Testarea ipotezelor statistice

CURS 13 - 21.05.2014

Facultatea de Automatică și Calculatoare

Statistică și prelucrarea datelor

Teste parametrice

În multe probleme din inginerie se pune problema dacă se acceptă sau se resping valorile obținute ale parametrilor Presupunerile făcute asupra valorilor parametrilor se numesc **ipoteze statistice** iar procedura de decidere se numește **testarea ipotezei statistice**.

Teste parametrice

În multe probleme din inginerie se pune problema dacă se acceptă sau se resping valorile obținute ale parametrilor Presupunerile făcute asupra valorilor parametrilor se numesc **ipoteze statistice** iar procedura de decidere se numește **testarea ipotezei statistice**.
Se numește **ipoteză statistică** orice presupunere relativ la parametrii uneia sau mai multor populații statistice sau presupuneri legate de distribuția de probabilitate a populației statistice. Ipotezele pot fi acceptate sau nu cu anumite probabilități de corectitudine a deciziei.

Teste parametrice

În multe probleme din inginerie se pune problema dacă se acceptă sau se resping valorile obținute ale parametrilor Presupunerile făcute asupra valorilor parametrilor se numesc **ipoteze statistice** iar procedura de decidere se numește **testarea ipotezei statistice**.

Se numește **ipoteză statistică** orice presupunere relativ la parametrii uneia sau mai multor populații statistice sau presupuneri legate de distribuția de probabilitate a populației statistice. Ipotezele pot fi acceptate sau nu cu anumite probabilități de corectitudine a deciziei.

Testul statistic poat fi referitor la parametrii de care depinde legea de probabilitate a caracteristicii X. În acest caz testul se numește **parametric**. În caz contrar se obține un test **neparametric**.

Teste parametrice

Example 1

Să presupunem că în timp ce urmărim o emisiune la TV apare pe ecran o reclamă în care se afirmă că firma X vinde un nou tip de baterii electrice funcționând în medie 100 de ore fără întrerupere. Un consumator sceptic dorește să testeze această afirmație care se referă la durata de viață a bateriilor produse de firma X. Pentru aceasta, statistica recomandă să se considere un eșantion aleator din bateriile produse de acea firmă, să fie lăsate să funcționeze și să se înregistreze timpii scurși până la descărcarea lor. Să presupunem am considerat 26 de baterii și a rezultat un timp mediu de funcționare de $\overline{x} = 94$ de ore. Dacă ar fi rezultat $\overline{x} \geq 100$, atunci nu se putea reproșa nimic firmei X; dar pentru $\overline{x} = 94$ se pune problema avertizării consumatorilor. Unii se pot întreba dacă eșantionul a fost reprezentativ, alții decid că totul este OK(ce înseamnă 94, ce înseamnă 100?). Cât de mult se poate coborî pentu a decide că reclama este minciunoasă? Astfel de întrebări se pun în legătură cu testarea oricărei ipoteze statistice.

Teste parametrice

În testarea ipotezelor se începe cu o afirmație numită ipoteza nulă și notată H_0, despre care nu se știe dacă este adevărată sau falsă, iar eșantionul este ales pentru a valida această ipoteză. În cazul bateriilor electrice ipoteza nulă este:

$$H_0 : m = 100$$

(deci fima X spune adevărul).

Teste parametrice

În testarea ipotezelor se începe cu o afirmație numită ipoteza nulă și notată H_0, despre care nu se știe dacă este adevărată sau falsă, iar eșantionul este ales pentru a valida această ipoteză. În cazul bateriilor electrice ipoteza nulă este:

$$H_0 : m = 100$$

(deci fima X spune adevărul). Notăm cu H_1 o ipoteză alternativă care să sugereze și condițiile în care ipoteza H_0 este respinsă; de exemplu:

$$H_1 : m < 100$$

De regulă, aceasta a doua ipoteză se alege în direcția deciziei de respingere a ipotezei H_0; nu se ia aici $H_1 : m > 100$ care nu ar fi o ipoteză de respingere ci de satisfacție pentru calitatea bateriilor.

Legătura dintre testarea ip. statistice pt. un parametru și i.î. al parametrului

Fie parametrul θ și $[u, v]$ intervalul de încredere pentru acest parametru cu nivelul de încredere $100(1-\alpha)\%$. Astfel pentru ipoteza bilaterală
$H_0 : \theta = \theta_0$,
$H_1 : \theta \neq \theta_0$,
vom respinge ipoteza H_0 dacă și numai dacă $\theta_0 \notin [u, v]$, $[u, v]$ intervalul de încredere cu nivelul de încredere $100(1-\alpha)\%$. *Regiunea critică* pentru testul bilateral (conține valorile pentru care ipoteza H_0 se respinge) este în afara intervalului de încredere.

Etapele procedurii de testare a ipotezelor

Pentru ipoteza unilaterală
$H_0 : \theta = \theta_0$,
$H_1 : \theta < \theta_0$,
vom respinge ipoteza H_0 dacă și numai dacă $\theta_0 < u$. Mulțimea $(-\infty, u)$ se numește *regiune critică* pentru testul unilateral propus, $[u, \infty)$ fiind intervalul de încredere unilateral pentru parametrul θ.

Etapele procedurii de testare a ipotezelor

Pentru ipoteza unilaterală
$H_0 : \theta = \theta_0$,
$H_1 : \theta < \theta_0$,
vom respinge ipoteza H_0 dacă și numai dacă $\theta_0 < u$. Mulțimea $(-\infty, u)$ se numește *regiune critică* pentru testul unilateral propus, $[u, \infty)$ fiind intervalul de încredere unilateral pentru parametrul θ.

Pentru ipoteza unilaterală
$H_0 : \theta = \theta_0$,
$H_1 : \theta > \theta_0$,
vom respinge ipoteza H_0 dacă și numai dacă $\theta_0 > v$. Mulțimea (v, ∞) se numește *regiune critică* pentru testul unilateral propus, $(-\infty, v]$ fiind intervalul de încredere unilateral pentru parametrul θ.

Etapele procedurii de testare a ipotezelor

Etapele procedurii de testare a ipotezelor

Pasul 1. Pentru problema studiată se identifică parametrul care interesează a fi testat.
Pasul 2. Se formulează ipoteza nulă H_0.
Pasul 3. Se formulează ipoteza alternativă H_1.
Pasul 4. Se alege pragul de semnificație α.
Pasul 5. Se face selecția, dacă testul verifică o ipoteză pentru date confirmate din experiențe realizate. Se determină testul statistic corespunzător.
Pasul 6. Se stabilește regiunea critică corespunzătoare testului propus.
Pasul 7. Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic și se calculează valoarea.
Pasul 8. Se stabilește dacă ipoteza H_0 se acceptă sau nu.

Etapele procedurii de testare a ipotezelor: exemplu

Example 2

Aplicăm acești pași exemplului 1.
Pasul 1. Pentru problema studiată se identifică parametrii care interesează: timpul mediu de funcționare a bateriilor. Notăm cu m parametrul care ia ca valori acest timp mediu.
Pasul 2. Se formulează ipoteza nulă

$$H_0 : m = 100$$

Pasul 3. Se formulează ipoteza alternativă

$$H_1 : m < 100$$

Pasul 4. Se alege pragul de semnificație $\alpha = 0.05$.
Pasul 5. Se face selecția și se determină testul statistic corespunzător. Se consideră un eșantion $n = 26$ de baterii, sunt puse să funcționeze și se notează timpul de funcționare a bateriilor. S-a obținut media $\overline{x} = 98.2$ și $s = 10$ ore. Deoarece dispersia nu este cunoscută și volumul eșantionului este mic folosim testul Student.

Etapele procedurii de testare a ipotezelor: exemplu

Example 3

Pasul 5 (continuare). Pentru aceasta utilizăm statistica (conform rezultatelor de la intervale de încredere) $T = \dfrac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t(n-1)$.

Pasul 6. Testul este unilateral. Se determină $t_{\alpha,n-1}$ astfel încât $P(T < -t_{\alpha,n-1}) = \alpha$, $P(T < -t_{0.05,25}) = 0.05$ rezultă $t_{0.05,25} = 1.70814$.
Regiunea critică pentru T este $(-\infty, -1.70814)$.

Pasul 7. Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic și se calculează valoarea.

Știm că $\overline{x} = 98.2$ și $s = 10$ ore, rezultă că $\dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{10}{\sqrt{26}} = 1.9612$. Calculăm

$$T = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{98.2 - 100}{\frac{10}{\sqrt{26}}} = -0.91782.$$

Aceasta înseamnă că $\overline{X} < 100 - \dfrac{10}{\sqrt{26}} 1.70814 = 96.65$, regiunea critică pentru m este $(-\infty, 96.65)$.

Pasul 8. Se stabilește dacă ipoteza H_0 se acceptă sau nu.

Etapele procedurii de testare a ipotezelor: exemplu

Deoarece $T = -0.917\,82 > -1.70814 = -t_{0.05,25}$, rezultă că în acest caz nu avem motive să respingem ipoteza H_0, deci ipoteza H_0 se acceptă (Figura 1).

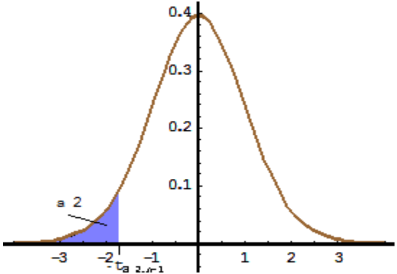

Figure: Figura 1

Regiunea colorată este regiunea critică pentru testul unilateral
$H_0 : m = m_0, H_1 : m < 100$

Etapele procedurii de testare a ipotezelor: exemplu

Remark 1

Dacă am fi aplicat Testul Z atunci : $\Phi(z_{0.05}) = 0.95 \Rightarrow z_{0.05} = 1.64485$ *și regiunea critică este* $(-\infty, -1.64485)$. *Deoarece* $Z = -0.917\,82 > -1.64485$, *rezultă că nu avem motive să respingem ipoteza* H_0.
Dacă datele din eșantion ar fi dat $\overline{x} = 94.5$, *folosind testul Student rezultă*

$$T = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{94.5 - 100}{\frac{10}{\sqrt{26}}} = -2.8045 < -1.70814 = t_{0.05,25}$$

și respingem ipoteza H_0.
Dacă am fi aplicat testul Z am obține $T = -2.804\,5 < -1.64485$, *rezultă că, la fel ca mai sus, respingem ipoteza* H_0.
Dacă schimbăm pragul de semnificație $\alpha = 0.01$, *atunci dacă aplicăm testul Student* $t_{0.01,25} = 2.48511$ *și pentru* $\overline{x} = 98.2$, $T = -0.91782 > -2.48511$.
Rezultă că nu avem motive să respingem ipoteza H_0.

Testarea mediei unei distribuții normale

Vrem să testăm ipoteza

$H_0 : m = m_0$

$H_1 : m \neq m_0$

unde m_0 este constantă dată.

Selecția $X_1, X_2, \dots, X_n$ s-a facut dintr-o populație distribuită normal cu media necunoscută și abaterea medie pătratică σ cunoscută. Deoarece $\overline{X}$ este distribuită normal cu media m_0 și devierea standard $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, și dacă ipoteza nulă este adevărată, putem construi o regiune critică pe baza datelor din eșantion. Se utilizează statistica (conform rezultatelor de la intervale de încredere)

$Z_0 = \dfrac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0,1).$

$$P\left(|Z_0| \leq z\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$1 - \alpha = P\left(m \in \left[\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = \Phi\left(z\right) - \Phi\left(-z\right) =$$

$$= 1 - 2\Phi(-z) \Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 2\Phi(-z).$$

Testarea mediei unei distribuții normale

Notăm cu $z_{\frac{\alpha}{2}}$ valoarea pozitivă a lui z obținută din relația $\Phi(-z) = \frac{\alpha}{2}$. Dacă pentru selecția făcută valoarea calculată $Z_0 = \frac{\overline{x} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \notin \left[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ ipoteza H_0 este respinsă. Regiunea $\left(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$ este regiunea critică sau regiunea de respingere a ipotezei H_0.

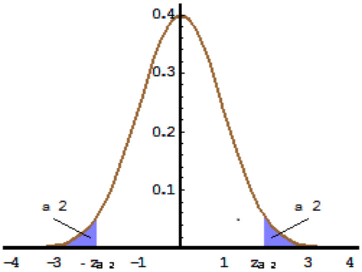

Figure: Figura 2

Testarea mediei unei distribuții normale

Regiunea critică pentru testul bilateral $H_0 : m = m_0$, $H_1 : m \neq m_0$ este prezentată în Figura 2 iar aria fiecărei zone colorate este $\dfrac{\alpha}{2}$.

Dacă $Z_0 = \dfrac{\overline{x} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in \left[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ nu avem motive să respingem ipoteza H_0.

Dacă dispersia este necunoscută se folosește testul statistic $T = \dfrac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t\,(n-1)$, care urmează, în acest caz, o distribuție Student cu $n-1$ grade de libertate.

Testarea mediei unei distribuții normale

Regiunea critică pentru testul unilateral
$H_0 : m = m_0, H_1 : m > m_0$ este

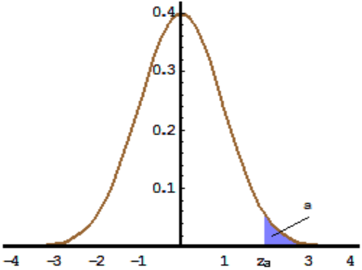

Figure: Figura 3

Testarea mediei unei distribuţii normale

Ipoteza H_0	Statistica	Ipoteza alternativă H_1	Regiunea critică pentru respingerea lui H_0
A)	$Z_0 = \dfrac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0,1)$	$m < m_0$	$Z_0 < -z_\alpha$
$m = m_0$	(σ cunoscut) $n \geq 30$	$m > m_0$	$Z_0 > z_\alpha$
		$m \neq m_0$	$\lvert Z_0 \rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$
B)	$T = \dfrac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t(n-1)$	$m < m_0$	$T < -t_{\alpha,n-1}$
$m = m_0$	(σ necunoscut) $n < 30$	$m > m_0$	$T_{n-1} > t_{\alpha,n-1}$
		$m \neq m_0$	$\lvert T_{n-1} \rvert > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$

Testarea mediei unei distribuții normale: exemple

Example 4

Punctajele obínute de studení la un examen sunt: 64, 62, 76, 82, 66, 76, 72, 71, 74, 72, 71, 73, 70, 75, 77, 84, 92, 86, 62, 58, 78, 80, 79, 84, 83, 82, 66, 68, 68, 82, 84, 78, 76, 69, 77, 58, 62, 82, 85, 58, 78, 84, 94, 88, 77, 78, 88, 91, 70, 71, 78, 58, 65, 53, 60, 49, 68, 74, 71, 66, 68, 71, 73, 70, 85, 78, 65, 54, 51, 78, 89, 66, 68, 95, 94, 99, 81, 81, 92, 88, 99, 81, 81. Știind că abaterea medie patratică punctajelor la acest examen este de 10.99, să se verifice ipoteza că media punctajelor este 77 de puncte față de alternativa că media punctajelor este diferită de 77 cu un coeficient de încredere de 90%, 95% și 99%.

Rezolvare. Aplicăm un test bilateral pentru medie cu dispersia cunoscută.

$punc =$
$\{64, 62, 76, 82, 66, 76, 72, 71, 74, 72, 71, 73, 70, 75, 77, 84, 92, 86, 62, 58, 78, 80, 79, 84,$
$83, 82, 66, 68, 68, 82, 84, 78, 76, 69, 77, 58, 62, 82, 85, 58, 78, 84, 94, 88, 77, 78, 88, 91, 70,$
$71, 78, 58, 65, 53, 60, 49, 68, 74, 71, 66, 68, 71, 73, 70, 85, 78,$
$65, 54, 51, 78, 89, 66, 68, 95, 94, 99, 81, 81, 92, 88, 99, 81, 81\};$

$n = length(punct)$ % Rezultă $n = 83$

$xb = 1/n * sum(punc)$ % Rezultă $\overline{x} = 75.0602$

Testarea mediei unei distribuții normale: exemple

Pasul 1. Parametrul care trebuie testat este media punctajelor m.
Pasul 2. Se fixează ipoteza nulă $H_0 : m = 77$
Pasul 3. Se fixează ipoteza alternativă $H_1 : m \neq 77$
Pasul 4. Nivelul de semnificație este considerat pe rând $\alpha = 0.05, 0.1, 0.01$.
Pasul 5. Se face selecția. Se stabilește statistica folosită

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0,1)$$

Pasul 6. Testul este bilateral. Se determină regiunea critică, pentru $\alpha = 0.05$, se calculează $z_{0.025}$ din relația $P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z_0 < -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$,
$z_{0.025} = 1.95996$.
Nivelul de incredere 95%
Ipoteza H_0 este respinsă dacă $Z_0 > 1.95996$ sau $Z_0 < -1.95996$. Reținem că acest rezultat este legat de alegerea de la Pasul 4 a lui α și furnizează regiunea critică pentru Z_0. Regiunea critică pentru Z_0 este
$(-\infty, -1.95996) \cup (1.95996, \infty)$.

Testarea mediei unei distribuții normale: exemple

Pasul 7. Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic și se calculează valoarea.
Rezultă $Z_0 = -1.60801$.
Pasul 8. Se stabilește dacă ipoteza H_0 se acceptă sau nu. Deoarece Z_0 nu este în regiunea critică, rezultă că nu sunt motive să respingem ipoteza nulă.
Pentru nivelul de încredere de 90%
$z1 = norminv(0.9, 0, 1)$ %Rezultă $z_1 = 1.64485$
Ipoteza H_0 este respinsă dacă $Z_0 > 1.64485$ sau $Z_0 < -1.64485$. Nici în acest caz nu avem motive să respingem ipoteza nulă.
Pentru nivelul de încredere de 99%
$z1 = norminv(0.99, 0, 1)$ %Rezultă $z_1 = 2.57583$
Ipoteza H_0 este respinsă dacă $Z_0 > 2.57583$ sau $Z_0 < -2.57583$. Nici în acest caz nu avem motive să respingem ipoteza nulă.

Testarea mediei unei distribuții normale: exemple

Example 5

La un control al calității produselor fabricate de către o fabrică s-au obținut următoarele date privind greutatea în grame a unui anumit produs: 998, 989, 1004, 1015, 991, 987, 995, 1006, 987, 983, 996, 997, 1003, 990, 996, 992, 997, 1016, 990, 981. Să se verifice ipoteza că greutatea produselor corespunde standardului de calitate care este 1000 g. Să se calculeze intervalul de încredere pentru greutatea produselor.

Soluție. Se va efectua mai întâi testul bilateral pentru medie cu dispersie necunoscută.

Pasul 1. Parametrul care trebuie testat este media greutății m.

Pasul 2. Se fixează ipoteza nulă

$H_0 : m = 1000$ (greutatea produselor corespunde normei);

Pasul 3. Se fixează ipoteza alternativă

$H_1 : m \neq 1000$ (greutatea produselor nu corespunde normei, sînt necesare ajustări ale procesului de producție).

Pasul 4. Nivelul de seminficație este considerat pe rând $\alpha = 0.05$ și $\alpha = 0.01$.

Testarea mediei unei distribuţii normale: exemple

Pasul 5. Se face selecţia. Se stabileşte statistica folosită (conform rezultatelor de la intervale de încredere)

$$T = \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t\left(n-1\right),$$

care are repartiţie Student cu $n-1$ grade de libertate. Avem $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ este media greutăţilor produselor din lotul dat, s este abaterea medie pătratică de selecţie, $s = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.

Pasul 6. Se determină regiunea critică şi valoarea critică $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} > 0$ astfel încât $P(|T| \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}) = 1-\alpha$. Se vor considera cazurile $\alpha = 0.05$ şi $\alpha = 0.01$.

Pasul 7. Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic şi se calculează valoarea.

Pasul 8. Se stabileşte dacă ipoteza H_0 se acceptă sau nu. Dacă $|T| \leq t_{\alpha/2}$, atunci nu avem motive să respingem ipoteza H_0, iar dacă $|T| > t_{\alpha/2}$, atunci ipoteza H_0 se respinge şi se acceptă ipoteza H_1.

Testarea mediei unei distribuții normale: exemple

Următorul program Matlab va efectua calculele necesare și va determina ce ipoteză trebuie acceptată:

```
% Test bilateral privind media repartitiei normale,
% dispersie necunoscuta.
% ipoteza nula H0:  m=1000
% ipoteza alternativa H1:  m~=1000
clc;
clear;
format compact;
x=[998, 989, 1004, 1015, 991, 987, 995, 1006, 987,...
    983, 996, 997, 1003, 990, 996, 992, 997, 1016,...
    990, 981]
n=length(x)
alfa=0.05
m=1000
ms=sum(x)/n
s=sqrt(1/(n-1)*sum((x-ms).^2))
t=(ms-m)*sqrt(n)/s
ta=tinv(1-alfa/2,n-1)
```

Testarea mediei unei distribuții normale: exemple

```
t=-5:0.1:5;
ft=tpdf(t,n-1);
plot(t,ft,'m');
xlabel('t'); ylabel('densitatea de repartitie Student');
patch([t(t<=-ta),-ta],[ft(t<=-ta),0],'b');
patch([t(t>=ta),ta],[ft(t>=ta),0],'b');
```

Rulând programul, obținem:

$$\bar{x} = 995,65; \quad s = 9,4494; \quad t = -2,0587; \quad t_{\alpha/2} = 2,093.$$

Prin urmare $|t| < t_{\alpha/2}$ și, deci, ipoteza nulă H_0 se acceptă pentru nivelul de semnificație $\alpha = 0,05$. Intervalul de incredere

$$\left[\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

pentru x (greutatea produsului) este $[991,23;\ 1000,1]$. Programul afișează, de asemenea, graficul densității de repartiție Student (Figura 4). Zona hașurată indică valorile lui t pentru care ipoteza nulă este respinsă.

Testarea mediei unei distribuții normale: exemple

Luând $\alpha = 0.01$, obținem $t_{\alpha/2} = 2.8609$ și deci ipoteza nulă se confirmă iar. Intervalul de încredere este [989.6; 1001.7].

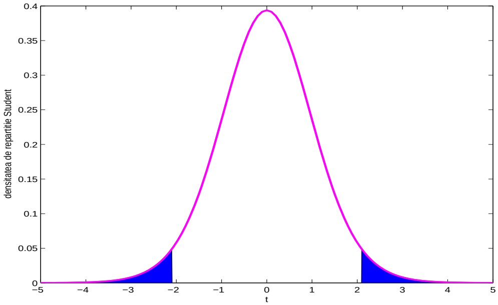

Figure: Figura 4

Testarea mediei unei distribuții normale: exemple

Example 6

Printr-un sondaj, pentru un eșantion de volum $n = 20$, s-a constatat că durata medie de funcționare în ore a unui anumit tip de acumulatoare pînă la următoarea încărcare este 148 ore. Să se verifice ipoteza că durata de funcționare este 150 ore, ipoteza alternativă fiind un timp de funcționare mai mic de 150 ore, la un nivel de semnificație de 0.05, știind că dispersia duratei de funcționare este 35.

Soluție. Se va efectua un test unilateral pentru medie cu dispersie cunoscută.
Pasul 1. Parametrul care trebuie testat este media timpilor de funcționare a unui anumit tip de acumulator, m.
Pasul 2. Se fixează ipoteza nulă

$$H_0 : m = 150$$

Pasul 3. Se fixează ipoteza alternativă

$$H_1 : m < 150$$

Pasul 4. Nivelul de semnificație este $\alpha = 0.05$.
Pasul 5. Se face selecția. Se stabiește statistica folosită

$$Z = \frac{\left(\overline{X} - m\right)\sqrt{n}}{\sigma} \in N\left(0, 1\right).$$

Testarea mediei unei distribuții normale: exemple

Pasul 6. Se determină regiunea critică și valoarea critică z_α pentru nivelul de semnificație α dat, din condiția $P(z < -z_\alpha) = \alpha$, adică $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$.
Pasul 7. Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic și se calculează valoarea.
Pasul 8. Se stabilește dacă ipoteza H_0 se acceptă sau nu. Dacă $z \geq -z_\alpha$ atunci nu avem motive să respingem ipoteza H_0, în caz contrar se respinge H_0.
Programul următor va efectua acest test.

```
% Test unilateral privind media repartitiei normale,
% dispersie cunoscuta
% ipoteza nula H0:  media m=150
% ipoteza alternativa H1:  m<150
clc;
clear;
n=20;
alfa=0.05
m=150
sg=sqrt(35)
```

Testarea mediei unei distribuții normale: exemple

```
ms=148
z=(ms-m)*sqrt(n)/sg
za=norminv(1-alfa,0,1)
if z>=-za
    disp('Ipoteza H0 se accepta')
else
    disp('Ipoteza H0 se respinge')
end;
z=-5:0.1:5;
fz=normpdf(z,0,1);
plot(z,fz,'m');
xlabel('z'); ylabel('densitatea de repartitie normala');
patch([z(z<=-za),-za],[fz(z<=-za),0],'b');
```

Testarea mediei unei distribuții normale: exemple

Rulînd programul, obținem $\sigma = 5.92$, $z = -1.51$, $z_\alpha = 1.64$ și, deci, ipoteza nulă se confirmă. Programul afișează și densitatea de repartiție normală și intervalul de respingere a ipotezei nule.

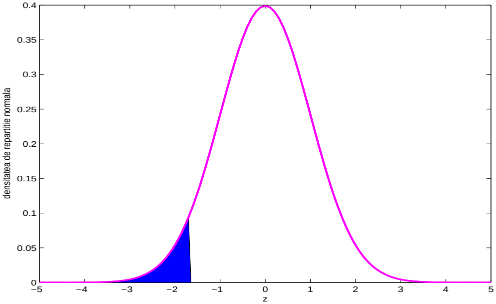

Figure: Figura 5

Test asupra dispersiei unei populaţii distribuite normal

Să presupunem o selecţie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dintr-o populaţie repartizată normal cu media m şi dispersia σ^2.
Pentru a testa ipoteza
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$
$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
se foloseşte statistica $\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \in \chi^2(n-1)$.
Se calculează χ_0^2. Pentru $\alpha \in (0,1)$ dat, se determină $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$, $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ astfel încât

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{şi} \quad P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \geq \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

De aici rezultă că nu avem motive să acceptăm ipoteza H_0 dacă $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ sau $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$.

Test asupra dispersiei unei populaţii distribuite normal

Regiunea critică în cazule testului bilateral este prezentată în figura 6.

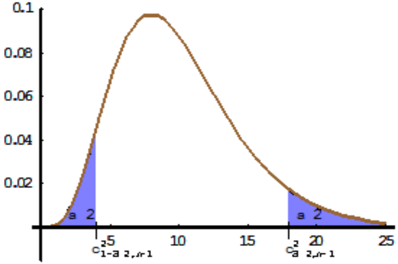

Figure: Figura 6

Test asupra dispersiei unei populaţii distribuite normal

Aceeaşi statistică este folosită pentru testul

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$;

$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.

Nu avem motive să acceptăm ipoteza H_0 dacă $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$ (Figura 7).

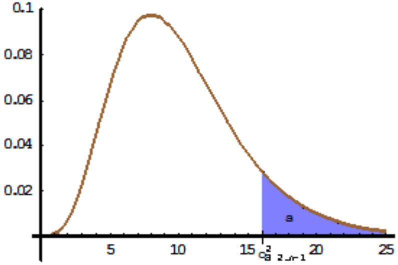

Figure: Figura 7

Test asupra dispersiei unei populaţii distribuite normal

Pentru testul

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2;$

$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$

se foloseşte aceeaşi statistică. Nu avem motive să acceptăm ipoteza H_0 dacă $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$. Regiunea critică este prezentată în Figura 8.

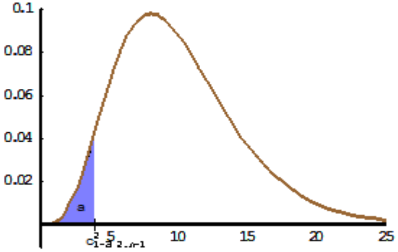

Figure: Figura 8

Test asupra dispersiei unei populații distribuite normal: exemple

Example 7

O secție de vopsitorie utilizează o mare cantitate de titan (ca pigment alb). Conform standardelor, se măsoara tonul de alb a acestui pigment utilizând o scală $0-30$, unde nivelul 30 înseamnă alb perfect. Recent secția și-a schimbat furnizorul și noul furnizor afirmă că dioxidul de titan livrat are nivelul mediu 25, cu o dispersie de 0.4. Cei din secția de vopsitorie se îndoiesc de această mică dispersie și planifică un experiment pe 10 eșantioane, cerând testarea ipotezei la nivel de dispersie, cu nivelul de semnificație $\alpha = 0.05$.

Rezolvare.

Pasul 1. Parametru care trebuie testat este dispersia, σ^2.

Pasul 2. Se fixează ipoteza nulă

$H_0 : \sigma^2 = 0.4.$

Pasul 3. Se fixează ipoteza alternativă

$H_1 : \sigma^2 \neq 0.4.$

Pasul 4. Nivelul de semnificație este $\alpha = 0.05$.

Test asupra dispersiei unei populaţii distribuite normal: exemple

Pasul 5. Se face selecţia. Presupunem că în cele 10 eşantioane, tonul de alb măsurat este: 24, 25, 27, 25, 26, 26, 24, 25, 26, 25 deci

$$\overline{X} = 25.3, \quad s^2 = 0.9.$$

$data = \{24, 25, 27, 25, 26, 26, 24, 25, 26, 25\};$
$n = length(data)$ % Rezultă $n = 10$
$xb = 1/n * sum(data)$ % Rezultă $\overline{x} = 25.3$
$s2 = 1/n * sum((data - xb).\hat{}2)$ % Rezultă $s^2 = 0.9$
Pasul 6. Statistica folosită este

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \in \chi^2\,(n-1)\,.$$

Test asupra dispersiei unei populaţii distribuite normal: exemple

Se stabileşte regiunea critică. Se determină $\chi^2_{0.975,9}$ şi $\chi^2_{0.025,9}$:

$$P\left(\chi^2_0 \leq \chi^2_{0.975,9}\right) = 0.025 \Rightarrow \chi^2_{0.975,9} = 2.70039 \quad \text{şi}$$
$$P\left(\chi^2_0 \leq \chi^2_{0.025,9}\right) = 0.975 \Rightarrow \chi^2_{0.025,9} = 19.0228.$$

$alpha = 0.05;$
$c1 = chi2inv(0.975, 9);$ % Rezultă $c_1 = \chi^2_{0.975,9} = 2.70039$
$c2 = chi2inv(0.975, 9);$ % Rezultă $c_2 = \chi^2_{0.975,9} = 19.0228$
$imin = (n-1) * s\hat{}2/c2;$ % Rezultă $i_{\min} = 0.425806$
$imax = (n-1) * s\hat{}2/c1;$ % Rezultă $i_{\max} = 2.99957$
Fiind un test bilateral, H_0 se respinge dacă $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ sau $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$.
Pasul 7. Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic şi se calculează valoarea. Atunci

$$\chi^2_0 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{9 \cdot 0.9}{0.4} = 20.25.$$

Test asupra dispersiei unei populaţii distribuite normal: exemple

Pasul 8. Se stabileşte dacă ipoteza H_0 se acceptă sau nu.
Deoarece $\chi_0^2 = 20.25 > \chi^2_{0.975,9} = 19.0228$, se respinge H_0.

Observăm că intervalul de încredere de 99.5% pentru dispersie este

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}\right] = \left[\frac{9 \cdot 0.9}{19.0228}, \frac{9 \cdot 0.9}{2.70039}\right] = [0.4258; 2.9996],$$

iar 0.4 nu intră în acest interval.

Test asupra dispersiei unei populaţii distribuite normal

Ipot. H_0	Testul statistic	Ipot. altern. H_1	Regiunea critică pentru respingerea lui H_0
		$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$
		$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$ sau $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$

Testul lui Pearson

Este folosit ca indicator al concordanţei unei repartiţii empirice cu una teoretică. Este unul din cele mai importante teste statistice.
Se consideră o selecţie de volum n, $x_1', x_2', ..., x_n'$.
Ipoteza H_0 : selecţia făcută provine dintr-o populaţie cu funcţia de repartiţie F complet specificată. Ipoteza alternativă H_1 : selecţia nu provine din populaţia definită de F.
Selecţia se împarte în r clase, $x_1 < x_2 < ... < x_r$. Obţinem intervalele $[x_1, x_2)$, $[x_2, x_3)$, ..., $[x_r, \infty)$. Fie f_j numărul de observaţii din intervalul j şi p_j probabilitatea ca v. a. din care provine selecţia să ia valori în intervalul j, dacă admitem ipoteza H_0.
Statistica utilizată în testarea acestei ipoteze este:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(f_k - np_k)^2}{np_k} \tag{1}$$

care urmează legea χ^2 cu $r - 1$

Algoritmul testului lui Pearson

Pasul 1. Alegerea lui r: Mann și Wald au propus formula

$$r = 4\left(\frac{2(n-1)^2}{C^2}\right)^{\frac{1}{5}}$$

unde C este cuantila de ordin α al repartiției $N(0,1)$.
Pasul 2. Selecția de volum n se împarte în r intervale. Se calculează f_k numărul de observații în intervalul k iar p_k probabilitatea teoretică ca v. a. în studiu să ia valori în intervalul k în ipoteza că H_0 este adevărată. Pentru aceasta se estimează media (sau alți parametrii) și se generează același număr de date repartizate conform legii teoretice alese. Pentru o buna aplicare a testului trebuie ca $np_k \geq 5$ pentru $k = \overline{1,r}$.
Pasul 3. Se calculează

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{(f_j - np_j)^2}{np_j}.$$

Pasul 4. Se stabilește nivelul de semnificație $1-\alpha$, se calculează $\chi^2_{\alpha,r-1}$.
Ipoteza H_0 se respinge dacă $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,r-1}$.
Dacă $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,r-1}$ nu avem motive să respingem ipoteza H_0.

Testul Pearson: exemple

Remark 2

În practică se poate da o expresie mai ușor de reținut pentru (1) și anume

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E},$$

unde O sunt datele observate și E cele estimate (pentru care trebuie decisă buna potrivire).
Dacă se estimează un număr de s parametri, atunci χ^2 urmează o repatiție χ^2 cu $r-s-1$ grade de libertate.

Example 8

La o oră de vârf s-au sondat canalele de televiziune TVR1, PROTV, TVR2, Antena 1, Realitatea care au avut la 23 martie audiențele $34\%, 8\%, 12\%$, $34\%, 12\%$ respectiv. La un sondaj printre 500 telespectatori după 6 luni s-au constatat rezultatele următoare: 159 spectatori pentru TVR1, $49, 62, 161$, 69 pentru celelalte. Apare o diferență seminificativă?

Testul Pearson: exemple

Soluție. În acest exemplu avem $r = 5$, $X =$ audiența, $n = 500$, $p_1 = 0.34$, $p_2 = 0.08$, $p_3 = 0.12$, $p_4 = 0.34$, $p_5 = 0.12$.
Numărul estimat de telespectatori la 23 martie este respectiv

$$np_1 = 500 \cdot 0.34 = 170, \quad np_2 = 500 \cdot 0.08 = 40, \quad np_3 = 500 \cdot 0.12 = 60,$$

$$np_4 = 500 \cdot 0.34 = 170, \quad np_5 = 500 \cdot 0.12 = 60.$$

Calculăm

$$\chi^2 = \frac{(159-170)^2}{170} + \frac{(49-40)^2}{40} + \frac{(62-60)^2}{60} + \frac{(161-170)^2}{170} + \frac{(69-60)^2}{60} = 4.6299.$$

Datele pot fi organizate conform următorului tabel

Grupa	1	2	3	4	5
f_k	159	49	62	161	69
p_k	0.34	0.08	0.12	0.34	0.12
np_k	170	40	60	170	60
$f_k - np_k$	-11	9	2	-9	9
$(f_k - np_k)^2$	121	81	4	81	81
$\frac{(f_k - np_k)^2}{np_k}$	0.71176	2.025	6.6667×10^{-2}	0.47647	1.35

Testul Pearson: exemple

Alegem $\alpha = 0.1$, $r - 1 = 4$, atunci $\chi^2_{0.1}(4) = 7.779$.
Deoarece $\chi^2 < \chi^2_{0.1}(4)$ $(4.629\,9 < 7.7794)$ rezultă că nu avem argumente suficiente pentru a respinge ipoteza H_0.
Dacă luăm $\alpha = 0.5$ atunci $\chi^2_{0.5}(4) = 3.36$ și H_0 se respinge cu o eroare de 50%.

Potrivire cu repartiția uniformă

Example 9

Un mare comerciant vrea să vadă dacă un anumit produs se vinde la fel (uniform) în 5 dintre magazinele sale. Prin experiment constată că într-o saptamână s-au realizat vânzări în mii RON de $43, 29, 52, 34, 48$. Este această informație suficientă pentru a considera că există mari diferențe între cele 5 magazine?

Soluție. Ipoteza $H_0 : p_1 = p_2 = ... = p_5 = 0.2$, adică probabilitatea de a cumpăra de la unul din cele cincui magazine este aceeași, cu alte cuvinte vânzările sunt aceleași.
În cazul unei repartiții uniforme a vânzărilor pe cele 5 magazine, ele ar trebui să vândă fiecare in valoare de $205 \cdot 0.2 = 41.2$ mii RON. Acestea sunt datele estimate dacă ipoteza H_0 ar fi adevărată. Datele date în enunț sunt cele observate.
Calculăm:

$$\chi^2 = \frac{(43-41.2)^2}{41.2} + \frac{(29-41.2)^2}{41.2} + \frac{(52-41.2)^2}{41.2} + \frac{(34-41.2)^2}{41.2} + \frac{(48-41.2)^2}{41.2} = 8.9029.$$

Datele pot fi organizate conform următorului tabel

Grupa	1	2	3	4	5
f_k	43	29	52	34	48
p_k	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
np_k	41.2	41.2	41.2	41.2	41.2
$f_k - np_k$	1.8	-12.2	10.8	-7.2	6.8
$(f_k - np_k)^2$	3.24	148.84	116.64	51.84	46.24
$\frac{(f_k - np_k)^2}{np_k}$	0.078641	3.6126	2.8311	1.2583	1.1223

Pentru $r = 5$ la un nivel de semnificație de 5% $\chi^2_{0.95}(4) = 9.48733 > 8.9029$, deci nu avem motive să respingem ipoteza H_0.
Deoarece am estimat media repartiției specialiștii recomandă să se considere că au rămas $5 - 1 - 1 = 3$ grade de libertate. În acest caz $\chi^2_{0.95}(3) = 7.81473 < 8.9029$ și în acest caz putem zice că sunt diferențe mari între magazine.

Potrivire cu repartiţia binomială

Example 10

O reclamă a fost difuzată în mass-media. Dintr-un eşalon de 800 de persoane au fost 434 care nu au auzit (văzut) reclama; 329 au auzit o dată; 35 de două ori şi 2 de 3 ori (nimeni mai mult de trei ori). Ne propunem să verificăm la nivel de seminificaţie 95% dacă numărul de ori când o persoană a aflat de acea reclamă are o repartiţie binomială cu parametru $p = 0.2$.

Soluţie. Paşii care trebuie urmaţi în testarea ipotezei statistice
Pasul 1. Variabila care interesează: X numără de câte ori o persoană a auzit reclama.
Pasul 2. H_0 : variabila X urmează o distribuţie binomială.
Pasul 3. H_1 : variabila X nu urmează o distribuţie binomială.
Pasul 4. $\alpha = 0.05$.
Pasul 5. Testul statistic este

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(f_k - np_k)^2}{np_k}$$

Pasul 6. Ipoteza H_0 este respinsă dacă $\chi^2 > \chi^2_{0.05}(3) = 7.81473$. Regiunea critică este $(7.81473, \infty)$.
Pasul 7. Calculele: $r = 4$, $k = 1, 2, 3, 4$ și aceste valori sunt luate de X cu probabilitățile $p_k = C_3^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{4-k}$, deci

$$p_1 = C_3^0 (0.2)^0 (0.8)^3 = 0.512, \quad p_2 = C_3^1 (0.2)^1 (0.8)^2 = 3 \cdot 0.128 = 0.384,$$
$$p_3 = 3 \cdot (0.2)^2 (0.8)^1 = 0.096, \quad p_4 = (0.2)^3 (0.8)^0 = 0.008$$

$n = 800$,

Grupa	0	1	2	3
f_k	434	329	35	2
p_k	0.512	0.384	0.096	0.008
np_k	409.6	307.2	76.8	6.4
$f_k - np_k$	24.4	21.8	-41.8	-4.4
$(f_k - np_k)^2$	595.36	475.24	1747.2	19.36
$\dfrac{(f_k - np_k)^2}{np_k}$	7.8641×10^{-2}	1.547	22.75	3.025

$$\chi^2 = 28.776, \quad \chi^2_{0.95}(3) = 7.81473.$$

Pasul 8. $28.776 > 7.81473$ rezultă că respingem H_0, deci datele observate nu urmează o lege binomială cu parametru $p = 0.2$.
În ipoteza că variabila studiată ar urma, totuși, o repartiție binomială, estimăm parametrul p cu metoda verosimilității maxime. Construim funcția de verosimilitate maximă după modelul Exemplului din cursul anterior.

$$p_1 = C_3^0 p^0 (1-p)^3,\ \ p_2 = C_3^1 p^1 (1-p)^2,\ \ p_3 = C_3^2 p^2 (1-p)^1,\ \ p_4 = C_3^3 p^3,$$

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4; p) = p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} p_4^{x_4}$$

$$L(434, 329, 35, 2; p) = (1-p)^{3\cdot 434} 3p^{329} (1-p)^{2\cdot 329} 3p^{2\cdot 35} (1-p)^{35} P^{3\cdot 2} =$$

$$= 9p^{405}(1-p)^{1995},$$

$$\ln L(434, 329, 35, 2; p) = \ln 9 + 405 \ln p + 1995 \ln(1-p),$$

$$\frac{\partial \ln L(434, 329, 35, 2; \theta)}{\partial p} = \frac{405}{p} - \frac{1995}{1-p},$$

$$\frac{405}{p} - \frac{1995}{1-p} = 0, p = \frac{27}{160} = 0.16875.$$

Cu acest p determinat, testul χ^2 dă ca valoare $\chi^2 = 19.3074$ fapt care ne conduce la aceeași concluzie că datele observate nu urmează o lege binomială.

Potrivire cu repartiția normală

Example 11

Presupunem că timpul mediu de asamblare (în minute) pentru un eșantion de 300 de aparate electronice a fost $m = 84$, cu abaterea medie pătratică $\sigma = 3$. S-a observat că aceste 300 de aparate au fost repartizate astfel: pentru 15 aparate au fost necesare sub 78 de minute, pentru 39 între 78-81 minute, pentru 96 între 81-84 minute, pentru 87 între 84-87, pentru 48 aparate între 87-90 minute și pentru 15 aparate peste 90 minute. Să se testeze la nivel de semnificație de 1% dacă datele anterioare sunt repartizate normal.

Soluție. Pasul 1. Variabila care interesează: X timpul mediu de asamblare a unor aparate electronice.
Pasul 2. H_0 : variabila X urmează o distribuție normală.
Pasul 3. H_1 : variabila X nu urmează o distribuție normală.
Pasul 4. $\alpha = 0.1$
Pasul 5. Testul statistic este

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(f_k - np_k)^2}{np_k}.$$

Potrivire cu repartiția normală

Pasul 6. Determinăm regiunea critică. Datele sunt împărțite în 6 grupe. S-a estimat media, $m = 84$ și abaterea medie pătratică, $\sigma = 3$. Testul statistic urmează o distribuție $\chi^2_{0.01}(5)$.
$m = 84$;
$\sigma = 3$;
$frecv = [15\ 39\ 96\ 87\ 48\ 15]$;
$n = length(frecv)$; % Rezultă $n = 300$
$c = chi2inv(0.99, 5)$ % Rezultă $c = 11.3449$
Regiunea critică este: $(11.3449, \infty)$.

Potrivire cu repartiția normală

Pasul 7. Calculele: Avem $r = 6$ grupe; dacă $X =$ timpul de asamblare și dacă $X \in N(84, 9)$, atunci

$$p_1 = P(X < 78) = \Phi\left(\frac{78-84}{3}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) =$$
$$= 1 - 0.977\,25 = 0.022\,75$$
$$p_2 = P(78 \leq X < 81) = \Phi\left(\frac{81-84}{3}\right) - \Phi\left(\frac{78-84}{3}\right) =$$
$$= \Phi(-1) - \Phi(-2) = 0.977\,25 - 0.841\,34 = 0.135\,91$$
$$p_3 = P(81 \leq X < 84) = \Phi\left(\frac{84-84}{3}\right) - \Phi\left(\frac{81-84}{3}\right) =$$
$$= \Phi(0) - \Phi(-1) = 0.841\,34 - 0.5 = 0.341\,34$$
$$p_4 = P(84 \leq X < 87) = \Phi\left(\frac{87-84}{3}\right) - \Phi\left(\frac{84-84}{3}\right) =$$
$$= \Phi(1) - \Phi(0) = 0.841\,34 - 0.5 = 0.341\,34$$

Potrivire cu repartiția normală

$$p_5 = P(87 \leq X < 90) = \Phi\left(\frac{90-84}{3}\right) - \Phi\left(\frac{87-84}{3}\right) =$$
$$= \Phi(2) - \Phi(1) = 0.977\,25 - 0.841\,34 = 0.135\,91$$
$$p_6 = P(90 \leq X) = 1 - \Phi\left(\frac{90-84}{3}\right) = 1 - \Phi(2) =$$
$$= 1 - 0.977\,25 = 0.022\,75$$

$prob = [0.02275 \quad 0.13591 \quad 0.34134 \quad 0.34134 \quad 0.13591 \quad 0.02275]$;
$nprob = n * prob$;
Calculăm valoarea statisticii
$CHI = sum(frecv - nprob).\hat{}2./nprob$ % Rezultă $\chi^2 = 23.6597$
Pasul 8. $\chi^2 = 23.6597 > \chi^2_{0.01}(3) = 11.3449$ rezultă că respingem ipoteza H_0.

Potrivire cu repartiția exponențială

Example 12

Presupunem că este testată durata de funcționare a unui tip de becuri (măsurată în ore) pentru un eșantion de 30 de becuri. S-a observat că durata de funcționare a 9 becuri este sub 1000 de ore, a 12 becuri între 1000 și 2000 de ore, a 8 becuri între 2000 și 3000 de ore, iar a unui bec peste 3000 de ore. Să se testeze la nivel de semnificație de 0.1% dacă datele prezentate sunt repartizate exponențial.

Avem nevoie de o estimare a parametrului v. a. X care ia ca valori durata de funcționare (măsurată în sute de ore) a becurilor, presupusă exponențială $X \in Exponential\,[\theta]$.

Potrivire cu repartiţia exponenţială

Reamintim că pentru repartiţia exponenţială
$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\theta x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases}.$
Datele se împart în patru grupe, $(0,1]$, $(1,2]$, $(2,3]$, $(3,\infty)$.

$$p_1 = P(0 \leq X < 1) = F(1) - F(0) = 1 - e^{-\theta},$$
$$p_2 = P(1 \leq X < 2) = F(2) - F(1) = e^{-\theta} - e^{-2\theta},$$
$$p_3 = P(2 \leq X < 3) = F(3) - F(2) = e^{-2\theta} - e^{-3\theta},$$
$$p_4 = P(3 \leq X) = 1 - F(3) = e^{-3\theta}.$$

Pentru a calcula probabilităţile trebuie estimat parametrul θ. Folosim estimatorul de verosimilitate maximă. Funcţia de verosimilitate maximă este

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \left(1 - e^{-\theta}\right)^9 \left(e^{-\theta} - e^{-2\theta}\right)^{12} \left(e^{-2\theta} - e^{-3\theta}\right)^8 \left(e^{-\theta}\right)^1.$$

$$\ln L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \ln \left(1 - e^{-\theta}\right)^9 \left(e^{-\theta} - e^{-2\theta}\right)^{12} \left(e^{-2\theta} - e^{-3\theta}\right)^8 \left(e^{-3\theta}\right)^1 =$$
$$= 9\ln(1 - e^{-\theta}) + 12\ln(e^{-\theta} - e^{-2\theta}) + 8\ln(e^{-2\theta} - e^{-3\theta}) - 3\theta,$$

Potrivire cu repartiția exponențială

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{\partial \theta} =$$

$$= \frac{9e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}} + \frac{12}{e^{-\theta}-e^{-2\theta}}\left(2e^{-2\theta}-e^{-\theta}\right) + \frac{8}{e^{-2\theta}-e^{-3\theta}}\left(3e^{-3\theta}-2e^{-2\theta}\right) - 3 =$$

$$= \frac{9e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}} + \frac{12}{1-e^{-\theta}}\left(2e^{-\theta}-1\right) + \frac{8}{1-e^{-\theta}}\left(3e^{-\theta}-2\right) - 3 =$$

$$= \frac{1}{e^{-\theta}-1}\left(31-60e^{-\theta}\right),$$

$$\frac{1}{e^{-\theta}-1}\left(31-60e^{-\theta}\right) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = 0.66036,$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = 0.660\,36,$$

Potrivire cu repartiţia exponenţială

$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{\partial \theta^2} =$$

$$= -57\frac{e^{-\theta}}{1-e^{-\theta}} - 9\frac{e^{2(-\theta)}}{(1-e^{-\theta})^2} - 12\frac{e^{-\theta}}{(1-e^{-\theta})^2}\left(2e^{-\theta}-1\right) -$$

$$-8\frac{e^{-\theta}}{(1-e^{-\theta})^2}\left(3e^{-\theta}-2\right) = -29\frac{e^{-\theta}}{(1-e^{-\theta})^2} < 0,$$

$$\left.\frac{\partial^2 \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0.66036} =$$

$$= -\frac{57e^{-0.66036}}{1-e^{-0.66036}} - \frac{9e^{2(-0.66036)}}{(1-e^{-0.66036})^2} - \frac{12e^{-0.66036}}{(1-e^{-0.66036})^2}\left(2e^{-0.66036}-1\right) -$$

$$-\frac{8e^{-0.66036}}{(1-e^{-0.66036})^2}\left(3e^{-0.66036}-2\right) = -64.137.$$

$\hat{\theta} = 0.660\,36$ este estimator de verosimilitate maximă.

Potrivire cu repartiţia exponenţială

Aplicăm testul.
Pasul 1. Variabila care interesează: X durata de funcţionare măsurată în sute de ore a unui tip de becuri.
Pasul 2. H_0 : variabila X urmează o distribuţie exponenţială.
Pasul 3. H_1 : variabila X nu urmează o distribuţie exponenţială.
Pasul 4. $\alpha = 0.001$
Pasul 5. Testul statistic este

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{(f_k - np_k)^2}{np_k}.$$

Pasul 6. Determinăm regiunea critică. Aceasta este $(13.8155, \infty)$.

Potrivire cu repartiția exponențială

Pasul 7. Calculele:
Probabilitățile teoretice sunt

$$p_1 = 1 - e^{-0.660\,36} = 0.483\,33,$$
$$p_2 = e^{-0.660\,36} - e^{-2\cdot 0.660\,36} = 0.24972,$$
$$p_3 = e^{-2\cdot 0.660\,36} - e^{-3\cdot 0.660\,36} = 0.12902,$$
$$p_4 = e^{-3\cdot 0.660\,36} = 0.137\,92,$$
$$\chi^2 = 2.086\,2 + 2.713\,2 + 4.405\,5 + 2.379\,3 = 11.584$$
$$\chi^2_{0.999}(2) = 13.8155$$

Ca mai înainte, calculăm statistica și ne rezultă $\chi^2 = 11.5837$
Pasul 8. $\chi^2 < \chi^2_{0.001}(2)$, rezultă că nu avem motive să respingem ipoteza H_0.