui plan tangent la graficul funcţiei f în origine. Din nou, pentru puncte diferite din D în care f este diferenţiabilă, planele tangente pot fi diferite. În concuzie, diferenţiala defineşte, pentru fiecare punct în care există, câte o aplicaţie liniară, al cărei grafic este translaţia planului tangent dus în punctul corespunzător la graficul funţiei în origine.

Teorema 1.5 (Reguli de calcul pentru diferenţiale) *Fie mulţimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^k$, $x \in D$ şi funcţiile $f, g : D \to \mathbb{R}^p$, $h : D \to \mathbb{R}$.*

(i) Dacă f şi g sunt diferenţiabile în x, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha f + \beta g$ este diferenţiabilă în x şi

$$d(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha df(x) + \beta dg(x).$$

(ii) Dacă f şi φ sunt diferenţiabile în x, iar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, atunci $\varphi \cdot f$ este diferenţiabilă în x şi

$$d(\varphi \cdot f)(x) = d\varphi(x) \cdot f(x) + \varphi(x) \cdot df(x).$$

Demonstraţie. Exerciţiu! □

Are loc, de asemenea, următorul rezultat, numit şi **regula lanţului**.

Teorema 1.6 (Diferenţierea funcţiilor compuse) *Fie mulţimile deschise $D \subset \mathbb{R}^k$, $\Delta \subset \mathbb{R}^p$, şi funcţiile $f : D \to \Delta$, $g : \Delta \to \mathbb{R}^m$. Dacă f este diferenţiabilă în $x \in D$, iar g este diferenţiabilă în $y = f(x) \in \Delta$, atunci $g \circ f : D \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în x şi*

$$d(g \circ f)(x) = dg(y) \circ df(x). \tag{4}$$

Demonstraţie. Exerciţiu! □

În cele ce urmează, vom pune în evidenţă o formulă de calcul pentru diferenţialele unei funcţii $f : D \to \mathbb{R}$.

Teorema 1.7 *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în x. Atunci f este derivabilă parţial în x şi, pentru orice $v = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{R}^k$, are loc formula*

$$df(x)(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot v_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot v_k = \langle \nabla f(x), v \rangle . \tag{5}$$

Mai mult, putem scrie

$$df(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot dx_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot dx_k, \tag{6}$$

unde prin dx_i s-a notat diferenţiala aplicaţiei de proiecţie $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dată prin $\mathrm{pr}_i(x) := x_i$ pentru orice $x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Demonstraţie. Deoarece derivata direcţională există pentru orice direcţie, va exista şi pentru direcţiile date de vectorii bazei canonice din $\mathbb{R}^k$, deci f va fi derivabilă parţial în x. Cum, pentru orice $v \in \mathbb{R}^k$, aplicaţia $v \mapsto df(x)(v)$ este liniară continuă, iar $v = v_1 e_1 + ... + v_k e_k$, rezultă

$$\begin{aligned} df(x)(v) &= df(x)(v_1 e_1 + ... + v_k e_k) = v_1 \cdot df(x)(e_1) + ... + v_k \cdot df(x)(e_k) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot v_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot v_k. \end{aligned}$$

Considerând acum funcţia $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_i(x) = x_i$, aceasta este în mod evident diferenţiabilă şi în plus, aplicând formula de mai sus şi luând în considerare că $\frac{\partial\, \mathrm{pr}_i}{\partial x_j}(x) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{dacă } i \neq j \\ 1, & \text{dacă } i = j \end{cases}$, obţinem

$$d\,\mathrm{pr}_i(x)(v) = v_i.$$

Rezultă concluzia. $\square$

Observaţia 1.8 *În cazurile $k = 2$ şi $k = 3$ vom avea, pentru orice $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,*

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot dy,$$

$$df(x, y)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot h_2,$$

şi respectiv, pentru orice $(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \cdot dz,$$

$$df(x, y, z)(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \cdot h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \cdot h_3.$$

Exerciţiul 1.9 *Calculaţi diferenţiala funcţiei $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$f(x, y) = x^y.$$

Vom avea

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \cos(x + 2y^2 - 3z^3), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 4y \cdot \cos(x + 2y^2 - 3z^3), \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= -9z^2 \cdot \cos(x + 2y^2 - 3z^3).
\end{aligned}$$

Conform teoremei anterioare, va rezulta că

$$\begin{aligned}
df(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot dy \\
&= yx^{y-1} \cdot dx + x^y \cdot \ln x \cdot dy.
\end{aligned}$$

Aşadar,

$$df(2, 1) = dx + 2 \ln 2 \cdot dy,$$

adică

$$df(2, 1)(h_1, h_2) = h_1 + 2 \ln 2 \cdot h_2, \quad \forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Atunci

$$df(2, 1)(-1, 3) = -1 + 2 \ln 2 \cdot 3 = -1 + 6 \ln 2.$$

Am văzut în Teorema 1.4 că o funcţie $f = (f_1, f_2, ..., f_p) : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^p$ este diferenţiabilă în $x \in D$ dacă şi numai dacă funcţiile componente $f_1, f_2, ..., f_p : D \to \mathbb{R}$ au această proprietate şi

$$df(x) = (df_1(x), ..., df_p(x)).$$

Luând în considerare şi Teorema 1.7, aceste funcţii vor fi derivabile parţial în x şi fiecare dintre ele va satisface o formulă de tipul (5). Putem considera atunci matricea

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) & ... & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) & ... & \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & ... & \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(x) & ... & \frac{\partial f_p}{\partial x_k}(x) \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right], \tag{7}$$

numită **matricea jacobiană** ataşată funcţiei f în punctul x şi avem următorul rezultat (a se vedea cursul precedent).

Teorema 1.10 *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}^p$ o funcţie diferenţiabilă în x. Atunci funcţiile componente $f_1, ..., f_k$ sunt derivabile parţial în x, iar matricea aplicaţiei liniare $df(x)$ în bazele canonice din $\mathbb{R}^k$ şi $\mathbb{R}^p$ este $J_f(x)$. Cu alte cuvinte, pentru orice vector $h = (h_1, ..., h_k) \in \mathbb{R}^k$, vom avea*

$$[df(x)(h)]^T = J_f(x) \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Având în vedere cele prezentate anterior şi formula (8), obţinem următoarea consecinţă a regulii lanţului.

Corolarul 1.11 *În ipotezele Teoremei 1.6, are loc egalitatea*

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(y) \cdot J_f(x). \tag{9}$$

Demonstraţie. Vom avea, pentru $h = (h_1, ..., h_k) \in \mathbb{R}^k$

$$\begin{aligned} J_{g\circ f}(x) \cdot h^T &= [d(g \circ f)(x)(h)]^T = [dg(y)\,(df(x)(h))]^T \\ &= \left[dg(y)\left(h \cdot J_f(x)^T\right)\right]^T = J_g(y) \cdot \left(h \cdot J_f(x)^T\right)^T \\ &= J_g(y) \cdot J_f(x) \cdot h^T. \end{aligned}$$

Rezultă egalitatea (9). □

Exerciţiul 1.12 *Fie mulţimea $A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq -2\right\}$ şi funcţiile*

$$f : A \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = \left(\sqrt{x}, \sqrt{x^2 + 3y^2}, \sqrt{y + 2}\right),$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad g(u,v,w) = \left(u^2 + v^2 + 2w^2, u^2 - v^2\right),$$
$$h = g \circ f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Notăm cu $a := (1,-1) \in A$ *şi cu* $b := f(a) = (1,2,1)$.

Să se verifice că $dh(a) = dg(b) \circ df(a)$.

Soluţie. *Să observăm că* $a \in \operatorname{int} A$ *şi* $b \in \operatorname{int} f(A)$. *Obţinem*

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}} & \dfrac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}} \\ 0 & \dfrac{1}{2\sqrt{y+2}} \end{bmatrix} \text{ şi } J_f(1,-1) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$J_g(u,v,w) = \begin{bmatrix} 2u & 2v & 4w \\ 2u & -2v & 0 \end{bmatrix} \text{ şi } J_g(1,2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

apoi

$$\begin{aligned} h(x,y) &= g\left(f(x,y)\right) = g\left(\sqrt{x}, \sqrt{x^2+3y^2}, \sqrt{y+2}\right) \\ &= \left(x + x^2 + 3y^2 + 2y + 4, x - x^2 - 3y^2\right), \end{aligned}$$

de unde

$$J_h(x,y) = \begin{bmatrix} 1+2x & 6y+2 \\ 1-2x & -6y \end{bmatrix} \text{ şi } J_h(1,-1) = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Pe de altă parte avem:

$$J_g(1,2,1) \cdot J_f(1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{3}{2} \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

În continuare, avem:

$$\begin{aligned} df(1,-1) &= \left(\frac{1}{2}dx, \frac{1}{2}dx - \frac{3}{2}dy, \frac{1}{2}dy\right), \\ dg(1,2,1) &= \left(2du + 4dv + 4dw, 2du - 4dv\right), \\ dh(1,-1) &= \left(3dx - 4dy, -dx + 6dy\right), \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} & dg(1,2,1) \circ df(1,-1) \\ &= \left(2 \cdot \frac{1}{2}dx + 4\left(\frac{1}{2}dx - \frac{3}{2}dy\right) + 4 \cdot \frac{1}{2}dy, 2 \cdot \frac{1}{2}dx - 4\left(\frac{1}{2}dx - \frac{3}{2}dy\right)\right) \\ &= \left(3dx - 4dy, -dx + 6dy\right). \end{aligned}$$

Exemplul 1.13 *Să studiem câteva cazuri particulare ale Corolarului 1.11.*

(i) Pentru $D \subset \mathbb{R}$, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \Delta$, $f(t) = (u(t), v(t))$, $g : \Delta \to \mathbb{R}$, *iar* $h = g \circ f : D \to \mathbb{R}$, *obţinem*

$$h'(t) = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot u'(t) + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot v'(t), \quad \forall t \in D.$$

(ii) Pentru $D, \Delta \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \Delta$, $f(x,y) = (u,v) = (u(x,y), v(x,y))$, $g : \Delta \to \mathbb{R}$, *iar* $h = g \circ f : D \to \mathbb{R}$, *obţinem*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial h}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial h}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial h}{\partial y} = \dfrac{\partial h}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial h}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

În continuare, vom pune în evidenţă un criteriu de diferenţiabilitate, ce va avea în vedere derivabilitatea parţială a funcţiilor componente.

Teorema 1.14 (Criteriu de diferenţiabilitate) *Fie* $D \subset \mathbb{R}^k$ *o mulţime deschisă,* $f : D \to \mathbb{R}^p$ *o funcţie şi* $x \in D$. *Dacă toate funcţiile componente* $f_1, f_2, ..., f_p : D \to \mathbb{R}$ *sunt derivabile parţial pe o vecinătate* $V \subset D$ *a lui* x *şi derivatele parţiale sunt continue în* x, *atunci* f *este Fréchet diferenţiabilă în* x.

Demonstraţie. Să observăm că este suficient să arătăm afirmaţia doar pentru una dintre funcţiile componente, având în vedere Teorema 1.4. Fixăm aşadar $i \in \overline{1,p}$ şi arătăm că f_i este diferenţiabilă în x.

Fie $r > 0$ astfel încât $B(x,r) \subset D$. Pentru orice $h \in B(0,r)$, avem că

$$\begin{aligned} & f_i(x+h) - f_i(x) = f_i(x_1 + h_1, ..., x_k + h_k) - f_i(x_1, ..., x_k) \\ & = [f_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) - f_i(x_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k)] \\ & + [f_i(x_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k) - f_i(x_1, x_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k)] \\ & + ... + [f_i(x_1, ..., x_{k-1}, x_k + h_k) - f_i(x_1, ..., x_{k-1}, x_k)] \,. \end{aligned}$$

Cum funcţia f_i este derivabilă parţial pe $B(x,r)$, ne va rezulta că funcţia

$$t \mapsto f_i(x_1 + t, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k)$$

este derivabilă parţial pe intervalul $(0, h_1)$ (sau $(h_1, 0)$), deci putem aplica Teorema lui Lagrange pentru a găsi $c_1 \in (0, h_1)$ (sau $(h_1, 0)$), astfel încât

$$\begin{aligned} & f_i(x_1 + h_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) - f_i(x_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) \\ & = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1 + c_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) \cdot h_1. \end{aligned}$$

Analog, pentru funcţia

$$t \mapsto f_i(x_1, x_2 + t, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k)$$

găsim $c_2 \in (0, h_2)$ (sau $(h_2, 0)$), astfel încât

$$\begin{aligned} & f_i(x_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k) - f_i(x_1, x_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k) \\ & = \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1, x_2 + c_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k) \cdot h_2. \end{aligned}$$

Procedând la fel pentru celelalte paranteze, ne va rezulta că există $c_j \in (0, h_j)$ (sau $(h_j, 0)$), pentru $j = \overline{1, k}$, astfel încât

$$\begin{aligned} f_i(x+h) - f_i(x) &= \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1 + c_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) \cdot h_1 \\ &+ \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1, x_2 + c_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k) \cdot h_2 \\ &+ ... + \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1, ..., x_{k-1}, x + c_k) \cdot h_k. \end{aligned}$$

Fie acum $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ dat prin

$$T(h) = T(h_1, ..., h_k) := \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \cdot h_j.$$

Să observăm că $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$. Putem scrie atunci că

$$\begin{aligned} &\frac{f_i(x+h) - f_i(x) - Th}{\|h\|} = \\ &= \frac{h_1}{\|h\|} \cdot \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1 + c_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_k) \right] \\ &+ \frac{h_2}{\|h\|} \cdot \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1, x_2 + c_2, x_3 + h_3, ..., x_k + h_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(x_1, x_2, ..., x_k) \right] \\ &+ ... + \frac{h_k}{\|h\|} \cdot \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1, ..., x_{k-1}, x + c_k) - \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1, x_2, ..., x_k) \right]. \end{aligned}$$

Dacă $h \to 0$ ne va rezulta $h_j \to 0$, şi implicit $c_j \to 0$, pentru orice $j \in \overline{1, k}$. De asemenea, $\frac{|h_j|}{\|h\|} \leq 1$, pentru orice $j \in \overline{1, k}$, iar $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ fiind continue în x, vom avea că

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1 + c_1, x_2 + h_2, ..., x_k + h_k) &\to \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_k), \\ &... \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1, ..., x_{k-1}, x + c_k) &\to \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x_1, x_2, ..., x_k) \end{aligned}$$

dacă $h \to 0$.
Atunci, putem scrie că

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_i(x+h) - f_i(x) - Th}{\|h\|} = 0,$$

deci f_i este diferenţiabilă în x. Teorema este complet demonstrată. □

Există funcţii diferenţiabile pentru care nu este îndeplinit criteriul dat de Teorema 1.14 (condiţiile nu sunt necesare).

Exerciţiul 1.15 *Să se arate că funcţia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este diferenţiabilă în $(0,0)$ *(pe* $\mathbb{R}^2$*), dar derivatele parţiale nu sunt continue în* $(0,0)$*.*

Soluţie. *Obţinem, cu definiţia, că* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$*, iar pentru* $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Considerăm

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{f(u,v) - f(0,0)}{\|(u,v)\|_2} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}} \sin \frac{1}{u^2+v^2}.$$

Cum

$$0 \leq \left| \frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}} \sin \frac{1}{u^2+v^2} \right| < |u| \cdot \left| \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \right| \cdot \left| \sin \frac{1}{u^2+v^2} \right| \leq |u|,$$

rezultă că funcţia f *este diferenţiabilă în* $(0,0)$*, cu* $df(0,0) = 0$*.*

Luând şirul $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \to (0,0)$*, obţinem*

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sin \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \cos \frac{n^2}{2},$$

deci nu există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$*, aşadar nu există* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$*. Analog pentru* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$*. Aşadar, nu putem aplica criteriul de diferenţiabilitate dat de teorema anterioară.*

Desigur, în orice punct $(x,y) \neq (0,0)$ *rezultă că* f *este diferenţiabilă deoarece* $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ *sunt continue.*

1.2 Diferenţiale de ordin superior

Să trecem acum la definirea diferenţialelor de ordin superior.

Definiţia 1.16 *Fie* $n \geq 2$*,* $D \subset \mathbb{R}^k$ *o mulţime deschisă şi* $f : D \to \mathbb{R}$*. Spunem că* f *este* ***diferenţiabilă de ordinul*** n ***în*** $x \in D$ *dacă* f *este derivabilă parţial de ordinul* $(n-1)$ *pe o vecinătate* $V \subset D$ *a lui* x*, iar derivatele parţiale de ordinul* $(n-1)$ *sunt diferenţiabile în* x*.*

Vom spune că f *este* ***diferenţiabilă de ordinul*** n ***pe*** D *dacă* f *este diferenţiabilă de ordinul* n *în orice* $x \in D$*.*

Reamintim că, pentru o funcţie diferenţiabilă într-un punct x, avem formula

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot dx_k.$$

Va fi atunci natural să considerăm următoarea definiţie a diferenţialelor de ordin superior.

Definiţia 1.17 *Fie* $n \geq 2$*,* $D \subset \mathbb{R}^k$ *o mulţime deschisă şi* $f : D \to \mathbb{R}$ *o funcţie diferenţiabilă de ordin* n *în* $x \in D$*. Numim* ***diferenţială de ordin*** n *a funcţiei* f *în punctul* x *aplicaţia* $d^n f(x) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *dată prin*

$$d^n f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot dx_k \right)^{(n)},$$

unde notaţia din membrul drept semnifică faptul că expresia din paranteză se ridică, formal, la puterea simbolică n după o formulă de tip binomial, în care puterea semnifică ordinul de derivare.

Astfel,

$$\begin{array}{lll}
\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^{(n)} & \textit{reprezintă} & \dfrac{\partial^n f}{\partial x_i^n}(x) \\
\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^{(n-1)} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right) & \textit{reprezintă} & \dfrac{\partial^n f}{\partial x_i^{n-1}\partial x_j}(x) \\
\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^{(n-2)} \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)^{(2)} & \textit{reprezintă} & \dfrac{\partial^n f}{\partial x_i^{n-2}\partial x_j^2}(x) \ \textit{etc. ...},
\end{array}$$

sau, în general,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right)^{(\alpha_1)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\right)^{(\alpha_2)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\right)^{(\alpha_k)} \quad \textit{reprezintă} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_k^{\alpha_k}}(x),$$

unde $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k = n$.

Observaţia 1.18 *Să observăm acum că, deoarece f este diferenţiabilă de ordinul n în x, toate derivatele parţiale de ordin n există în baza Definiţiei 1.16. De asemenea, dacă o funcţie este diferenţiabilă de ordinul n într-un punct, atunci derivatele parţiale mixte de orice ordin mai mic sau egal cu n există şi sunt egale.*

În baza formulei de mai sus rezultă că, în cazul $n = 2$, diferenţiala de ordinul II a funcţiei f va avea formula

$$\begin{aligned} d^2 f(x) &= \sum_{1\le i,j\le k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\cdot dx_i \cdot dx_j \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x)\cdot (dx_i)^2 + 2\cdot \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\cdot dx_i \cdot dx_j \end{aligned} \tag{10}$$

sau, pentru orice $h = (h_1, ..., h_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$d^2 f(x)(h) = \sum_{1\le i,j\le k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\cdot h_i \cdot h_j,$$

adică diferenţiala de ordinul II este o formă pătratică. Matricea ataşată acestei forme pătratice este

$$H = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

şi se numeşte ***matricea hessiană*** *a lui f în x care, în baza egalităţii derivatelor mixte, este o matrice simetrică.*

Ca de obicei, vom particulariza în cazurile $k = 2$ şi $k = 3$. Vom avea astfel, pentru $k = 2$

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\cdot (dy)^2 + 2\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\cdot dx \cdot dy$$

şi, pentru $k = 3$,

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y,z) = {}& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)\cdot (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)\cdot (dy)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)\cdot (dz)^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)\cdot dx\cdot dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z)\cdot dx\cdot dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)\cdot dy\cdot dz. \end{aligned}$$

Exerciţiul 1.19 *Să se scrie diferenţiala de ordinul II a funcţiei* $f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^y$$

în punctul $(1, 2)$, *aplicată în* $(-3, 2)$.
Vom avea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = f''_{xx}(x, y) = \left(y \cdot x^{y-1}\right)'_x = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = f''_{yy}(x, y) = (x^y \cdot \ln x)'_y = \ln x \cdot (x^y)'_y = \ln x \cdot x^y \cdot \ln x = x^y \cdot \ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = (x^y \cdot \ln x)'_x = yx^{y-1} \ln x + x^y \cdot \frac{1}{x} = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = f''_{xy}(x, y) = \left(y \cdot x^{y-1}\right)'_y = x^{y-1} + y \cdot x^{y-1} \cdot \ln x.$$

Rezultă

$$d^2 f(x, y) = y \cdot (y-1) \cdot x^{y-2} \cdot (dx)^2 + x^y \cdot \ln^2 x \cdot (dy)^2 + 2 \cdot \left(yx^{y-1} \ln x + x^{y-1}\right) \cdot dx \cdot dy,$$

de unde

$$d^2 f(1, 2) = 2(dx)^2 + 2 \cdot dx \cdot dy.$$

Aşadar,

$$d^2 f(1, 2)(h_1, h_2) = 2h_1^2 + 2h_1 h_2$$

şi

$$d^2 f(1, 2)(-3, 2) = 18 - 12 = 6.$$

Definiţia 1.20 *Spunem că* f *este* ***de clasă*** $\mathcal{C}^1$ ***pe mulţimea*** D *dacă* f *este diferenţiabilă pe* D *şi* df *este continuă pe* D. *Inductiv, vom spune că* f *este* ***de clasă*** C^n ***pe mulţimea*** D *dacă* f *este diferenţiabilă de ordin* n *pe* D *şi* $d^n f$ *este continuă pe* D. *Vom nota*

$$\mathcal{C}^n(D) = \{f : D \to \mathbb{R}^p \mid f \text{ este de clasă } \mathcal{C}^n \text{ pe } D\}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

şi, prin conventie,

$$\mathcal{C}^0(D) = \{f : D \to \mathbb{R}^p \mid f \text{ continuă pe } D\}.$$

Spunem că f *este de* ***clasă*** $\mathcal{C}^\infty$ ***pe mulţimea*** D *dacă* f *este diferenţiabilă de orice ordin pe* D. *Vom nota*

$$\mathcal{C}^\infty(D) = \{f : D \to \mathbb{R}^p, \ f \text{ este de clasă } \mathcal{C}^\infty \text{ pe } D\}.$$

1.3 Formula lui Taylor

Pentru două puncte $a, b \in \mathbb{R}^k$, vom nota cu $[a, b]$ segmentul închis de extremităţi a, b,

$$[a, b] = \{a + t(b - a) \mid 0 \le t \le 1\}.$$

Să formulăm acum extinderea Teoremei lui Taylor la cazul funcţiilor de variabilă vectorială.

Teorema 1.21 (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange) *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă de ordin $n+1$ pe D şi punctele distincte $a, x \in D$ astfel încât $[a, x] \subset D$. Atunci există $c \in (a, x)$ astfel încât*

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(x-a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a)(x-a) \\ + ... + \frac{1}{n!} d^n f(a)(x-a) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(c)(x-a). \end{aligned} \tag{11}$$

Demonstraţie. Fie $\{a + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ dreapta care trece prin a şi are direcţia $v \neq 0 \in \mathbb{R}^k$. Definim funcţia $h(t) = f(g(t)) = f(a + tv) = (f \circ g)(t)$, unde $g(t) = a + tv$. Avem din regula lanţului că

$$\begin{aligned} h'(t) \cdot dt &= dh(t) = df(g(t)) \circ dg(t) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+tv) \cdot dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a+tv) \cdot dx_k \right) \circ (v_1, ..., v_k) \cdot dt, \end{aligned}$$

deci

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+tv) \cdot v_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a+tv) \cdot v_k = df(a+tv)(v),$$

pentru orice t suficient de mic astfel încât $a + tv$ să rămână în D.
Diferenţiind h' folosind din nou regula lanţului, obţinem

$$\begin{aligned} h''(t) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+tv) \right) v_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a+tv) \right) v_k \right) v_1 + ... \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(a+tv) \right) v_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(a+tv) \right) v_k \right) v_k \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a+tv) v_1^2 + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(a+tv) v_k v_1 \right) + ...+ \\ &\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(a+tv) v_1 v_k + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(a+tv) v_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+tv) v_i v_j = d^2 f(a+tv)(v). \end{aligned}$$

Putem diferenţia în continuare h'' pentru a obţine

$$h^{(3)}(t) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}(a+tv) v_i v_j v_l = d^3 f(a+tv)(v),$$

şi în general

$$h^{(l)}(t) = \sum_{i_1=1}^{k} ... \sum_{i_l=1}^{k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_l}}(a+tv) d_{i_1} \cdot ... \cdot d_{i_l} = d^l f(a+tv)(v)$$

pentru orice $l \in \overline{1, k+1}$.

Aplicăm acum Formula lui MacLaurin cu restul lui Lagrange funcţiei h şi obţinem că există $\xi \in (0, t)$ (sau $(t, 0)$) astfel încât

$$h(t) = h(0) + \frac{t}{1!} h'(0) + ... + \frac{t^n}{n!} h^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} h^{(n+1)}(\xi).$$

Luând $v := x - a$ şi $t := 1$, vom obţine existenţa lui $c := a + \xi(x-a) \in (a, x)$ (căci $\xi \in (0, 1)$) astfel încât are loc (11). $\square$