Curs 8

Variabile aleatoare continue

8.1 Funcţia caracteristică

Definiţia 8.1.1 *Fie X o v. a. cu densitatea de probabilitate f. Funcţia*

$$\varphi_X(t) = M\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx,$$

se numeşte ***funcţia caracteristică*** *corespunzătoare v. a. X.*

Teorema 8.1.2 *Dacă X este o v. a. cu funcţia caracteristică $\varphi_X(t)$, atunci*

1. $\varphi_X(0) = 1$,

2. $\varphi_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{M[X^n]}{n!}(it)^n$, $M[X^n] = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{i^n}$, unde $M[X^n]$ reprezintă momentul iniţial de ordin n.

3. Dacă $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$.

4. Dacă X şi Y sunt v. a. independente, atunci $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

Demonstraţie. 1. $\varphi_X(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i0x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

2. Folosim dezvoltatrea în serie a funcţiei exponenţiale e^{itx} şi se înlocuieşte în definiţia funcţiei generatoare,

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \frac{it}{1!}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + \frac{(it)^2}{2!}\int_{\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx + ... + \frac{(it)^n}{n!}\int_{\infty}^{\infty} x^n f(x)dx + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}M[X^n].$$

3. $\varphi_{aX+b}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itax+itb} f(x) = e^{itb}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itax} f(x) = e^{bt}\varphi_X(at).$

4. $\varphi_{X+Y}(t) = M\left[e^{it(X+Y)}\right] = M\left[e^{itX}e^{itY}\right] = M\left[e^{itX}\right]M\left[e^{itY}\right] = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$, unde am ţinut seama de independenţa v. a. care a permis scrierea relaţiei relativ la medie. □

Exerciţiul 1 Să se determine funcţia caracteristică pentru v. a. $X \in \mathrm{Exp}[\lambda]$.

Soluţie. $\varphi_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\lambda e^{\lambda x}dx = \lambda\int\limits_{0}^{\infty} e^{(it-\lambda)x}dx = \left.\frac{\lambda e^{(it-\lambda)x}}{it-\lambda}\right|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{it-\lambda}$

deorece $\lambda > 0$ şi $\left|e^{(it-\lambda)x}\right| = \left|e^{itx}\right|\left|e^{-\lambda x}\right| = e^{-\lambda x} \overset{x\to\infty}{\to} 0.$

Exercițiul 2 Să se determine funcția caracteristică pentru v. a. $X \in \text{Gama}\,[p, \lambda]$.

Soluție. $\varphi_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(t)dx = \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int\limits_{0}^{\infty} e^{itx} x^{p-1} e^{-\lambda x} dx = \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int\limits_{0}^{\infty} e^{(it-\lambda)x} x^{p-1} dx.$

Facem schimbarea de variabilă $u = -(it - \lambda)\, x$ și obținem

$\varphi_X(t) = \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u} \dfrac{u^{p-1}}{(\lambda - it)^p} dx = \dfrac{\lambda^p}{(\lambda - it)^p}.$

Să calculăm media și dispersia cu ajutorul funcției caracteristice.

$\varphi'_X(t) = \left(\dfrac{\lambda^p}{(\lambda - it)^p} \right)' = \dfrac{p\lambda^p i}{(\lambda - it)^{p+1}} \Rightarrow \varphi'_X(0) = \dfrac{pi}{\lambda} \Rightarrow M\,[X] = \dfrac{p}{\lambda}.$

$\varphi''_X(t) = \dfrac{p(p+1)\lambda^p i^2}{(\lambda - it)^{p+2}} \Rightarrow M\,[X^2] = \dfrac{p(p+1)}{\lambda^2}$

$D\,[X] = M\,[X^2] - (M\,[X])^2 = \dfrac{p}{\lambda^2}.$

Exercițiul 3 Fie $X \in \text{Pois}[\lambda]$ și $Y \in \text{Pois}[\mu]$, v.a. independente. Demonstrați că $X + Y \in \text{Pois}[\lambda + \mu]$.

Soluție. Determinăm funcția caracteristică a lui $X \in \text{Pois}[\lambda]$.

$$\varphi_X(t) = M[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}.$$

Deoarece v.a. sunt independente,

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} e^{\mu\left(e^{it}-1\right)} = e^{(\lambda+\mu)\left(e^{it}-1\right)}.$$

Deoarece funcția caracteristică determină complet funcția densitate de probabilitate

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt,$$

rezultp că $X + Y \in \text{Pois}[\lambda + \mu]$.

Exercițiul 4 Determinați funcția caracteristică pentru v.a. $X \in N[m, \sigma]$.

Soluție. Avem

$$\varphi_X(t) = M[e^{itX}] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $y = \frac{x-m}{\sigma}$, obținem

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(m+\sigma y)} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy = \frac{e^{itm}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2 - 2ity\sigma + i^2 t^2 \sigma^2}{2}} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} dy$$
$$= \frac{e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}},$$

deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}.$$

În cazul $X \in N[0, 1]$, obținem

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Cunoscând funcţia caracteristică, putem calcula

$$M[X] = \frac{\varphi'_X(0)}{i} = m, \quad M[X^2] = \frac{\varphi''_X(0)}{i^2} = m^2 + \sigma^2,$$
$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = \sigma^2.$$

Exerciţiul 5 Fie. $X \in N[m_1, \sigma_1]$ şi $Y \in N[m_2, \sigma_2]$ două v.a. independente. Atunci $X+Y \in N[m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}]$.

Soluţie. Obţinem

$$\varphi_X(t) = e^{itm_1 - \frac{t^2\sigma_1^2}{2}}, \quad \varphi_X(t) = e^{itm_2 - \frac{t^2\sigma_2^2}{2}},$$
$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_X(t) = e^{itm_1 - \frac{t^2\sigma_1^2}{2}} \cdot e^{itm_2 - \frac{t^2\sigma_2^2}{2}}$$
$$= e^{it(m_1+m_2) - \frac{t^2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}^2}{2}}.$$

Exerciţiul 6 Dacă $X_1, ..., X_n \in N[m, \sigma]$ sunt v.a. independente, atunci $X_1 + ... + X_n \in N\left[m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

Soluţie. Găsim ca mai sus că

$$\varphi_{X_1+...+X_n}(t) = e^{itnm - \frac{t^2 n\sigma^2}{2}}.$$

Folosind Teorema 8.1.2, punctul 3, rezultă

$$\varphi_{\frac{1}{n}(X_1+...+X_n)}(t) = \varphi_{X_1+...+X_n}(\frac{t}{n}) = e^{itm - \frac{t^2}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2}.$$

Exerciţiul 7 Să se determine funcţia caracteristică pentru v. a. $X \in \chi^2[n]$.

Soluţie. $\varphi_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^{\infty} e^{itx} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1-2itx}{2}} dx.$

Facem schimbarea de variabilă $u = \frac{1-2it}{2}x$ şi obţinem $x = \frac{2}{1-2it}u$, $dx = \frac{2}{1-2it}du$, deci

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{2}{1-2it}u\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-u} \frac{2}{1-2it} du$$
$$= \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int\limits_0^{\infty} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-u} du = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}}.$$

La distribuţia $\chi^2(n)$ se poate ajunge pornind de la distribuţii normale.

Propoziţia 8.1.3 *Fie n v.a. independente $X_1, ..., X_n \in N[0,1]$ şi $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$. Atunci $Y \in \chi^2[n]$.*

Demonstraţie. Fie F_i funcţia de repartiţie a v.a. X_i^2. Avem

$$F_i(x) = P\left(X_i^2 \le x\right) = P(-\sqrt{x} \le X_i \le \sqrt{x})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Prin derivare determinăm densităţile de probabilitate ale lui X_i^2.

$$f_i(x) = F_i'(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},$$

deci $X_i^2 \in \chi^2(1)$. (Am folosit formula de derivare a unei integrale depinzând de parametru).

Deoarece $X_1^2, ..., X_n^2$ sunt independente, rezultă că

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1^2+...+X_n^2}(t) &= \varphi_{X_1^2}(t) \cdot ... \cdot \varphi_{X_n^2}(t) = (1+2it)^{-\frac{1}{2}} \cdot ... \cdot (1+2it)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (1+2it)^{-\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

care este tocmai funcţia caracteristică a unei v.a. care urmează o distribuţie hi+pătrat cu n grade de libertate. $\square$

8.2 Funcţii de v. a.

Considerăm cazul în care v. a. X *este discretă* şi notăm $P(\{X = x\}) = f_X(x)$. Fie $Y = h(X)$ funcţia bijectivă care stabileşte legătura dintre valorile lui X şi Y. Fie $x = h^{-1}(y)$ soluţia unică a ecuaţiei $y = h(x)$. V. a. Y va lua valorile y cănd X va lua valorile $x = h^{-1}(y)$. Atunci

$f_Y(y) = P(\{Y = y\}) = P(\{X = h^{-1}(y)\}) = f_X(h^{-1}(y))$.

Exerciţiul 8 Fie X o variabilă aleatoare distribuită geometric în care $P(\{X = k\}) = p\,(1-p)^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Ne interesează distribuţia lui X^2.

Soluţie. Notăm $f_X(k) = p\,(1-p)^k$. Deoarece $X \geq 0$, funcţia $y = x^2$ este bijectivă pentru $x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow h^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

$f_Y(y) = f\left(h^{-1}(y)\right) = p\,(1-p)^{\sqrt{y}}, y = 0, 1, 4, 9, 16, ...$ $\square$

Considerăm cazul în care v. a. X *este continuă.* Fie X v. a. având funcţia de repartiţie F_X. dacă $Y = h(X)$ este o funcţie bijectivă, atunci funcţia de repartiţie a v. a. Y este complet determinată. Fie $x = h^{-1}(y)$ soluţia unică a ecuaţiei $y = h(x)$. Într-adevăr, dacă h este strict crescătoare, atunci:

$F_Y(y) = P\left(\{Y \leq y\}\right) = P\left(\{h(X) \leq y\}\right) = P\left(\{X \leq h^{-1}(y)\}\right) = F_X\left(h^{-1}(y)\right).$

Dacă h este strict descrescătoare, atunci:

$F_Y(y) = P\left(\{Y \leq y\}\right) = P\left(\{h(X) \leq y\}\right) = P\left(\{X \geq h^{-1}(y)\}\right) = 1 - F_X\left(h^{-1}(y) + 0\right).$

Teorema 8.2.1 *Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie monotonă, derivabilă şi $h'(x) \neq 0$, deci ecuaţia $h(x) = y$ are soluţia unică $x = h^{-1}(y)$.Atunci densitatea de probabilitate a v. a. $Y = h(X)$ este:*

$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left|(h^{-1}(y))'\right|.$

Demonstraţie. Dacă h este monoton crescătoare atunci

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d\left(F_X\left(h^{-1}(y)\right)\right)}{dy} = \frac{dF_X\left(h^{-1}(y)\right)}{dy} \frac{d\left(h^{-1}(y)\right)}{dy} = f_X(h^{-1}(y))\left(h^{-1}(y)\right)',$$

iar dacă h este monoton descrescătoare atunci

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d\left(1 - F_X\left(h^{-1}(y)\right)\right)}{dy} = -\frac{dF_X\left(h^{-1}(y)\right)}{dy} \frac{d\left(h^{-1}(y)\right)}{dy} =$$

$= -f_X(h^{-1}(y))\left(h^{-1}(y)\right)'.$ $\square$

Exerciţiul 9 Fie $X \in \text{Unif}\,[0, 1]$ şi $Y = 3X$. Care este densitatea de probabilitate a v. a. Y?

Soluţie. X are densitatea de probabilitate dată de

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0,1] \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases},$$

$Y = h(X) = 3X$, unde $h(x) = 3x, h'(x) = 3 > 0 \Rightarrow h$ funcţie continuă şi monoton crescătoare, deci bijectivă. Rezultă că

$$F_Y(y) = P\left(\{Y < y\}\right) = P\left(\{3X < y\}\right) = P\left(\left\{X < \frac{y}{3}\right\}\right) = F_X\left(\frac{y}{3}\right) \Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) = \left(F_X\left(\frac{y}{3}\right)\right)' = f_X(\frac{y}{3})\frac{1}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{dacă } y \in [0,3] \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}.$$