CURS 8, Analiză matematică, semestrul I, 2014–2015

1 Aplicaţii ale calculului diferenţial. Puncte de extrem

Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime dechisă nevidă, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi $M \subset D$ o mulţime nevidă. Observăm că putem extinde definiţia punctelor de extrem local din cazul funcţiilor reale (i.e., Definiţia **??**) în această situaţie, după cum urmează.

Definiţia 1.1 *Spunem că $a \in M$ este:*
(i) ***punct de minim local*** *pentru f pe mulţimea M dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \leq f(x)$, pentru orice $x \in M \cap V$;*
(ii) ***punct de maxim local*** *pentru f pe mulţimea M dacă există o vecinătate V a punctului a astfel încât $f(a) \geq f(x)$, pentru orice $x \in M \cap V$;*
(iii) ***punct de extrem local*** *pentru f pe mulţimea M dacă e punct de minim sau de maxim local.*

Dacă $M = D$ în definiţia de mai sus, vom spune că punctul a este punct de minim (respectiv, maxim, extrem) local pentru f. În cazul în care în definiţia de mai sus $V = \mathbb{R}^k$, vom spune că punctul a este punct de minim (respectiv, maxim, extrem) global pentru f pe M.

1.1 Optimizare fără restricţii

În acest caz, are loc următoarea extindere a Teoremei lui Fermat.

Teorema 1.2 (Fermat) *Fie $D \subset \mathbb{R}^k$ o mulţime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă în $a \in D$. Dacă a este punct de extrem local pentru f, atunci a este punct critic, adică*

$$df(a) = 0.$$

Demonstraţie. Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că a este punct de minim local pentru f. Pentru o direcţie oarecare $v \in \mathbb{R}^k$, vom avea

$$\frac{df}{dv}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = df(a)(v).$$

În cazul în care $|t|$ este suficient de mic, numărătorul fracţiei de mai sus este negativ, deoarece a este punct de minim local. Luând limitele la stânga şi la dreapta în expresia de mai sus, ambele egale cu $\frac{df}{dv}(a)$, obţinem $\frac{df}{dv}(a) \leq 0$ şi $\frac{df}{dv}(a) \geq 0$, adică $\frac{df}{dv}(a) = df(a)(v) = 0$, pentru orice $v \in \mathbb{R}^k$, de unde avem concluzia. $\square$

Observaţia 1.3 *Teorema lui Fermat oferă, ca în cazul scalar, condiţii necesare pentru ca un punct să fie de extrem local. Aceste condiţii nu sunt suficiente, după cum reiese din următorul exemplu: fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$f(x, y) := x^2 - y^2.$$

Atunci $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y$, *deci* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ *şi* $df(0,0)=0$. *Totuşi, pentru orice* $\varepsilon>0$, *vom avea*

$$f(\varepsilon,0)=\varepsilon^2>0=f(0,0) \text{ şi}$$
$$f(0,\varepsilon)=-\varepsilon^2<0=f(0,0),$$

ceea ce arată că $(0,0)$ *nu este punct de extrem local.*

Mai mult, dacă notăm $(a,b):=(0,0)$, *vom avea*

$$f(a,y)\le f(a,b)\le f(x,b),\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Un punct (a,b) *care verifică o relaţie de tip (1) pe o vecinătate a sa se numeşte* ***punct şa pentru*** f. *Aşadar, în cazul nostru,* $(0,0)$ *este punct şa pentru funcţia* f.

Pentru a determina punctele critice, sau **staţionare**, trebuie deci să rezolvăm sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,...,\frac{\partial f}{\partial x_n}=0.$$

Punctele de extrem se află printre soluţiile acestui sistem. Pentru a putea decide care dintre punctele staţionare este punct de extrem vom folosi următorul rezultat:

Teorema 1.4 (Condiţii suficiente de ordinul II) *Fie* $D\subset\mathbb{R}^k$ *o mulţime deschisă,* $f:D\to\mathbb{R}$ *o funcţie de clasă* $\mathcal{C}^2$ *pe* D *şi* $a\in D$ *astfel încât* $df(a)=0$. *Dacă:*

(i) $d^2f(a)$ *este pozitiv definită, adică* $d^2f(a)(h)>0$, *pentru orice* $h\in\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$, *atunci* a *este punct de minim local pentru* f;

(ii) $d^2f(a)$ *este negativ definită, adică* $d^2f(a)(h)<0$, *pentru orice* $h\in\mathbb{R}^k\setminus\{0\}$, *atunci* a *este punct de maxim local pentru* f;

(iii) $d^2f(a)$ *este nedefinită, adică există* $x,y\in\mathbb{R}^k$ *astfel încât* $d^2f(a)(x)>0$ *şi* $d^2f(a)(y)<0$, *atunci* a *nu este punct de extrem pentru* f.

Demonstraţie. Se forloseşte Formula lui Taylor. □

Următorul rezultat, ce reprezintă un caz particular al teoremei anterioare, poate fi util uneori.

Teorema 1.5 *Fie* f *o funcţie de clasă* C^2 *pe un deschis* $D\subset\mathbb{R}^n$ *şi* $a\in D$ *un punct critic. Fie* H *matricea hessiană în care vom nota, pentru uşurinţa scrierii* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\alpha_{ij}$.

1. *Dacă toate numerele*

$$\Delta_1=\alpha_{11}\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix},...,\Delta_n=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn}\end{vmatrix}$$

   sunt strict pozitive, atunci $d^2f(a)$ *este pozitiv definită şi* a *este punct de minim local;*

2. *Dacă toate numerele*

$$-\Delta_1,\quad \Delta_2,...,(-1)^n\Delta_n$$

   sunt strict pozitive, atunci $d^2f(a)$ *este negativ definită şi* a *este punct de maxim local.*

Exemplul 1.6 *Să se determine punctele de extrem ale funcţiei*

$$f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz.$$

Avem,mai întâi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 2x \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4z + 2x.$$

Rezolvând sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

găsim $a = (0,0,0)$ *ca singurul punct staţionar. Construim mai departe matricea hessiană calculând derivatele parţiale de ordinul* 2 *şi obţinem*

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Se calculează imediat $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 12 > 0$, $\Delta_3 = 8 > 0$ *ceea ce spune că* $d^2 f(0,0,0)$ *este pozitiv definită, deci* $(0,0,0)$ *este punct de minim local.*

Pentru funcţii de două variabile, Teorema 1.4 poate fi pusă sub forma:

Teorema 1.7 *Fie* f *o funcţie de clasă* C^2 *pe un deschis* $D \subset \mathbb{R}^n$ *şi* $a \in D$ *un punct critic pentru* f*. Notăm* $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$*. Dacă:*

1. $B^2 - AC < 0$ *şi* $A > 0$*, atunci* a *este punct de minim local.*
2. $B^2 - AC < 0$ *şi* $A < 0$*, atunci* a *este punct de maxim local.*
3. $B^2 - AC > 0$*, atunci* a *nu este punct de extrem.*

Observaţia 1.8 *Dacă* $B^2 - AC = 0$ *nu ne putem pronunţa dacă* a *este punct de extrem sau nu. În acest caz trebuie să studiem diferenţialele de ordin superior ale lui* f*.*

Să ilustrăm cele spuse anterior prin câteva exemple suplimentare.

Exerciţiul 1.9 *Determinaţi extremele locale libere ale funcţiei* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dată prin*

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Punctele critice ale funcţiei f *se vor determina rezolvând sistemul*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0. \end{cases}$$

Soluţiile vor fi vectorii $\theta = (0,0)$, $a = (-1,-1)$, $b = (1,1)$.

Determinăm diferenţiala de ordinul II pentru fiecare dintre aceste puncte. Pentru aceasta, calculăm

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2. \end{cases}$$

Vom avea

$$d^2 f(x,y)(h_1,h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \cdot h_2^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \cdot h_1 h_2.$$

Pentru θ, *obţinem*

$$d^2 f(\theta)(h_1,h_2) = -2\left(h_1 + h_2\right)^2,$$

o formă pătratică pozitiv semidefinită, deci nu putem aplica Teorema 1.4. Observăm însă că, pentru $\varepsilon > 0$ *suficient de mic, avem* $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^4 - \varepsilon^2 < 0 = f(0,0)$, *iar* $f(\varepsilon, -\varepsilon) = 2\varepsilon^4 > 0 = f(0,0)$, *de unde rezultă că* θ *nu este punct de extrem.*

Pentru a, *vom obţine*

$$d^2 f(a)(h_1,h_2) = 2\left(5h_1^2 - 2h_1 h_2 + 5h_2^2\right),$$

a cărei matrice este

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ne va rezulta că $d^2 f(a)$ *este pozitiv definită, deci* a *este punct de minim local.*

Pentru b, *vom avea de asemenea*

$$d^2 f(b)(h_1,h_2) = 2\left(5h_1^2 - 2h_1 h_2 + 5h_2^2\right),$$

deci şi b *este punct de minim local pentru* f.

Exerciţiul 1.10 *Găsiţi extremele locale libere ale funcţiei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) := (ax^2 + by^2 + cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2},$$

unde $a > b > c > 0$ *sunt parametri fixaţi.*

Determinăm mai întâi punctele critice. Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x^2-y^2-z^2} \cdot 2x(a - ax^2 - by^2 - cz^2) = 0 \\ e^{-x^2-y^2-z^2} \cdot 2y(b - ax^2 - by^2 - cz^2) = 0 \\ e^{-x^2-y^2-z^2} \cdot 2z(c - ax^2 - by^2 - cz^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(a - ax^2 - by^2 - cz^2) = 0 \\ y(b - ax^2 - by^2 - cz^2) = 0 \\ z(c - ax^2 - by^2 - cz^2) = 0. \end{cases}$$

Să observăm că două paranteze din cele de mai sus nu se pot anula simultan, din cauza condiţiei puse asupra lui a, b, c. *Vom obţine aşadar punctele critice* $(0,0,0), (\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$.

Obţinem pentru diferenţialele de ordin II:

$$d^2 f(0,0,0)(h_1,h_2,h_3) = 2\left(ah_1^2 + bh_2^2 + ch_3^2\right),$$

deci $(0,0,0)$ *este punct de minim local,*

$$\begin{aligned} d^2 f(1,0,0)(h_1,h_2,h_3) &= 2e^{-1}\left[-2ah_1^2 + (b-a)h_2^2 + (c-a)h_3^2\right] \\ &= d^2 f(-1,0,0)(h_1,h_2,h_3), \end{aligned}$$

de unde $(\pm 1,0,0)$ *sunt puncte de maxim local,*

$$\begin{aligned} d^2 f(0,1,0)(h_1,h_2,h_3) &= 2e^{-1}\left[(a-b)h_1^2 - 2bh_2^2 + (c-a)h_3^2\right] \\ &= d^2 f(0,-1,0)(h_1,h_2,h_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2 f(0,0,1)(h_1,h_2,h_3) &= 2e^{-1}\left[(a-c)h_1^2 + (b-c)h_2^2 - 2ch_3^2\right] \\ &= d^2 f(0,0,-1)(h_1,h_2,h_3), \end{aligned}$$

de unde $(0,\pm 1,0)$, $(0,0,\pm 1)$ *nu sunt puncte de extrem.*

Exerciţiul 1.11 *Să se demonstreze inegalitatea*

$$|(x+y)e^{-x^2-y^2}| \le \frac{1}{\sqrt{e}},\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soluţie. *Determinăm extremele globale ale funcţiei*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}.$$

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-x^2-y^2}(1 - 2x(x+y)), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-x^2-y^2}(1 - 2y(x+y)).$$

Punctele critice ale lui f *sunt* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ *care sunt puncte de maxim, respectiv minim local*

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad f\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{e}}.$$