Examen la disciplina Analiză Matematică, semestrul 1, 2013–2014
- model subiect -

I. 1. Calculaţi limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right).$$

2. Stabiliţi natura seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n^3}.$$

3. Se consideră şirul $(a_n)_n$ definit prin relaţia de recurenţă $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$, $n \geq 1$ şi $a_1 = 1$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ şi că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ este convergentă.

II. 1. Calculaţi limita:

$$\lim_{x\to 1, x<1} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)^{\cos\frac{\pi x}{2}}.$$

2. Se dă funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2-xy+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea, existenţa derivatelor parţiale de ordinul I şi diferenţiabilitatea lui f în punctul $(0,0)$.

3. Considerăm funcţia

$$f(x,y) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{1}{y}, \qquad x \neq 0,\ y \neq 0.$$

a) Calculaţi derivatele parţiale şi diferenţiala de ordinul 1 şi 2 ale funcţiei f în punct curent.
b) Determinaţi punctele critice şi punctele de extrem ale funcţiei f.