Curs 3

Variabile aleatoare

3.1 Definiţia şi clasificarea variabilelor aleatoare

Una din noţiunile fundamentele ale teoriei probabilităţilor este cea de variabilă aleatoare. Teoria clasică a probabilităţilor operează, în principal, cu evenimente, iar teoria modernă preferă, unde este posibil, să studieze variabile aleatoare. Intuitiv, o variabilă aleatoare atribuie o valoare numerică oricărui caz posibil al experienţei considerate. Practic toate mărimile fizice, tehnice, economice întâlnite în inginerie sunt variabile aleatoare.

Fie $\{F, \Omega, P\}$ un câmp de probabilitate.

Definiţia 3.1.1 *Funcţia*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

*se numeşte **variabilă aleatoare** (v.a.) dacă*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathbf{F}. \tag{3.1}$$

Această definiţie justifică afirmaţia că toate mărimile măsurabile sunt variabile aleatoare. Pentru simplitate, vom nota $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} = \{X \le x\}$.

Observaţia 3.1.2 *Nu este obligatoriu $X(\Omega) = \mathbb{R}$, deci $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$; $X(\Omega)$ reprezintă mulţimea valorilor variabilei aleatoare.*

Relaţia $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x\} \in \mathbf{F}$ semnifică de fapt că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ se poate calcula probabilitatea ca X să fie mai mică sau egală cu x, adică există $P(\{X \le x\})$.

Definiţia 3.1.3 *Se numeşte **vector aleator** $n-$**dimensional** orice $n-$uplu*

$$X = (X_1, X_2, \ ..., X_n)$$

având cele n componente variabile aleatoare.

3.1.1 Variabile aleatoare discrete

Dacă Ω este finit sau numărabil atunci orice funcţie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare. Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$. Notând $x_i = X(\omega_i), i \ge 1$, $E_i = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$ şi $p_i = P(E_i)$, se obţin toate valorile posibile ale lui X precum şi probabilităţile cu care acestea sunt luate. Aceste evenimente formează un sistem complet de evenimente deoarece pentru $i \ne j, E_i \cap E_j = \emptyset$ şi $\bigcup\limits_{i\ge1} E_i = \Omega$. Evident $0 \le p_i \le 1$ şi $\sum\limits_{i\ge1} p_i = 1$.deoarece

$$\sum_{i\ge1} p_i = \sum_{i\ge1} P(E_i) = P\left(\bigcup_{i\ge1} E_i\right) = P(\Omega) = 1.$$

Variabilei aleatoare X i se poate asocia o matrice cu două linii, numită **matricea (tabelul) de repartiţie** a lui X, de forma:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n & ... \\ p_1 & p_2 & ... & p_n & ... \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

unde pe prima linie sunt scrise valorile distincte ale lui X şi pe linia a doua probabilităţile cu care sunt luate aceste valori. O astfel de variabilă aleatoare care are un număr finit sau numărabil de valori se numeşte **variabilă aleatoare discretă**.

Trebuie reţinut că pentru o variabilă aleatoare prezintă interes doar valorile ei şi distribuţia acestor valori.

Exemplul 3.1.4 *Presupunem că o firmă trebuie să încheie contracte independente cu alte trei firme* A, B, C. *Aceste contracte nu sunt sigure, ele se încheie cu probabilităţile* p_1, p_2, p_3. *Numărul contractelor pe care firma le poate încheia este o variabilă aleatoare* X *cu* 4 *valori posibile* $0, 1, 2, 4$. *Matricea ei de repartiţie este:*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3 & p_1\overline{p}_2\overline{p}_3 + \overline{p}_1 p_2\overline{p}_3 + \overline{p}_1\overline{p}_2 p_3 & p_1 p_2\overline{p}_3 + \overline{p}_1 p_2 p_3 + p_1\overline{p}_2 p_3 & p_1 p_2 p_3 \end{pmatrix}$$

Pentru a calcula probabilităţile cu care ia valori variabila aleatoare notăm cu E_1, E_2, E_3 *evenimentele ca firma să încheie contracte cu firmele* A, B, C. $P(X = 0)$ *este probabilitatea ca firma să nu încheie nici un contract.*

$P(X = 0) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = P(\overline{E_1})P(\overline{E_2})P(\overline{E_3}) = (1 - P(E_1))(1 - P(E_2))(1 - P(E_3))$ $= (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = \overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3$,

$P(X = 1)$ *este probabilitatea ca firma să încheie un contract.*

$P(X = 1) = P\left((E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3}) \cup (\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3)\right) =$

$= P(E_1)P(\overline{E_2})P(\overline{E_3}) + P(\overline{E_1})P(E_2)P(\overline{E_3}) + P(\overline{E_1})P(\overline{E_2})P(E_3) = p_1\overline{p}_2\overline{p}_3 + \overline{p}_1 p_2\overline{p}_3 + \overline{p}_1\overline{p}_2 p_3$ *etc.*

Am notat pentru simplitate $1 - p_1 = \overline{p}_1$.

Observaţia 3.1.5 *După cum se vede denumirea de variabilă aleatoare dată acestei noţiuni nu are nimic aleator, ea este perfect determinată de evenimentele lui* Ω. *De asemenea ea nu este o variabilă ci este o funcţie aşa cum rezultă din definiţie.*

Operaţii cu v. a. discrete

Date variabilele aleatoare discrete X şi Y, cu ele se pot efectua operaţiile aritmetice obişnuite. Presupunem că avem tabelele de repartiţie ale celor două variabile aleatoare (v.a.). Prezentăm operaţii cu v. a. în cazul $X(\Omega)$ finit.

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{pmatrix}.$$

Variabila aleatoare $X+Y$ ia valoarea x_i+y_j pe submulţimea $\{\omega \in \Omega : (X + Y)(\omega) = x_i + y_j\}$. Dacă $\{\omega \in \Omega : (X + Y)(\omega) = x_i + y_j\} = \emptyset$, variabila aleatoare $X + Y$ ia valoarea $x_i + y_j$ cu probabilitatea zero şi aceasta nu se trece în tabel.

Dacă notăm $P(\{\omega \in \Omega : (X + Y)(\omega) = x_i + y_j\}) = p_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ atunci tabelul de repartiţie al variabilei aleatoare $X + Y$ va fi

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & \cdots & x_1 + y_n & \cdots & x_m + y_n \\ p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Pentru produs vom avea

$$XY : \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n & \dots & x_my_n \\ q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} & \dots & q_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

unde $P\left(\{\omega \in \Omega : (XY)(\omega) = x_iy_j\}\right) = q_{ij}$, dacă $\{\omega \in \Omega : (XY)(\omega) = x_iy_j\} \neq 0$.

Observăm că $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_i, \sum_{i=1}^{n} p_{ij} = q_j, \sum_{j=1}^{n} q_{ij} = p_i, \sum_{i=1}^{n} q_{ij} = q_j$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} p_i &= P\left(\{X = x_i\}\right) = P\left(\{X = x_i\} \cap \Omega\right) = P\left(\{X = x_i\} \cap \left(\{Y = y_1\} \cup ... \cup \{Y = z_n\}\right)\right) \\ &= P\left(\left(\{X = x_i\} \cup \{Y = y_1\}\right) \cap ... \cap \left(\{X = x_i\} \cup \{Y = z_n\}\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}. \end{aligned}$$

Analog se demonstrează şi celelate relaţii. În ambele cazuri tabelul de repartiţie are cel mult mn coloane.

Operaţiile se extind şi în cazul variabilelor aleatoare cu un număr infinit, dar numărabil, de valori.

Observaţia 3.1.6 *În cazul particular $Y = a = const.$, deoarece*

$$p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = a\right) = P\left(\{X = x_i\} \cap \Omega\right) = P\left(X = x_i\right) = p_i,$$

avem:

$$a + X : \begin{pmatrix} a + x_1 & a + x_2 & \dots & a + x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, aX : \begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & \dots & ax_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}.$$

Exerciţiul 1 *Probabilitatea extragerii unei bile albe dintr-o urnă este p. Din această urnă se fac două extrageri, punându-se bila înapoi în urnă după extragere. Se consideră variabilele aleatoare X_1 şi X_2, prima reprezentând numărul de bile albe obţinute la prima extragere şi a doua numărul de bile albe de la a doua extragere. Să se scrie tabloul de repartiţie al variabilelor aleatoare discrete $X_1,\ X_2,\ X_1 + X_2,\ X_1X_2$.*

Dacă $X_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$, $q = 1 - p$, *atunci*

$$X_1 + X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{pmatrix}$$

deoarece

$$\begin{aligned} &P(\{X_1 + X_2 = 0\}) = P(\{X_1 = 0, X_2 = 0\}) = P(\{X_1 = 0\})P(\{X_2 = 0\}) = q^2, \\ &P(\{X_1 + X_2 = 1\}) = P(\{X_1 = 1, X_2 = 0\} \cup \{X_1 = 0, X_2 = 1\}) = 2pq, \\ &P(\{X_1 + X_2 = 2\}) = P(\{X_1 = 1, X_2 = 1\}) = P(\{X_1 = 1\})P(\{X_2 = 1\}) = p^2. \end{aligned}$$

Interpretarea pe care o putem da variabilei aleatoare $X_1 + X_2$ este: valorile variabilei aleatoare reprezintă numărul de bile albe care pot fi extrase din urnă în urma celor două extrageri prezentate în enunţ. La fel,

$$X_1X_2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2pq + q^2 & p^2 \end{pmatrix},$$

deoarece

$P(\{X_1X_2 = 0\}) = P(\{X_1 = 0, X_2 = 0\} \cup \{X_1 = 1, X_2 = 0) \cup \{X_1 = 0, X_2 = 1\}) = 2pq + q^2,$
$P(\{X_1X_2 = 1\}) = P(\{X_1 = 1, X_2 = 1\}) = p^2.$

Interpretarea pe care o putem da variabilei aleatoare X_1X_2 *este: variabila ia valoarea* 0 *dacă s-a extras măcar o bilă neagră (contrarul evenimentului că ambele bile extrase sunt albe) şi valoarea* 1 *dacă ambele bile extrase sunt albe.*

Definiţia 3.1.7 *Două v.a.* X *şi* Y *se numesc* ***independente*** *dacă pentru orice valori reale* x_i *şi* y_j *evenimente de forma* $\{X = x_i\}$ *şi* $\{Y = y_j\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, *sunt independente, adică*

$$P\left(\{X = x_i \wedge Y = y_j\}\right) = P\left(\{X = x_i\}\right) P\left(\{Y = y_j\}\right).$$