Curs 2

Probabilităţi

2.1 Formule probabilistice

Probabilitatea unei reuniuni de evenimente

Dacă $\{\mathbf{F},\Omega,P\}$ un câmp de probabilitate atunci oricare ar fi $A,B\in\mathbf{F}$ are loc relaţia

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B). \tag{2.1}$$

Deoarece

$$A\cup B=A\cup(B\setminus A) \text{ şi } A\cap(B\setminus A)=\emptyset,$$

rezultă

$$P(A\cup B)=P(A\cup(B\setminus A))=P(A)+P(B\setminus A),$$

dar, conform proprietăţii P2,

$$P(B\setminus A)=P(B)-P(B\cap A)$$

şi deci rezultă (2.1).

Pentru cazul a trei evenimente se poate obţine formula utilizând relaţia (2.1):

$$\begin{aligned}
&P(A\cup B\cup C)=P((A\cup B)\cup C)=P\left(A\cup B\right)+P(C)-P\left((A\cup B)\cap C\right)\\
&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(C)-P\left((A\cap C)\cup(B\cap C)\right)\\
&=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P\left(A\cap C\right)-P\left(B\cap C\right)+P\left(A\cap B\cap C\right).
\end{aligned}$$

Relaţia se poate extinde şi în cazul a n evenimente

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i,j=1,i<j}^{n}P(A_i\cap A_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right). \tag{2.2}$$

Demonstraţia se face prin inducţie matematică după n.

Probabilitatea unei intersecţii

Fie $\{\mathbf{F},\Omega,P\}$ un câmp finit de evenimente. Oricare ar fi $A,B\in\mathbf{F}$ are loc relaţia (**??**). Ea poate fi folosită pentru a calcula probabilitatea unei intersecţii: $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$. Când folosim această formulă la rezolvarea unei probleme trebuie să considerăm evenimentele

A şi B într-o ordine convenabil aleasă, dat fiind că se poate utiliza, datorită echivalenţei demonstrate, relaţia $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Formula se poate extinde şi în cazul a n evenimente $A_1, A_2, \ldots, A_n$, cu $P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \neq 0$, $k = \overline{1, n-1}$, sub forma

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})). \tag{2.3}$$

Într-adevăr, folosind definiţia probabilităţii condiţionate, obţinem

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1), \\ P(A_2|A_1) &= \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}, \\ &\vdots \\ P(A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})) &= \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})}. \end{aligned}$$

Înmulţind relaţiile membru cu membru şi făcând simplificările corespunzătoare, obţinem (2.3).

Formula probabilităţii totale

Fie $\{\mathbf{F}, \Omega, P\}$ un câmp de probabilitate, $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $A_i \in \mathbf{F}, i = \overline{1, n}$, un sistem complet de evenimente şi B un eveniment oarecare, $B \in \mathbf{F}$. Atunci

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i). \tag{2.4}$$

Într-adevăr, deoarece $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ putem scrie $B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$. Deoarece pentru $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ atunci avem

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

Formula lui Bayes

Fie $\{\mathbf{F}, \Omega, P\}$ un câmp de probabilitate şi $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $A_i \in \mathbf{F}, i = \overline{1, n}$ un sistem complet de evenimente şi B un eveniment oarecare. Atunci

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}. \tag{2.5}$$

În condiţiile date prin ipoteză are loc formula probabilităţii totale şi ţinând seama de (**??**) obţinem

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \cdot P(B|A_j)}.$$

Exemplul 2.1.1 *Să presupunem că sistemul de detecţie al unei baterii poate greşi asupra prezenţei unei ţinte (de ex. un avion inamic) cu probabilitatea de 0.05, iar prezenţa reală a ţintei este detectată de sistem cu probabilitatea 0.9. Presupunând că probabilitatea apariţiei unei ţinte în zona sistemului este 0.25, vrem să determinăm probabilitatea unei alarme false, dacă sistemul a primit un semnal relativ la prezenţa unei ţinte.*

Notăm cu A_1 evenimentul care constă în prezenţa reală a ţintei, A_2 evenimentul care constă în absenţa ţintei şi cu B evenimentul care constă în detectarea unui semnal. Atunci

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.25, \\ P(A_2) &= P(\overline{A_1}) = 0.75, \\ P(B|A_1) &= 0.9, \\ P(B|A_2) &= 0.05. \end{aligned}$$

Probabilitatea cerută, conform formulei lui Bayes, este

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)} = \frac{0.05 \cdot 0.75}{0.25 \cdot 0.9 + 0.75 \cdot 0.05} = 0.142\,86.$$

Exemplul 2.1.2 *Există exact trei firme care produc un aparat, firmele F_1, F_2, F_3 şi acestea realizează respectiv $30, 25$ şi 45 la sută din producţia ţării. La firma F_1 1% din producţie este rebut, la F_2 1.5% iar la F_3 2%. Care este probabilitatea ca un aparat luat la întâmplare de la cele trei firme să fie rebut? Dar care este probabilitatea ca el să provină de la firma F_3?*

Notăm cu $A_i, i = 1, 2, 3$ evenimentul că aparatul luat să provină de la firma $F_i, i = 1, 2, 3$ şi notăm cu B evenimentul că aparatul luat este defect. Atunci

$$\begin{aligned} P(A_1) &= 0.3, \\ P(A_2) &= 0.25 \end{aligned}$$

şi

$$P(A_3) = 0.45.$$

Apoi

$$\begin{aligned} P(B|A_1) &= 0.01, \\ P(B|A_2) &= 0.015 \end{aligned}$$

iar

$$P(B|A_3) = 0.02,$$

deci

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3) \\ &= 0.01 \cdot 0.3 + 0.015 \cdot 0.25 + 0.02 \cdot 0.45 \\ &= 0.01575, \\ P(A_3|B) &= \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)} = \frac{0.02 \cdot 0.45}{0.015\,75} = 0.57143. \end{aligned}$$

Dăm câteva exemple în care Ω nu este o mulţime finită şi exemplificăm modul în care definim funcţia de probabilitate.

- Fie $\Omega = [0,1]$. Putem considera $\mathbf{F}$ ca fiind format din $\emptyset, \Omega$, toate submulţimile finite de puncte din Ω, subintervale, reuniuni finite sau numărabile de intervale, complementarele lor etc. Pentru orice punct $\omega \in \Omega$ definim $P(\omega) = 0$ şi pentru orice subinterval $[a,b] \subset \Omega$, punem $P([a,b]) = b - a$, lungimea intervalului.

- Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime fixată având arie nenulă notată cu $\mu(\Omega)$. Notăm cu $\mathbf{F}$ mulţimea părţilor lui Ω care au arie finită şi definim $P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$. Tripletul $\{\mathbf{F}, \Omega, P\}$ este un câmp de probabilitate şi se numeşte **câmp de probabilităţi geometrice** pe Ω.

Dăm un exemplu care să justifice studiul unor astfel de câmpuri de probabilitate.

Exemplul 2.1.3 *Două persoane A şi B au decis să se întâlnească între orele 0 şi 1 într-un anumit loc, venind independent. În plus ele au făcut convenţia ca primul venit să-l aştepte pe celălalt 15 minute (sfertul academic) şi dacă acesta nu vine, să plece. Care este probabilitatea ca persoanele respective să se întâlnească?*

Notând cu x (respectiv y) momentul sosirii lui A (respectiv B) la locul de întâlnire, avem $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Luăm $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ şi F mulţimea submulţimilor având arie. Atunci evenimentul care constă în întâlnirea celor două persoane, pe care îl notăm cu I, va fi

$$I = \left\{ (x,y) \mid |x-y| \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

Mulţimea I este notată în figura de mai jos.

Probabilitatea de realizare a întâlnirii va fi

$$P(I) = \frac{\text{aria}(I)}{\text{aria}(\Omega)} = \frac{1 - 2 \cdot \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{2}}{1} = \frac{7}{16} = 0.4375.$$

2.2 Metode de numărare

Calculul probabilităţilor conduce adesea la numărarea diferitelor cazuri posibile. Capitolul din algebră referitor la permutări, aranjamente şi combinări este foarte util în această situaţie.

Principiul multiplicării. Presupunem că avem două situaţii A şi B, situaţia A se poate realiza în m moduri, iar situaţia B în k moduri. Numărul de moduri în care se poate realiza A şi B este $m \times k$.

Mai general, presupunem că avem $r \geq 2$ situaţii. În prima situaţie putem face m_1 alegeri, în a doua m_2,..., în a r-a situaţie m_r alegeri, deci în total vor fi $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_r$.

Exerciţiul 1 Care este numărul situaţiilor care apar aruncând două zaruri? Pentru primul zar sunt 6 situaţii, pentru al doilea 6 situaţii, în total 6×6 situaţii.

În continuare vom face distincţie între o mulţime cu o ordine determinată de dispunere a elementelor sale, numită mulţime ordonată şi o mulţime în care nu ne interesează ordinea elementelor.

Permutări: Fie o mulţime A cu n elemente. Elementele acestei mulţimi se pot ordona în mai multe moduri. Fiecare mulţime ordonată care se formează cu cele n elemente ale mulţimii A se numeşte **permutare** a elementelor acelei mulţimi. Numărul permutărilor cu n elemente este $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$. Acest rezultat se obţine din principiul multiplicării. O permutare poate fi construită prin selectarea elementului plasat pe prima poziţie, selectare care se face dintre cele n elemente, apoi selectarea elementului plasat pe a doua poziţie dintre cele $n-1$ elemente rămase, apoi selectarea elementului plasat pe a treia poziţie dintre cele $n-2$ elemente rămase, etc.

ARANJAMENTE: Fie o mulţime A cu n elemente. Submulţimile **ordonate** ale lui A, având fiecare câte k elemente, $0 \leq k \leq n$, se numesc **aranjamente de n luate câte k**. Numărul aranjamentelor de n luate câte k se notează

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Şi acest rezultat se obţine din principiul multiplicării. O submulţime poate fi construită prin selectarea elementului plasat pe prima poziţie, selectare care se face dintre cele n elemente, apoi selectarea elementului plasat pe a doua poziţie dintre cele $n-1$ elemente rămase, apoi selectarea elementului plasat pe a treia poziţie dintre cele $n-2$ elemente rămase etc, elementul de pe poziţia k va fi selectat din cele $n-k+1$ elemente rămase.

Exerciţiul 2 *În câte moduri este posibil să facem un steag tricolor dacă avem la dispoziţe pânză de steag de cinci culori diferite ?*

Două steaguri tricolore care au aceleaşi culori se deosebesc dacă ordinea culorilor este diferită. Deci ne interesează câte submulţmi de câte trei elemente se pot forma cu elementele unei mulţimi de cinci elemente, în submulţmi interesându-ne ordinea elementelor. Deci sunt $A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

COMBINĂRI: Fie o mulţime A cu n elemente. Submulţimile lui A având fiecare câte k elemente, $0 \leq k \leq n$, în care nu ne interesează ordinea elementelor, se numesc combinări de n luate câte k. Numărul combinărilor de n luate câte k se notează

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Exerciţiul 3 *Pentru un joc, cinci fete şi trei băieţi trebuie să formeze două echipe de câte patru persoane. În câte moduri se pot forma echipele ?*

În total sunt 8 copii cu ajutorul cărora trebuie făcute două grupe a câte patru copii. Studiem în câte moduri se poate forma o grupă de 4, cealaltă formându-se din copiii rămaşi. Nu interesează numărul de fete sau de băieţi din grupă şi nici ordinea lor, ci numai numărul de grupe care se pot forma. Acest număr este

$$C_5^4 + C_5^3 \times C_3^1 + C_5^2 \times C_3^2 + C_5^1 \times C_3^3 = C_8^4 = 70.$$

2.3 Moduri de selectare a elementelor

Presupunem că o urnă conţine m bile, numerotate de la 1 la m, din care se extrag n bile în anumite condiţii. Vom număra, în fiecare situaţie, numărul cazurilor posibile. Evident $n \leq m$.

1. **Selectare cu întoarcerea bilei extrase în urnă şi ordonare.**

   Extragem n bile pe rând, fiecare bilă fiind pusă înapoi în urnă înainte de următoarea extragere, însemnând numărul bilelor în ordinea în care apar (interesează ordinea bilelor în n-uplul extras). Evident că pot exista şi repetiţii. Conform principiului multiplicării, în care $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$, numărul n-uplelor este m^n.

2. **Selectare fără întoarcerea bilei în urnă şi cu ordonare.**

   Procedăm ca şi în cazul întâi, dar după fiecare extragere bila obţinută este pusă la o parte, această operaţie fiind echivalentă cu extragerea simultană din urnă a n bile. Obţinem n-uple $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Nu pot exista repetiţii. Regula de multiplicare se aplică astfel: pentru a_1 avem m posibilităţi, pentru a_2 avem $m-1$ posibilităţi,...,pentru a_n avem $m-n+1$ posibilităţi, în total

   $$m \times (m-1) \times \ldots \times (m-n+1) = A_m^n.$$

   Caz particular: dacă $m = n$, atunci numărul cazurilor posibile este $n!$.

3. **Selectare cu întoarcerea bilei în urnă şi fără ordonare.**

   Extragem n bile, una după alta, fiecare fiind repusă în urnă înainte de a realiza următoarea extragere. Nu ţinem seama de ordinea bilelor în mulţimea formată. Pot exista şi repetiţii. Numărul cazurilor posibile este C_{n+m-1}^n, deoarece ar fi ca şi cum am extrage simultan dintr-o urnă care conţine $n+m-1$ bile (numerotate de la 1 la m, unele din ele putându-se repeta) n bile, fără să ne intereseze ordinea. După ultima extragere secvenţială în urnă vor rămâne $m-1$ bile.

4. **Selectare fără întorcerea bilei şi fără ordonare.**

   Bilele sunt extrase una după alta, fără a pune bila extrasă înapoi; este acelaşi lucru cu a spune că extragem n bile dintr-o dată şi formăm submulţimi de n elemente, în total C_m^n.

   Aplicaţie: determinarea numărului de permutări a $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$ elemente care se disting prin grupuri de culori, adică avem m_1 elemente de culoarea c_1, m_2 elemente de culoarea c_2 ,..., m_r elemente de culoarea c_r. Culorile sunt distincte, dar bilele de aceeaşi culoare nu se disting între ele.

   Numărul cazurilor posibile :

- $C_m^{m_1}$ moduri de alegere a poziţiilor bilelor de culoare c_1,
- $C_{m-m_1}^{m_2}$ moduri de alegere a poziţiilor bilelor de culoare c_2,...,
- $C_{m-m_1-\ldots-m_{r-1}}^{m_r}$ moduri de alegere a poziţiilor bilelor de culoarea c_m (de fapt $m - m_1 - m_2 - \ldots - m_{r-1} = m_r$ şi avem, de fapt, o singură posibilitate).

În total, ţinând seama de regula multiplicării,

$$\begin{aligned}
&C_m^{m_1} \cdot C_{m-m_1}^{m_2} \cdot \ldots \cdot C_{m-m_1-\ldots-m_{r-1}}^{m_r} \\
&= \frac{m!}{m_1!(m-m_1)!} \cdot \frac{(m-m_1)!}{m_2!(m-m_1-m_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(m-m_1-\ldots-m_{r-1})!}{m_r!} = \\
&= \frac{m!}{m_1!m_2!\ldots m_r!}.
\end{aligned}$$

2.4 Scheme clasice de probabilitate

Schema lui Poisson

Se dau n urne $U_1, U_2, \ldots, U_n$ care conţin bile albe şi bile negre în proporţii date, deci cunoaştem probabilităţile $p_i, i = \overline{1,n}$, cu care este extrasă o bilă albă din urna U_i. Se cere probabilitatea de a extrage k bile albe şi $n-k$ bile negre, atunci când din fiecare urnă se extrage câte o bilă.

Notăm cu A_i evenimentul extragerii unei bile albe din urna U_i. Notăm şi B_k evenimentul care constă în extragerea a k bile albe şi $n-k$ bile negre, adică

$$B_k = (A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \overline{A}_n) \cup (A_1 \cap \ldots \cap A_{k-1} \cap \overline{A}_k \cap A_{k+1} \cap \overline{A}_{k+2} \cap \ldots \cap \overline{A}_n)$$

$$\cup (\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap \ldots \cap A_n),$$

numărul parantezelor fiind C_n^k. Un eveniment

$$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}$$

se realizează, ţinând seama că evenimentele sunt independente, cu probabilitatea

$$p_{i_1} \cdots p_{i_k} q_{i_{k+1}} \cdots q_{i_n}$$

indicii $i_1, i_2 \ldots, i_n$ reprezentând o permutare a indicilor $1, 2, \ldots, n$, iar litera p apare de k ori cu indici diferiţi, iar q de $n-k$ ori cu indici care nu apar în p . Se observă că după aceiaşi regulă se calculează coeficientul lui x^k din polinomul

$$P(x) = (p_1 x + q_1)(p_2 x + q_2) \ldots (p_n x + q_n).$$

Condiţii ale unui experiment Poisson:
1. Există n efectuări în condiţii diferite ale unui experiment.
2. Fiecare experiment are exact două rezultate posibile.
3. Probabilităţile celor două rezultate sunt diferite pe parcursul repetărilor.
4. Repetările sunt independente una de cealaltă.

Exerciţiul 4 *Într-un atelier sunt trei maşini. Prima dă $0,9\%$ rebut, a doua 1% şi a treia $1,3\%$. Se ia la întâmplare câte o piesă de la fiecare maşină. Se cere probabilitatea ca două din piese să fie bune şi una rebut.*

Avem

$$\begin{array}{lll} p_1 = 0,991, & q_1 = 0,009, & p_2 = 0,99, \\ q_2 = 0,01, & p_3 = 0,987, & q_3 = 0,013, \end{array}.$$

$$P(x) = (0,991x + 0,009)(0,99x + 0,01)(0,987x + 0,013).$$

Coeficientul lui x^2 este

$$0,991 \times 0,99 \times 0,013 + 0,99 \times 0,987 \times 0,987 \times 0,009 + 0,991 \times 0,987 \times 0,01 = 0,0313.$$

Schema lui Bernoulli (binomială)

Presupunem că în schema lui Poisson urnele $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sunt identice. Atunci putem lua

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p, \quad q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q$$

Probabilitatea extragerii a k bile albe se va obţine calculând coeficientul lui x^k din polinomul

$$P(x) = (px + q)^n,$$

adică va fi

$$C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Recunoaştem în această expresie termenul general al ridicării la puterea n a binomului $px+q$. Pentru acest motiv schema se mai numeşte **binomială**. Deoarece urnele sunt identice, putem considera că toate extragerile se fac dintr-o singură urnă, bila extrasă punându-se în urnă după fiecare extragere. Obţinem astfel schema lui Bernoulli. Probabilitatea de a extrage k bile albe din n extrageri dintr-o urnă, punându-se de fiecare dată bila înapoi, este

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

unde p este probabilitatea oţinerii unei bile albe dintr-o singură extragere şi $q = 1 - p$. Schema lui Bernoulli se mai numeşte **schema bilei revenite (întoarse).**

Condiţii ale unui experiment binomial:
1. Există n repetări identice ale unui experiment.
2. Fiecare repetare are exact două rezultate posibile.
3. Probabilităţile celor două rezultate rămân constante pe parcursul repetărilor.
4. Repetările sunt independente una de cealaltă.

Exerciţiul 5 *Se aruncă un zar de* 5 *ori. Se cere probabilitatea ca faţa cu un punct să apară exact de două ori.*

Avem:

$$p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}, \quad n = 5, \quad k = 2,$$

$$P_{5,2} = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,16.$$

Schema lui Bernoulli cu mai multe stări

Fie o urnă care conţine bile de m culori $c_1, c_2, \ldots, c_m$ iar p_i probabilitatea ca la o extragere să obţinem o bilă de culoarea c_i. Probabilitatea ca în n extrageri să obţinem n_1 bile de culoarea c_1 , n_2 bile de culoarea c_2 , $\ldots$, n_m bile de culoarea c_m $(n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n)$ este

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}.$$

Această schemă rezolvă problemele în care se cere probabilitatea ca în n efectuări ale experienţei evenimentul A_i să se realizeze de n_i ori, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ fiind un sistem complet de evenimente şi $P(A_i) = p_i, i = \overline{1,m}$. Presupunem că în cele n efectuări ale experienţei s-au obţinut succesiv

$$\underbrace{A_1 \ldots A_1}_{n_1} \underbrace{A_2 \ldots A_2}_{n_2} \ldots \underbrace{A_m \ldots A_m}_{n_m}.$$

Acest eveniment se produce cu probabilitatea

$$\underbrace{p_1 \cdots p_1}_{n_1} \underbrace{p_2 \cdots p_2}_{n_2} \cdots \underbrace{p_m \cdots p_m}_{n_m}.$$

Acelaşi rezultat îl obţinem pentru orice altă ordine stabilită dinainte în care A_i apare de n_i ori. Rămâne să vedem în câte moduri putem scrie cele n simboluri, dintre care n_1 egale cu A_1, n_2 cu $A_2, \ldots, n_m$ cu A_m.

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \ldots C_{n-n_1-n_2-\ldots n_{m-1}}^{n_m} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-\ldots n_{m-1})!}{n_m!\,(n-n_1-\ldots-n_{n_m})!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!}.$$

Exerciţiul 6 *Se aruncă un zar de 5 ori. Care este probabilitatea ca exact de două ori să apară faţa cu un punct şi exact de 2 ori să apară faţa cu două puncte?*

Avem:

$$n = 5, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 1,$$
$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_3 = \frac{2}{3},$$
$$P_{4,2,2,1} = \frac{5!}{2! \times 2! \times 1!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{324}.$$

Schema hipergeometrică

O urnă conţine a bile albe şi b bile negre. Din această urnă se extrag n bile ($n \leq a + b$) pe rând, fără a pune bila extrasă înapoi în urnă (ceea ce este echivalent cu a extrage n bile deodată). Se cere probabilitatea ca din cele n bile extrase, k să fie albe ($k \leq a$) şi $n-k$ negre ($n - k \leq b$). Pentru a calcula acestă probabilitate vom stabili numărul cazurilor posibile şi numărul cazurlor favorabile.

Numărul cazurilor posibile este: C^n_{a+b}.

Numărul cazurilor favorabile: un grup de k bile albe dintr-un total de a bile albe poate fi luat în C^k_a moduri; un grup de $n - k$ bile negre din totalul de b bile negre poate fi obţinut în C^{n-k}_b moduri. Un grup de k bile albe şi $n-k$ bile negre poate fi obţinut, conform principiului multiplicării, în $C^k_a C^{n-k}_b$ moduri. Probabilitatea căutată este

$$\frac{C^k_a C^{n-k}_b}{C^n_{a+b}}.$$

Exemplul 2.4.1 (Controlul de calitate) *Presupunem că într-o cutie sunt* 550 *de piese, din care* 2% *sunt defecte. Care este probabilitatea ca alegând* 25 *de piese, acestea să conţină două piese defecte. Acesta este principiul testării produselor prin selecţii aleatoare.*

Spaţiul de selecţie este format din mulţimea grupelor de câte 25 de piese care se pot forma cu cele 550 piese (un rezultat posibil al experienţei este o grupare de 25 de piese, iar un rezultat favorabil este o grupare de 25 de piese dintre care 2 piese să fie defecte). Putem alege cele 25 piese dintre cele 550, fără să ne intereseze ordinea pieselor, în C^{25}_{550} moduri. Câte din acestea vor conţine 2 piese defecte? Putem alege cele 2 piese defecte, din cele $550 \times 2\% = 11$, în C^2_{11} moduri, iar celelalte $25 - 2 = 23$ piese, care nu sunt defecte, în C^{23}_{539} moduri. Probabilitatea căutată va fi

$$\frac{C^2_{11} C^{23}_{539}}{C^{25}_{550}} = 0,00059.$$

Exerciţiul 7 *La o tombolă sunt 400 bilete dintre care 4 câştigătoare. O persoană cumpără 10 bilete. Care este probabilitatea să nu se găsească nici un bilet câştigător?*

Avem $a = 4, b = 396, k = 0, n - k = 10, n = 10, p = \frac{C^0_4 C^{10}_{396}}{C^{10}_{400}} = 0,903.$

Schema hipergeometrică cu mai multe stări

În general, dacă urna conţine a_i bile de culoarea c_i, i=$\overline{1,m}$, probabilitatea de a obţine n_1 bile de culoarea c_1 , n_2 bile de culoarea c_2, $\ldots$, n_m bile de culoarea c_m când facem $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ extracţii, este egală cu

$$\frac{C^{n_1}_{a_1} C^{n_2}_{a_2} \ldots C^{n_m}_{a_m}}{C^n_{a_1+a_2+\ldots+a_m}}.$$

Exercițiul 8 *O urnă conține 7 bile albe, 7 bile negre și 6 verzi. Se extrag 9 bile. Care este probabilitatea să obținem câte 3 de fiecare culoare?*

Avem

$$a_1 = 7, a_2 = 7, a_3 = 6, n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 3, p = \frac{C_7^3 C_7^3 C_6^3}{C_{20}^9} = 0,145.$$

2.5 Exerciții

Exercițiul 9 Aruncarea unui zar este o experiență aleatoare. Rezultatul experienței este apariția unui număr natural de la 1 la 6, de exemplu, apariția feței cu numărul 4. Acesta este un rezultat posibil al experienței, adică este o probă. În acest caz spațiul de selecție este $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ iar apariția feței cu numărul 4 este un eveniment elementar. Aruncarea unei perechi de zaruri este deasemenea o experiență aleatoare. Rezultatul experienței este apariția unei perechi de numere naturale cuprinse între 1 și 6. Spațiul de selecție este format din toate perechile de numere astfel definite, adică

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), ..., (6, 6)\}.$$

Acest spațiu are un număr de $6 \times 6 = 36$ elemente. Ne interesează evenimentul ca suma cifrelor obținute sa fie 2. Acesta este un eveniment elementar deoarece el se realizează numai în situația $(1, 1)$. Dacă ne-ar interesa evenimentul ca suma cifrelor să fie 7, acesta nu este uun eveniment elementar deoarece poate fi produs de evenimentele $(1, 6)$, $(6, 1)$, $(2, 5)$, $(5, 2)$, $(3, 4)$ sau $(4, 3)$. Notăm cu A evenimentul ca la aruncarea celor două zaruri suma cifrelor de pe fetele lor să fie 7, atunci $P(A) = \frac{5}{36} = 0.13889$.

Exercițiul 10 *Dacă se amestescă un pachet de cărți, care este probabilitatea ca toți cei patru ași să apară unul după altul ?*

Soluție. Sunt 52 de cărți dintre care patru ași. Un rezultat posibil al experienței este o înșiruire de 52 de cărți, adică o permutare a celor 52 de cărți. Sunt 52! cazuri posibile. În câte din aceste cazuri cei patru ași se găsesc unul după altul? Cei patru ași pot apare consecutiv în $49 \times 4!$ moduri. Restul de 48 de cărți se pot aranja în 48! moduri. Folosind principiul multiplicării, numărul cazurilor favorabile va fi $4! \times 49 \times 48!$. Probabilitatea căutată va fi

$$\frac{49! \times 4}{52!} = 0,00003.$$

Exercițiul 11 *Vrem să calculăm probabilitaea de a câștiga la LOTO 6/49. Știm că se cumpără un bilet pe care se trec 6 numere distincte între 1 și 49. Dacă aceste numere coincid cu cele extrase la loterie, atunci biletul este câștigător.*

Soluție. Spațiul de selecție este format din grupe de câte șase numere în nu interesează ordinea numerelor în cadrul grupei, adica se consideră egale succesiunile $(2, 5, 9, 45, 28, 39)$ și $(39, 2, 28, 9, 5, 45)$. Numărul acestor grupe este C_{49}^6 (vezi metode de numărare, Combinări), acestea fiind cazurile posibile iar favorabil nu este decât un singur caz. Fie B evenimentul de a câștiga la 6/49. Probabilitatea acestui eveniment este

$$P(A) = \frac{1}{C_{49}^6} = \frac{1}{13983816} = 7.1511 \times 10^{-8} = 0.000000071511.$$

Exercițiul 12 *Se joacă un joc. Partida este considerată câștigată de primul dintre cei doi jucători care câștigă trei jocuri. Dacă jocul se întrerupe la scorul de $2 - 1$, cum trebuie împărțită miza?*

Soluţie. La prima vedere s-ar părea că miza trebuie împărţită în trei părţi egale şi câştigătorul ia două părţi. Corect este ca miza să fie împărţită proporţional cu probabilitatea pe care o are fiecare jucător de a câştiga partida, dacă acesta ar fi continuat.

Să presupunem că se mai joacă două jocuri (indiferent de rezultatul primului joc). Notăm cu 1 dacă jucătorul a câştigat partida şi cu 0 dacă a piedut-o. Prin notaţia $(1, 0)$ înţelegem că primul jucător a câştigat prima partida şi a pierdut a doua partidă. Sunt următoarele posibilităţi: $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ şi $(0, 0)$, din care rezultă că primul jucător, care conduce cu $2 - 1$, are trei şanse şi al doilea una singură. Miza trebuie împărţită în patru părţi egale şi primul jucător ia trei părţi, iar al doilea o parte.

Exerciţiul 13 (Problema concordanţelor) *Un student are de răspuns la n întrebări, cărora trebuie să le asocieze răspunsul corect dintre n răspunsuri indicate. Stabiliţi probabilitatea ca studentul să răspundă la: a) prima întrebare; b) primele două întrebări; c) cel puţin o întrebare.*

Indicaţie. a) numătul cazurilor posibile: $n!$, numărul cazurilor favirabile $(n-1)!$, probabilitatea căutată: $1/n$;

b) $1/[n(n-1)]$;

c) dacă notăm cu A_i evenimentul că studentul răspunde corect la întrebarea i, evenimentul căutat este $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Folosind formula (2.2) obţinem: $1 - 1/2! + 1/3! - \ldots + (-1)^{n-1} 1/n!$.

Exerciţiul 14 *Un calculator este format din n componente. Probabilitatea ca o componentă i să nu se defecteze în perioada de timp T este $p_i, i = \overline{1, n}$. Componentele se defectează independent unele de celelalte. Să se calculeze probabilitatea ca în perioada de timp T calculatorul să se defecteze. (Defectarea unei componente conduce la oprirea calculatorului.)*

Soluţie. Caculăm probabilitatea evenimentului contrar, adică în perioada de timp T calculatorul să funcţioneze. Aceasta înseamnă că toate componentele să nu se defecteze, iar probabilitatea acestui eveniment este $\prod_{i=1}^{n} p_i$. Probabilitatea căutată va fi $1 - \prod_{i=1}^{n} p_i$.

Exerciţiul 15 *Un mesaj de n* caractere *format din cifrele 0 şi 1 este transmis. Fiecare simbol poate fi transmis eronat cu probabilitatea p (este schimbat în contrarul său cu probabilitatea p). Pentru siguranţă, mesajul este transmis de două ori; informaţia este considerată corectă de receptor dacă ambele mesaje coincid. Să se calculeze probabilitatea ca mesajul să nu fie corect, în ciuda faptului că cele două mesaje transmise sunt identice.*

Soluţie. Evenimentul ca mesajul să nu fie corect este contrar evenimentului că ambele mesaje sunt corecte. Probabilitatea ca un mesaj transmis să fie corect este $(1-p)^n$, probabilitatea ca ambele mesaje să fie corecte este $(1-p)^{2n}$, iar probabilitatea căutată este $1 - (1-p)^{2n}$.

Exerciţiul 16 *Fie opt canale de transmitere a informaţiei care funcţionează independent. Presupunem că un canal este activ cu probabilitatea 1/3. Să se calculeze probabilitatea ca la un moment dat să fie strict mai mult de şase canale active.*

Soluţie. Pentru $i = 1, \ldots, 8$ fie A_i evenimentul: "canalul i este activ". Numărul canalelor active este egal cu numărul de realizări ale evenimentelor $A_i, i = 1, \ldots, 8$, în opt experienţe Bernoulli cu $p = 1/3$. Atunci probabilitatea ca mai mult de şase canale să fie active este

$$P(k = 7) + P(k = 8) = C_8^7 (1/3)^7 (2/3) + C_8^8 (1/3)^8 = 0,0024 + 0,00015 = 0,00259$$

Exercițiul 17 *Un asamblor de calculatoare folosește circuite din trei surse: A, B și C. Ele pot fi defecte cu probabilitățile de respectiv $0,001$, $0,005$ și $0,01$. Dacă se ia un circuit la întîmplare și se constată că este defect, care este probabilitatea ca el să provină de la sursa A sau B.*

Soluție. Fie A_1 evenimentul ca circuitul să provină de la sursa A, A_2 de la sursa B și A_3 să provină de la sursa C. Fie D evenimentul ca circuitul folosit să fie defect, iar $D|A_i, i = 1, 2, 3$ evenimentul ca circuitul folosit să fie defect știind că el provine de la sursa A, B și respectiv C. Avem

$$P(D|A_1) = 0,001, P(D|A_2) = 0,005, P(D|A_3) = 0,01$$

Folosind formula lui Bayes (2.5) obținem

$$P(A_1|D) = 1/16, P(A_2|D) = 5/16.$$

Deoarece evenimentele $A_1|D$ și $A_2|D$ sunt incompatibile, rezultă

$$P(A_1 \cup A_2|D) = P(A_1|D) + P(A_2|D) = 6/16 = 0,375.$$

Exercițiul 18 *Un sistem constă dintr-o unitate centrală și trei unități periferice. Sistemul funcționează la capacitate optimă dacă unitatea centrală și două unități periferice funcționează. Să se calculeze probabilitatea ca sistemul să funcționeze la capacitate optimă presupunând că defectarea unităților se face independent una de cealaltă.*

Soluție. Definim următorele evenimente: A-unitatea centrală funcționează; B_i-unitatea periferică i funcționează, unde $i = 1, 2, 3$. Evenimentul F-două sau mai multe unități periferice funcționează înseamnă că toate trei unitățile periferice funcționează sau exact două unități periferice funcționează. Astfel:

$$\begin{aligned} F = &(B_1 \cap B_2 \cap \bar{B}_3) \cup (B_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3) \cup (\bar{B}_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup \\ &\cup (B_1 \cap B_2 \cap B_3). \end{aligned}$$

Observăm că evenimentele de mai sus din paranteze sunt independente între ele și deci

$$\begin{aligned} P(F) =&P(B_1)P(B_2)P(\bar{B}_3) + P(B_1)P(\bar{B}_2)P(B_3)+ \\ &+P(\bar{B}_1)P(B_2)P(B_3) + P(B_1)P(B_2)P(B_3) = \\ &=3(1-a)^2 a + (1-a)^3 \end{aligned}$$

unde s-a presupus că fiecare periferic se defectează cu probabilitatea egală cu a, astfel încât $P(B_i) = 1 - a$ și $P(\bar{B}_i) = a$. Evenimentul "sistemul funcționează la capacitate optimă" este $A \cap F$. Dacă presupunem că unitatea centrală se defectează cu probabilitatea p, atunci:

$$P(A \cap F) = P(A)\,P(F) = (1-p)P(F) = (1-p)[3(1-a)^2 a + (1-a)^3].$$

Fie $a = 10\%$, atunci toate cele trei periferice sunt funcționale $(1-a)^3 = 72,9\%$ din timp iar două sunt funcționale și una defectă $3(1-a)^2 a = 24,3\%$ din timp. Astfel două sau mai multe periferice funcționează $97,2\%$ din timp. Presupunem că unitatea centrală nu este foarte bună, și anume $p = 20\%$, atunci sistemul funcționează la capacitate optimă numai $77,8\%$ din timp, aceasta datorită faptului că unitatea centrală se defectează.

Presupunem că s-a introdus în sistem o a doua unitate centrală identică cu prima, adică $p = 20\%$ și sistemul funcționează la capacitate optimă dacă măcar una din cele două unități centrale funcționează. Să calculăm cât la sută din timp funcționează sistemul în acest caz.

Definim evenimentele A_i-unitatea centrală $i = 1, 2$ funcţionează. Evenimentul "sistemul funcţionează la capacitate optimă" este, în acest caz, $(A_1 \cap F) \cup (A_2 \cap F)$. Atunci

$$\begin{aligned}
&P[(A_1 \cap F) \cup (A_2 \cap F)] = P(A_1 \cap F) + P(A_2 \cap F) - \\
&-P[(A_1 \cap F) \cap (A_2 \cap F)] = P(A_1)\, P(F) + P(A_2)\, P(F) - P(A_1 \cap A_2 \cap F) = \\
&= P(A_1)\, P(F) + P(A_2)\, P(F) - P(A_1)\, P(A_2)\, P(F) = \\
&= 2(1-p)[3(1-a)^2 a + (1-a)^3] - (1-p)^2 3(1-a)^2 a + (1-a)^3 = 93,3\%
\end{aligned}$$

Aceasta a condus la o creştere de 15.5% a timpului de funcţionare faţă de cazul în care sistemul funcţiona cu o singură unitate centrală.

Exerciţiul 19 *Un sistem de comunicaţie transmite informaţie binară pe un canal care introduce la transmiterea unui bit erori aleatoare cu probabilitatea $\varepsilon = 10^{-3}$. Fiecare bit este transmis de trei ori şi în funcţie de semnalul majoritar recepţionat se decide informaţia ca fiind cea transmisă. Să se calculeze probabilitatea ca decizia luată să fie incorectă.*

Soluţie. Cel ce recepţionează va lua o decizie eronată dacă canalul introduce două sau mai multe erori. Dacă privim fiecare transmitere ca o experienţă Bernoulli în care realizarea evenimentului corespunde introducerii unei erori, atunci probabilitatea de a se produce două sau mai multe erori în trei experienţe Bernoulli este

$$P[k \geq 2] = C_3^2(0,001)^2(0,999) + C_3^3(0,001)^3 \approx 3 \times 10^{-6}.$$