# Curs 13

# Testarea ipotezelor statistice

În continuare vom face ipoteze asupra parametrilor unor populaţii, ştiind distribuţia pe care o urmează. Vom folosi rezultatele obţinute la estimarea prin intervale de încredere a unor parametri remarcabili ai unor distribuţii cunoscute.

Fie o colectivitate cercetatată din punct de vedere al caracteristicii $X$. Legea de probabilitate este $f(x, \theta)$ şi poate fi funcţia de frecvenţă, în cazul discret, respectiv densitatea de probabilitate, în cazul continuu.

## 13.1 Teste parametrice

**Definiţia 13.1.1** *Se numeşte* ipoteză statistică *orice presupunere relativ la parametrii distribuţiei uneia sau mai multor populaţii statistice, dacă distribuţia este cunoscută, sau presupuneri legate de distribuţia de probabilitate a populaţiei statistice. Ipotezele pot fi acceptate sau nu cu anumite probabilităţi de corectitudine a deciziei.*

Testul statistic poat fi referitor la parametrii de care depinde legea de probabilitate a caracteristicii $X$. În acest caz testul se numeşte *parametric*. În caz contrar se obţine un test *neparametric*.

Acceptarea unei ipoteze nu înseamnă că este adevărată ci că nu există motive de respingere. Adevărul sau falsitatea ipotezei nu se poate stabili niciodată cu exactitate până nu se examinează întreaga populaţie. Acest lucru este imposibil în cele mai multe situaţii practice. De aceea procedura de testare a ipotezei statistice se face cu o anumită probabilitate de a trage o concluzie greşită.

**Exemplul 13.1.2** Să presupunem că în timp ce urmărim o emisiune la TV apare pe ecran o reclamă în care se afirmă că firma $X$ vinde un nou tip de baterii electrice funcţionând în medie 100 de ore fără întrerupere. Un consumator sceptic doreşte să testeze această afirmaţie care se referă la durata de viaţă a bateriilor produse de firma $X$. Pentru aceasta, statistica recomandă să se considere un eşantion aleator din bateriile produse de acea firmă, să fie lăsate să funcţioneze şi să se înregistreze timpii scurşi până la descărcarea lor. Să presupunem că s-au considerat 26 de baterii şi a rezultat un timp mediu de funcţionare $\overline{x} = 98.2$ de ore. Dacă ar fi rezultat $\overline{x} \geq 100$, atunci nu se putea reproşa nimic firmei $X$; dar pentru $\overline{x} = 98.2$ se pune problema avertizării consumatorilor. Unii se pot întreba dacă eşantionul a fost reprezentativ, alţii decid că totul este Ok (ce înseamnă 98.2, dar 100?). Cât de mult se poate coborî pentu a decide că reclama nu este minciunoasă? Astfel de întrebări se pun în legătură cu testarea oricărei ipoteze statistice.

În testarea ipotezelor se începe cu o afirmaţie numită ipoteza nulă şi notată $H_0$, despre care nu se ştie dacă este adevărată sau falsă, iar eşantionul este ales pentru a valida această ipoteză. În cazul bateriilor electrice ipoteza nulă este

$$H_0 : m = 100$$

(deci firma $X$ spune adevărul). Notăm cu $H_1$ o ipoteză alternativă care să sugereze şi condiţiile în care ipoteza $H_0$ este respinsă; de exemplu:

$$H_1 : m < 100$$

Nu întotdeauna ipoteza $H_1$ reprezinta negaţia logică obişnuită a ipotezei $H_0$. De regulă, aceasta a doua ipoteză se alege în direcţia deciziei de respingere a ipotezei $H_0$; nu se ia aici $H_1 : m > 100$ care nu ar fi o ipoteză de respingere ci de satisfacţie pentru calitatea bateriilor.

Valorile parametrilor specificaţi prin ipoteza nulă sunt determinaţi prin mai multe căi:

– pot rezulta dintr-o experienţă trecută, din experienţe realizate acum,

– pot fi obţinute din teorie sau modele privitoare la procesele în studiu.

Obiectivul testului este, de obicei, de a stabili dacă aceste valori s-au schimbat. Altă situaţie apare când valorile parametrilor rezultă din consideraţii exterioare sau din obligaţii contractuale. Atunci obiectivul testării ipotezelor este de a confirma aceste valori.

### 13.1.1 Legătura dintre testarea ipotezei statistice relativ la un parametru şi intervalul de încredere al parametrului

Fie parametrul $\theta$ şi $[u, v]$ intervalul de încredere pentru acest parametru cu nivelul de încredere $100(1-\alpha)\%$. Astfel pentru ipoteza bilaterală

$H_0 : \theta = \theta_0$,
$H_1 : \theta \neq \theta_0$,

vom respinge ipoteza $H_0$ dacă şi numai dacă $\theta_0 \notin [u, v]$, $[u, v]$ intervalul de încredere cu nivelul de încredere $100(1-\alpha)\%$. *Regiunea critică* pentru testul bilateral (conţine valorile pentru care ipoteza $H_0$ se respinge) este în afara intervalului de încredere.

Pentru ipoteza unilaterală

$H_0 : \theta = \theta_0$,
$H_1 : \theta < \theta_0$,

vom respinge ipoteza $H_0$ dacă şi numai dacă $\theta_0 < u$. Mulţimea $(-\infty, u)$ se numeşte *regiune critică* pentru testul unilateral propus, $[u, \infty)$ fiind intervalul de încredere unilateral pentru parametrul $\theta$.

Pentru ipoteza unilaterală

$H_0 : \theta = \theta_0$,
$H_1 : \theta > \theta_0$,

vom respinge ipoteza $H_0$ dacă şi numai dacă $\theta_0 > v$. Mulţimea $(v, \infty)$ se numeşte *regiune critică* pentru testul unilateral propus, $(-\infty, v]$ fiind intervalul de încredere unilateral pentru parametrul $\theta$.

**Etapele procedurii de testare a ipotezelor:**

Pasul 1. Pentru problema studiată se identifică parametrul care interesează a fi testat.

Pasul 2. Se formulează ipoteza nulă $H_0$.

Pasul 3. Se formulează ipoteza alternativă $H_1$.

Pasul 4. Se alege pragul de semnificaţie $\alpha$.

Pasul 5. Se face selecţia, dacă testul verifică o ipoteză pentru date confirmate din experienţe realizate. Se determină testul statistic corespunzător.

Pasul 6. Se stabileşte regiunea critică corespunzătoare testului propus.

Pasul 7. Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic şi se calculează valoarea.

Pasul 8. Se stabileşte dacă ipoteza $H_0$ se acceptă sau nu.

**Exemplul 13.1.3** Folosim un test unilateral pentru medie cu dispersie necunoscută. Aplicăm paşii testului problemei din Exemplul 13.1.2.

Pasul 1. Pentru problema studiată se identifică parametrii care interesează: timpul mediu de funcţionare a bateriilor. Notăm cu $m$ parametrul care ia ca valori acest timp mediu.

Pasul 2. Se formulează ipoteza nulă

$$H_0 : m = 100$$

Pasul 3. Se formulează ipoteza alternativă

$$H_1 : m < 100$$

Pasul 4. Se alege pragul de semnificaţie $\alpha = 0.05$.

Pasul 5. Se face selecţia şi se determină testul statistic corespunzător. Se consideră un eşantion $n = 26$ de baterii, sunt puse să funcţioneze şi se notează timpul de funcţionare a bateriilor. S-a obţinut media $\overline{x} = 98.2$ şi $s = 10$ ore. Deoarece dispersia nu este cunoscută şi volumul eşantionului este mic folosim testul Student. Pentru aceasta utilizăm statistica (conform rezultatelor de la intervale de încredere)

$$T = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t(n-1).$$

Pasul 6. Testul este unilateral. Se determină $t_{\alpha,n-1}$ astfel încât $P(T < -t_{\alpha,n-1}) = \alpha$, $P(T < -t_{0.05,25}) = 0.05$ rezultă $t_{0.05,25} = 1.70814$. Regiunea critică pentru $T$ este $(-\infty, -1.70814)$.

Pasul 7. Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic şi se calculează valoarea.

Stim că $\overline{x} = 98.2$ şi $s = 10$ ore, rezultă că $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{26}} = 1.9612$. Calculăm $T = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{98.2 - 100}{\frac{10}{\sqrt{26}}} = -0.91782$.

Aceasta înseamnă că $\overline{X} < 100 - \frac{10}{\sqrt{26}} 1.70814 = 96.65$, regiunea critică pentru $m$ este $(-\infty, 96.65)$.

Pasul 8. Se stabileşte dacă ipoteza $H_0$ se acceptă sau nu. Deoarece $T = -0.917\,82 > -1.70814 = -t_{0.05,25}$, rezultă că în acest caz nu avem motive să respingem ipoteza $H_0$, deci ipoteza $H_0$ se acceptă.

Regiunea colorată este regiunea critică pentru testul unilateral
$H_0 : m = m_0, H_1 : m < 100$

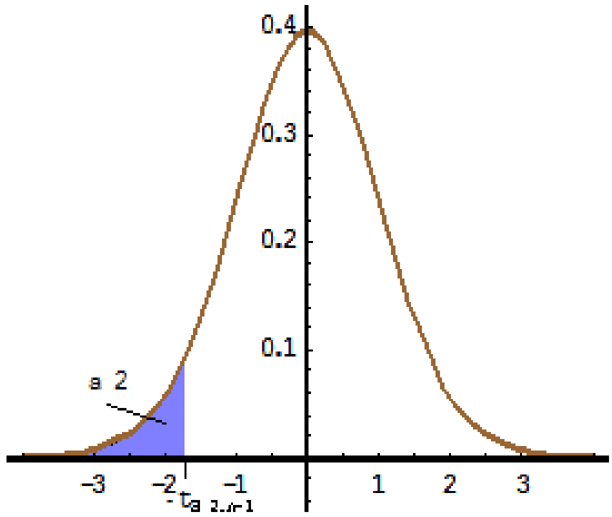
**Observaţia 13.1.4** *Dacă am fi aplicat Testul Z atunci :* $\Phi(z_{0.05}) = 0.95 \Rightarrow z_{0.05} = 1.64485$ *şi regiunea critică este* $(-\infty, -1.64485)$ *. Deoarece* $Z = -0.917\,82 > -1.64485$*, rezultă că nu avem motive să respingem ipoteza* $H_0$*.*

*Dacă datele din eşantion ar fi dat* $\overline{x} = 94.5$*, folosind testul Student rezultă*

$$T = \frac{\overline{X} - m}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{94.5 - 100}{\frac{10}{\sqrt{26}}} = -2.8045 < -1.70814 = t_{0.05,25}$$

*şi respingem ipoteza* $H_0$*.*

*Dacă am fi aplicat testul Z am obţine* $T = -2.804\,5 < -1.64485$*, rezultă că, la fel ca mai sus, respingem ipoteza* $H_0$*.*




*Dacă schimbăm pragul de semnificaţie $\alpha = 0.01$, atunci dacă aplicăm testul Student* $t_{0.01,25} = 2.48511$ *şi pentru* $\overline{x} = 98.2$, $T = -0.91782 > -2.48511$. *Rezultă că nu avem motive să respingem ipoteza* $H_0$.

*Pragul de semnificaţie este dat de piaţă, lupta pentru calitate, concurenţa în promovarea produselor.* $\Diamond$

Această procedură de decidere ne poate conduce la două concluzii greşite: eroare de tip I şi eroare de tip II. Deoarece deciziile sunt bazate pe rezultate aleatoare, probabilităţile pot fi asociate acestor erori.

*Eroarea de tip I* constă în respingerea ipotezei $H_0$ deşi ea este adevărată (se respinge pe nedrept ipoteza nulă). Probabilitatea de a face o eroare de tip I se numeşte risc de speţa întâi (risc al furnizorului) şi este dată de nivelul $\alpha$ de încredere,

$$\alpha = P\left(\text{se respinge } H_0, \text{ deşi } H_0 \text{ este adevărat}\right).$$

Pentru exemplul nostru înseamnă că eroarea de tip I poate apare când pentru eşantionul studiat, media timpului de funcţionare a bateriilor a fost $\overline{x} = 94.5$, fapt care ne conduce la respingerea ipotezei, deşi în realitate timpul de funcţionare este corect.

Calculăm

$$P\left(\overline{x} < 94.5 \mid m = 100\right) = P\left(\frac{\overline{x} - 100}{\frac{10}{\sqrt{26}}} < \frac{94.5 - 100}{\frac{10}{\sqrt{26}}}\right) =$$
$$= P(T < -2.8045) = F_{25}(-2.804\,5) = 0.0048 \approx 0.005,$$

unde $F_{25}(-2.804\,5)$ reprezintă valoarea funcţiei de repartiţie Student cu 25 de grade de libertate. Aceasta înseamnă că 0.5% din eşantioane vor conduce la respingerea ipotezei nule când media reală de viaţă a bateriilor este de 100 ore.

**Observaţia 13.1.5** *Putem reduce $\alpha$ prin lărgirea regiunii de acceptare. De exemplu, dacă regiunea critică ar fi* $(-\infty, 94.5)$ *atunci*

$$\alpha = P\left(\overline{x} < 94.5 \mid m = 100\right) = P\left(\frac{\overline{x} - 100}{\frac{10}{\sqrt{26}}} < \frac{94.5 - 100}{\frac{10}{\sqrt{26}}}\right) =$$
$$= P(T < -3.8243) = F_{25}(-3.8243) = 0.000388446$$

*Se poate reduce $\alpha$ şi prin creşterea dimensiunii eşantionului. Dacă facem o selecţie de volum $n = 36$ şi am obţinut acelaşi $s = 10$, atunci*

$$\alpha = P\left(\overline{x} < 96.65 \mid m = 100\right) = P\left(\frac{\overline{x} - 100}{\frac{10}{\sqrt{36}}} < \frac{94.5 - 100}{\frac{10}{\sqrt{36}}}\right) =$$
$$= P(T < -3.3) = F_{25}(-3.3) = 0.00111.$$

*Eroarea de tip II* înseamnă admiterea unei ipoteze false, adică nu se respinge ipoteza $H_0$ deşi ea este falsă. Probabilitatea acestei erori se numeşte risc de speţa a doua (risc al beneficiarului) şi este notată cu $\beta$.

În exemplul nostru se poate produce o eroare de tip II dacă eşantionul pentru care am obţinut $\overline{x} = 98.2$ ne conduce la acceptarea ipotezei $H_0$, deşi ea este falsă. $\beta = P($nu resping $H_0$, deşi $H_0$ este fals$)$.

Presupunem că în realitate $m = 95$.

$$\beta = P\left(\overline{x} > 98.2 \mid m = 95\right) = P\left(\frac{\overline{x} - 95}{\frac{10}{\sqrt{26}}} > \frac{98.2 - 95}{\frac{10}{\sqrt{26}}}\right) =$$
$$= P(T > 1.631\,7) = 1 - F_{25}(1.631\,7) = 0.05763$$

Astfel, în testarea orcărei ipoteze statistice pot apare patru situaţii:

| Decizia | $H_0$ adevărată | $H_0$ este falsă |
|---|---|---|
| nu avem motive de respingere a lui $H_0$ | $p = 1 - \alpha$ | eroare de tip II $p = \beta$ |
| respingem $H_0$ | eroare de tip I $p = \alpha$ | $p = 1 - \beta$ |

Orice regulă de decizie este cuplul de numere $(\alpha, \beta)$.

Dintre două reguli de decizie cu $(\alpha_1, \beta_1)$ şi $(\alpha_2, \beta_2)$ astfel încât $\alpha_1 \leq \alpha_2$, $\beta_1 \leq \beta_2$, vom elimina pe a doua. Spunem că regula de decizie $(\alpha_1, \beta_1)$ domină regula $(\alpha_2, \beta_2)$. Există şi cazuri în care cele două reguli nu se pot compara.

### 13.1.2 Testarea mediei unei distribuţii normale

Vrem să testăm ipoteza

$H_0 : m = m_0$

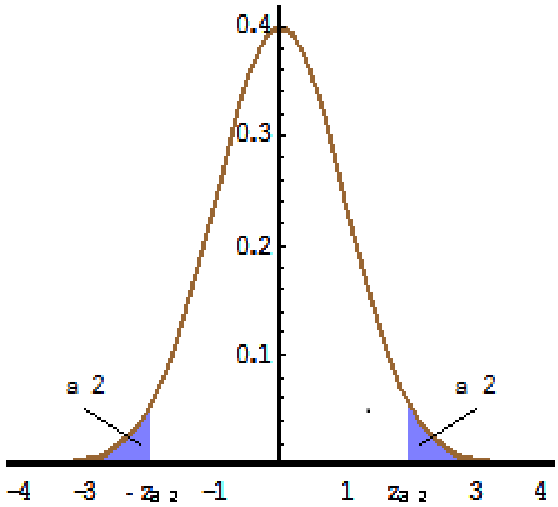
$H_1 : m \neq m_0$

unde $m_0$ este constantă dată.

Selecţia $X_1, X_2, \ldots, X_n$ s-a facut dintr-o populaţie distribuită normal cu media necunoscută şi abaterea medie pătratică $\sigma$ cunoscută. Deoarece $\overline{X}$ este distribuită normal cu media $m_0$ şi devierea standard $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, şi dacă ipoteza nulă este adevărată, putem construi o regiune critică pe baza datelor din eşantion. Se utilizează statistica (conform rezultatelor de la intervale de încredere) $Z_0 = \dfrac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0, 1)$.

$$P\left(|Z_0| \leq z\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$
$$1 - \alpha = P\left(m \in \left[\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = \Phi\left(z\right) - \Phi\left(-z\right) =$$
$$= 1 - 2\Phi(-z) \Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 2\Phi(-z).$$

Notăm cu $z_{\frac{\alpha}{2}}$ valoarea pozitivă a lui $z$ obţinută din relaţia $\Phi(-z) = \dfrac{\alpha}{2}$. Dacă pentru selecţia făcută valoarea calculată $Z_0 = \dfrac{\overline{x} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \notin \left[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ ipoteza $H_0$ este respinsă. Regiunea $\left(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$ este regiunea critică sau regiunea de respingere a ipotezei $H_0$.

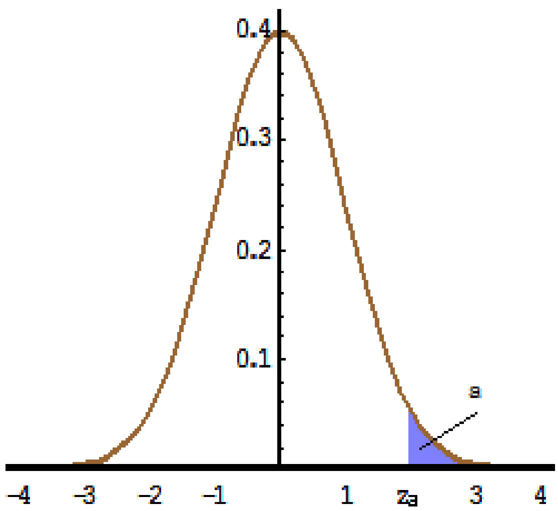



Regiunea critică pentru testul bilateral $H_0 : m = m_0$, $H_1 : m \neq m_0$ este prezentată în Figura 9.2 iar aria fiecărei zone colorate este $\dfrac{\alpha}{2}$.

Dacă $Z_0 = \dfrac{\overline{x} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in \left[-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right]$ nu avem motive să respingem ipoteza $H_0$.

Dacă dispersia este necunoscută se foloseşte testul statistic $T = \dfrac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t\,(n-1)$, care urmează, în acest caz, o distribuţie Student cu $n-1$ grade de libertate.

Regiunea critică pentru testul unilateral
$H_0 : m = m_0, H_1 : m > m_0$ este



| Ipoteza $H_0$ | Statistica | Ipoteza alternativă $H_1$ | Regiunea critică pentru respingerea lui $H_0$ |
|---|---|---|---|
| A) | $Z_0 = \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \in N(0,1)$ | $m < m_0$ | $Z_0 < -z_\alpha$ |
| $m = m_0$ | ($\sigma$ cunoscut) $n \geq 30$ | $m > m_0$ | $Z_0 > z_\alpha$ |
| | | $m \neq m_0$ | $\lvert Z_0 \rvert > z_{\frac{\alpha}{2}}$ |
| B) | $T = \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t(n-1)$ | $m < m_0$ | $T < -t_{\alpha,n-1}$ |
| $m = m_0$ | ($\sigma$ necunoscut) $n < 30$ | $m > m_0$ | $T_{n-1} > t_{\alpha,n-1}$ |
| | | $m \neq m_0$ | $\lvert T_{n-1} \rvert > t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ |

**Exemplul 13.1.6** *La un control al calităţii produselor fabricate de către o fabrică s-au obţinut următoarele date privind greutatea în grame a unui anumit produs: 998, 989, 1004, 1015, 991, 987, 995, 1006, 987, 983, 996, 997, 1003, 990, 996, 992, 997, 1016, 990, 981. Să se verifice ipoteza că greutatea produselor corespunde standardului de calitate care este 1000 g. Să se calculeze intervalul de încredere pentru greutatea produselor.*

**Rezolvare.** Se va efectua mai întâi testul bilateral pentru medie cu dispersie necunoscută.

*Pasul 1*. Parametrul care trebuie testat este media greutăţii $m$.

*Pasul 2.* Se fixează ipoteza nulă

$H_0 : m = 1000$ (greutatea produselor corespunde normei);

*Pasul 3.* Se fixează ipoteza alternativă

$H_1 : m \neq 1000$ (greutatea produselor nu corespunde normei, sînt necesare ajustări ale procesului de producţie).

*Pasul 4.* Nivelul de seminficaţie este considerat pe rând $\alpha = 0.05$ şi $\alpha = 0.01$.

*Pasul 5.* Se face selecţia. Se stabileşte statistica folosită (conform rezultatelor de la intervale de încredere)

$$T = \frac{\overline{X} - m_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in t(n-1),$$

care are repartiţie Student cu $n-1$ grade de libertate. Avem $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ este media greutăţilor produselor din lotul dat, $s$ este abaterea medie pătratică de selecţie, $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.

*Pasul 6.* Se determină regiunea critică şi valoarea critică $t_{\frac{\alpha}{2},n-1} > 0$ astfel încât $P(|T| \leq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}) = 1 - \alpha$. Se vor considera cazurile $\alpha = 0.05$ şi $\alpha = 0.01$.

*Pasul 7.* Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic şi se calculează valoarea.

*Pasul 8.* Se stabileşte dacă ipoteza $H_0$ se acceptă sau nu. Dacă $|T| \leq t_{\alpha/2}$, atunci nu avem motive să respingem ipoteza $H_0$, iar dacă $|T| > t_{\alpha/2}$, atunci ipoteza $H_0$ se respinge şi se acceptă ipoteza $H_1$.

Următorul program Matlab va efectua calculele necesare şi va determina ce ipoteză trebuie acceptată:

```
% Test bilateral privind media repartitiei normale,
% dispersie necunoscuta.
```

```
% ipoteza nula H0:  m=1000
% ipoteza alternativa H1:  m~=1000
clc;
clear;
format compact;
x=[998, 989, 1004, 1015, 991, 987, 995, 1006, 987,...
    983, 996, 997, 1003, 990, 996, 992, 997, 1016,...
    990, 981]
n=length(x)
alfa=0.05
m=1000
ms=sum(x)/n
s=sqrt(1/(n-1)*sum((x-ms).^2))
t=(ms-m)*sqrt(n)/s
ta=tinv(1-alfa/2,n-1)
if abs(t)<=ta
    disp('Ipoteza H0 se accepta')
else
    disp('Ipoteza H0 se respinge')
end;
int_incr=[ms-ta*s/sqrt(n) ms+ta*s/sqrt(n)]
t=-5:0.1:5;
ft=tpdf(t,n-1);
plot(t,ft,'m');
xlabel('t'); ylabel('densitatea de repartitie Student');
patch([t(t<=-ta),-ta],[ft(t<=-ta),0],'b');
patch([t(t>=ta),ta],[ft(t>=ta),0],'b');
```

Rulând programul, obţinem:

$$\bar{x} = 995,65; \quad s = 9,4494; \quad t = -2,0587; \quad t_{\alpha/2} = 2,093.$$

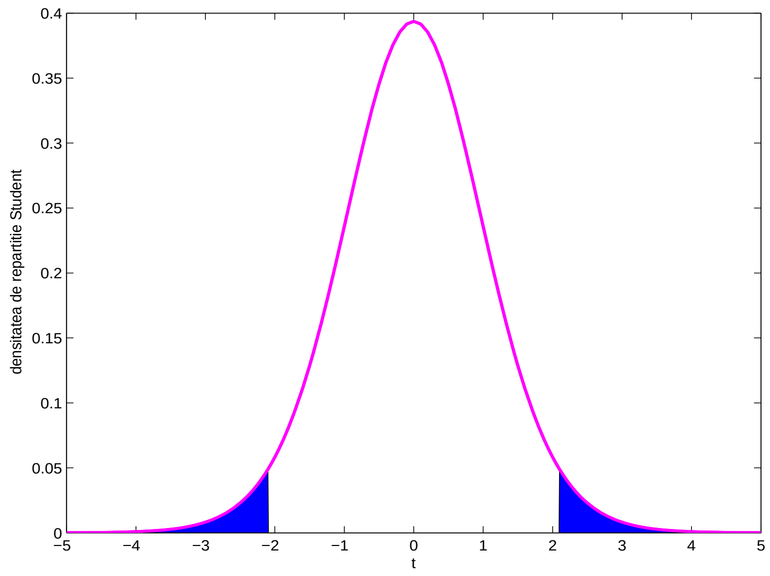
Prin urmare $|t| < t_{\alpha/2}$ şi, deci, ipoteza nulă $H_0$ se acceptă pentru nivelul de semnificaţie $\alpha = 0,05$. Intervalul de incredere

$$\left[\bar{x} - t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

pentru $x$ (greutatea produsului) este $[991,23;\ 1000,1]$. Programul afişează, de asemenea, graficul densităţii de repartiţie Student (figura 9.2). Zona haşurată indică valorile lui $t$ pentru care ipoteza nulă este respinsă.

Luând $\alpha = 0.01$, obţinem $t_{\alpha/2} = 2.8609$ şi deci ipoteza nulă se confirmă iar. Intervalul de încredere este $[989.6;\ 1001.7]$.

**Exemplul 13.1.7** *Printr-un sondaj, pentru un eşantion de volum* $n = 20$*, s-a constatat că durata medie de funcţionare în ore a unui anumit tip de acumulatoare pînă la următoarea încărcare este* 148 *ore. Să se verifice ipoteza că durata de funcţionare este* 150 *ore, ipoteza alternativă fiind un timp de funcţionare mai mic de* 150 *ore, la un nivel de semnificaţie de* 0.05*, ştiind că dispersia duratei de funcţionare este* 35.




**Rezolvare.** Se va efectua un test unilateral pentru medie cu dispersie cunoscută.

<u>*Pasul 1*</u>. Parametrul care trebuie testat este media timpilor de funcţionare a unui anumit tip de acumulator, $m$.

<u>*Pasul 2.*</u> Se fixează ipoteza nulă

$H_0 : m = 150$

<u>*Pasul 3.*</u> Se fixează ipoteza alternativă

$H_1 : m < 150$

<u>*Pasul 4.*</u> Nivelul de semnificaţie este $\alpha = 0.05$.

<u>*Pasul 5.*</u> Se face selecţia. Se stabieşte statistica folosită

$$Z = \frac{\left(\overline{X} - m\right)\sqrt{n}}{\sigma} \in N\left(0, 1\right).$$

<u>*Pasul 6.*</u> Se determină regiunea critică şi valoarea critică $z_\alpha$ pentru nivelul de semnificaţie $\alpha$ dat, din condiţia $P\left(z < -z_\alpha\right) = \alpha$, adică $\Phi\left(z_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

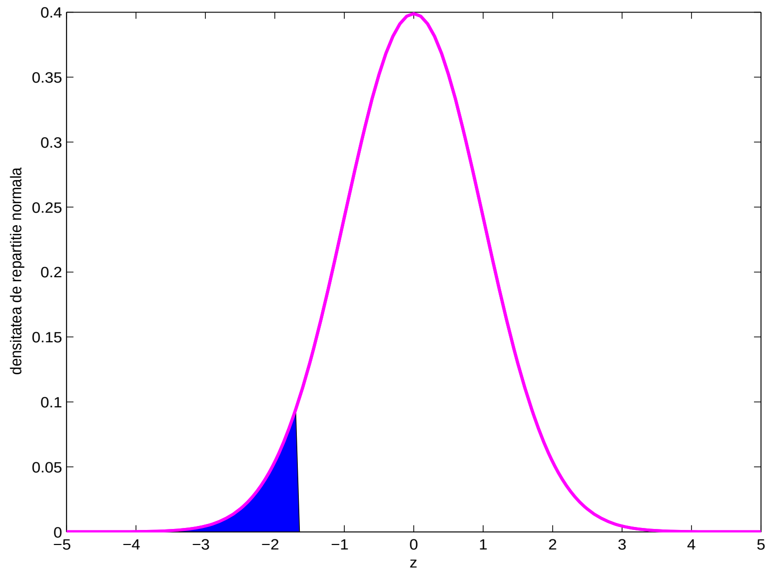
<u>*Pasul 7.*</u> Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic şi se calculează valoarea.

<u>*Pasul 8.*</u> Se stabileşte dacă ipoteza $H_0$ se acceptă sau nu. Dacă $z \geq -z_\alpha$ atunci nu avem motive să respingem ipoteza $H_0$, în caz contrar se respinge $H_0$. Programul următor va efectua acest test.

```
% Test unilateral privind media repartitiei normale,
% dispersie cunoscuta
% ipoteza nula H0:  media m=150
% ipoteza alternativa H1:  m<150
clc;
clear;
n=20;
alfa=0.05
m=150
sg=sqrt(35)
ms=148
z=(ms-m)*sqrt(n)/sg
za=norminv(1-alfa,0,1)
if z>=-za
    disp('Ipoteza H0 se accepta')
```

```
else
    disp('Ipoteza H0 se respinge')
end;
z=-5:0.1:5;
fz=normpdf(z,0,1);
plot(z,fz,'m');
xlabel('z'); ylabel('densitatea de repartitie normala');
patch([z(z<=-za),-za],[fz(z<=-za),0],'b');
```

Rulînd programul, obţinem $\sigma = 5.92$, $z = -1.51$, $z_\alpha = 1.64$ şi, deci, ipoteza nulă se confirmă. Programul afişează şi densitatea de repartiţie normală şi intervalul de respingere a ipotezei nule.




Deoarece $Z = -1.51186 > z1 = -1.64485$ rezultă că nu avem motive să respingem ipoteza nulă.

### 13.1.3 Test asupra dispersiei unei populaţii distribuite normal

Să presupunem o selecţie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dintr-o populaţie repartizată normal cu media $m$ şi dispersia $\sigma^2$.

Pentru a testa ipoteza

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

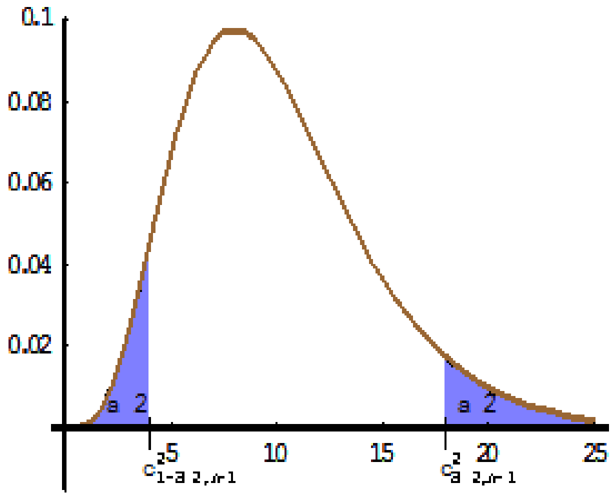
$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

se foloseşte statistica $\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \in \chi^2(n-1)$.

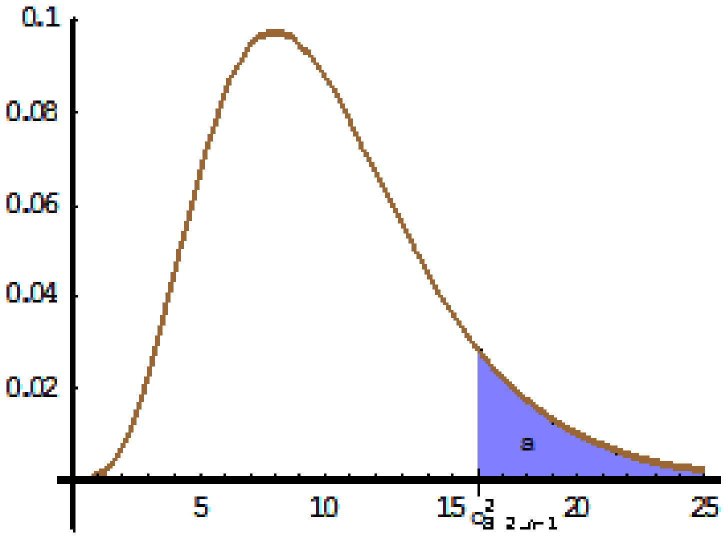
Se calculează $\chi_0^2$. Pentru $\alpha \in (0,1)$ dat, se determină $\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$, $\chi^2_{\alpha/2,n-1}$ astfel încât

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \text{şi} \quad P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \geq \chi^2_{\alpha/2,n-1}\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

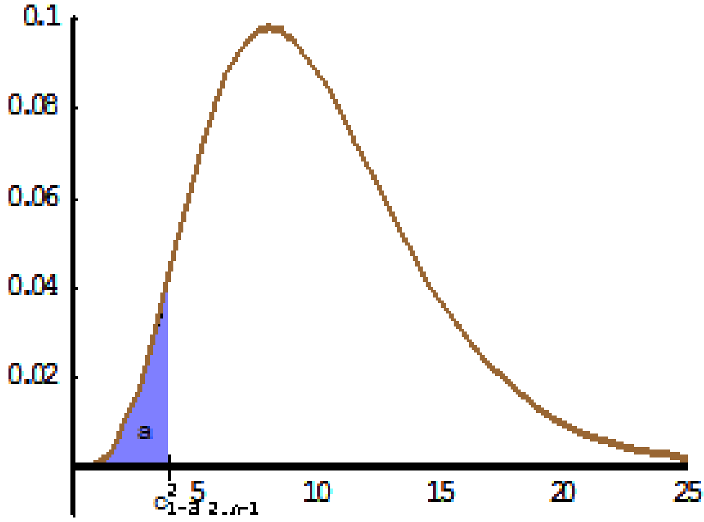
De aici rezultă că nu avem motive să acceptăm ipoteza $H_0$ dacă $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ sau $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$. Regiunea critică în cazule testului bilateral este prezentată în figura următoare.




Aceeaşi statistică este folosită pentru testul
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$;
$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.
Nu avem motive să acceptăm ipoteza $H_0$ dacă $\chi_0^2 > \chi^2_{\alpha,n-1}$




Pentru testul
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$;
$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$
se foloseşte aceeaşi statistică. Nu avem motive să acceptăm ipoteza $H_0$ dacă $\chi_0^2 < \chi^2_{1-\alpha,n-1}$.
Regiunea critică este prezentată în figura următoare.




**Exemplul 13.1.8** O secţie de vopsitorie utilizează o mare cantitate de titan (ca pigment alb). Conform standardelor, se măsoara tonul de alb a acestui pigment utilizând o scală $0-30$, unde nivelul 30 înseamnă alb perfect. Recent secţia şi-a schimbat furnizorul şi noul furnizor afirmă că dioxidul de titan livrat are nivelul mediu 25, cu o dispersie de 0.4. Cei din secţia de vopsitorie se îndoiesc de această mică dispersie şi planifică un experiment pe 10 eşantioane, cerând testarea ipotezei la nivel de dispersie, cu nivelul de semnificaţie $\alpha = 0.05$.

**Rezolvare.**

*Pasul 1*. Parametru care trebuie testat este dispersia, $\sigma^2$.

*Pasul 2.* Se fixează ipoteza nulă

$H_0 : \sigma^2 = 0.4$.

*Pasul 3.* Se fixează ipoteza alternativă

$H_1 : \sigma^2 \neq 0.4$.

*Pasul 4.* Nivelul de semnificaţie este $\alpha = 0.05$.

*Pasul 5.* Se face selecţia. Presupunem că în cele 10 eşantioane, tonul de alb măsurat este: 24, 25, 27, 25, 26, 26, 24, 25, 26, 25 deci

$$\overline{X} = 25.3, \quad s^2 = 0.9.$$

*Pasul 6.* Statistica folosită este

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \in \chi^2(n-1).$$

Se stabileşte regiunea critică. Se determină $\chi^2_{0.975,9}$ şi $\chi^2_{0.025,9}$:

$$P\left(\chi_0^2 \leq \chi^2_{0.975,9}\right) = 0.025 \Rightarrow \chi^2_{0.975,9} = 2.70039 \quad \text{şi}$$
$$P\left(\chi_0^2 \leq \chi^2_{0.025,9}\right) = 0.975 \Rightarrow \chi^2_{0.025,9} = 19.0228.$$

Fiind un test bilateral, $H_0$ se respinge dacă $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2,n-1}$ sau $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$.

*Pasul 7.* Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic şi se calculează valoarea. Atunci

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{9 \cdot 0.9}{0.4} = 20.25.$$

*Pasul 8.* Se stabileşte dacă ipoteza $H_0$ se acceptă sau nu.

Deoarece $\chi_0^2 = 20.25 > \chi_{0.975,9}^2 = 19.0228$, se respinge $H_0$.

Observăm că intervalul de încredere de 99.5% pentru dispersie este

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2,n-1}^2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2,n-1}^2}\right] = \left[\frac{9\cdot 0.9}{19.0228}, \frac{9\cdot 0.9}{2.70039}\right] = [0.4258; 2.9996],$$

iar 0.4 nu intră în acest interval. ◊

| Ipot. $H_0$ | Testul statistic | Ipot. altern. $H_1$ | Regiunea critică pentru respingerea lui $H_0$ |
|---|---|---|---|
| | | $\sigma^2 < \sigma_0^2$ | $\chi_0^2 < \chi_{1-\alpha,n-1}^2$ |
| $\sigma^2 = \sigma_0^2$ | $\chi_0^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ | $\sigma^2 > \sigma_0^2$ | $\chi_0^2 > \chi_{\alpha,n-1}^2$ |
| | | $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ | $\chi_0^2 < \chi_{1-\alpha/2,n-1}^2$ sau $\chi_0^2 > \chi_{\alpha/2,n-1}^2$ |

### 13.1.4 Test asupra proporţiei unei populaţii

În probleme de inginerie apar v. a. care urmează o distribuiţie binomială. De exemplu, studiem ce procent de aparate defecte sunt produse de o anumită fabrică. Este logic să modelăm acest proces cu o distribuţie binomială cu parametrul $p$ care reprezintă probabilitatea ca un aparat să nu fie acceptat. Multe decizii din inginerie se bazează pe teste asupra parametrului $p$.

Se consideră ipotezele asupra lui $p$:
$H_0 : p = p_0$,
$H_1 : p \neq p_0$.

Se consideră, de obicei, un test bazat pe aproximarea repartiţiei binomiale cu o repartiţie normală. Testul furnizează rezultate acceptabile atât timp cât $p$ nu este aproape de 0 sau 1 şi dacă volumul selecţiei este relativ mare. Fie $X$ numărul observaţiilor dintr-un eşantion de dimensiune $n$ care aparţin clasei căreia îi este asociată probabilitatea $p$. Atunci, dacă ipoteza $H_0 : p = p_0$ este adevărată, avem $X \in N\left[np_0, np_0(1-p_0)\right]$, aproximativ. Pentru acest test este folosită statistica (conform rezultatelor de la intervale de încredere)

$$Z_0 = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \in N\left[0,1\right].$$

Ipoteza $H_0$ va fi respinsă dacă $Z_0 < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ sau $Z_0 > z_{\frac{\alpha}{2}}$. Observăm că distribuţia normală standard este cea utilizată în acest test.

| Ipot. $H_0$ | Testul statistic | Ipot. altern. $H_1$ | Regiunea critică pentru respingerea lui $H_0$ |
|---|---|---|---|
| | | $p < p_0$ | $Z_0 < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ |
| $p = p_0$ | $Z_0 = \dfrac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$ | $p > p_0$ | $Z_0 > z_{\frac{\alpha}{2}}$ |
| | | $p \neq p_0$ | $Z_0 > z_{\frac{\alpha}{2}}$ sau $Z_0 < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ |

**Exemplul 13.1.9** O firmă produce aparate de comandă utilizate în industria automobilistică. Utilizatorul impune condiţia ca procentul de aparate defecte să nu depăşească 5%.

Producătorul consideră că acest procent este mai mic. Se utilizează un test statistic în care se consideră pragul de semnificaţie $\alpha = 0.05$, se alege un eşantion de 200 de aparate şi se constată că 4 dintre ele au defect. Poate demonstra producătorul că are dreptate?

**Rezolvare.** Prezentăm paşii în testarea ipotezei statistice.

*Pasul 1.* Parametrul testat este procentul de aparate defecte $p$.

*Pasul 2.* Se formulează ipoteza nulă $H_0 : p = 0.05$.

*Pasul 3.* Se formulează ipoteza alternativă $H_1 : p < 0.05$.

*Pasul 4.* $\alpha = 0.05$.

*Pasul 5.* Se efectuează selecţia eşantionului de volum $n = 200$ şi se stabileşte că procentul de aparate defecte în eşantion este $\hat{p} = \frac{4}{200} = 0.02$.

*Pasul 6.* Se consideră statistica $Z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$.

Se stabileşte regiunea critică. $\Phi(-z_{0.05}) = 0.05 \Rightarrow -z_{0.05} = -1.64485$. Rezultă regiunea critică $(-\infty, -1.64485)$.

*Pasul 7.* Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic şi se calculează valoarea. Se calculează $Z_0 = \dfrac{0.02 - 0.05}{\sqrt{\frac{0.05(1-0.05)}{200}}} = -1.9467$.

*Pasul 8.* Se stabileşte dacă ipoteza $H_0$ se acceptă sau nu.
$Z_0 = -1.9467 < -1.64485$, ipoteza $H_0$ se respinge. Deci producătorul are dreptate.

*Determinăm eroarea de tip II*

Se poate obţine o aproximare a erorii de tip II, $\beta$-eroare pentru testul anterior. Presupunem că $p$ este valoarea exactă a proporţiei. Eroarea de tip II pentru ipoteza alternativă $H_1 : p \neq p_0$ este

$$\beta = \Phi\left(\frac{p_0 - p + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right).$$

Dacă $H_1 : p < p_0$

$$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{p_0 - p - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right).$$

Dacă $H_1 : p > p_0$

$$\beta = \Phi\left(\frac{p_0 - p + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right).$$

Acesastă ecuaţie poate fi folosită pentru a aproxima dimensiunea eşantionului $n$ dacă dorim să aplicăm un test cu nivelul de încredere $1 - \alpha$ şi riscul specificat $\beta$.

În cazul testului bilateral

$$n = \left[\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_{\frac{\beta}{2}}\sqrt{p(1-p)}}{p - p_0}\right]^2.$$

Pentru testul unilateral

$$n = \left[\frac{z_{\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)} + z_{\beta}\sqrt{p(1-p)}}{p - p_0}\right]^2.$$

În cazul Exemplului 13.1.9 eroarea de tip II este, dacă considerăm că valoarea corectă a lui $p = 0.03$,

$$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{0.05 - 0.03 - 1.64485\sqrt{\frac{0.05(1-0.05)}{200}}}{\sqrt{\frac{0.03(1-0.03)}{200}}}\right) =$$
$$= 1 - \Phi(-0.44343) = 1 - 0.328727 = 0.67127.$$

Eroarea de tip II este aproximativ 0.7, destul de mare iar puterea testului este 0.3, o putere mică.

Dacă s-ar dori o eroare de tip II de 0.1, valoarea corectă ar fi $p = 0.3$ cu $\alpha = 0.05$, dimensiunea eşantionului ar trebui să fie cel puţin

$$n = \left[\frac{1.645\sqrt{0.05(1-0.05)} + 1.28155\sqrt{0.03(1-0.03)}}{0.03 - 0.05}\right]^2 \simeq 832.$$

### 13.1.5 Test asupra diferenţei mediilor a două caracteristici distribuite normal

Aceste teste vor folosi statisticele studiate în capitolul Intervale de încredere pentru caracteristicile a două populaţii care urmează o distribuţie normală, în funcţie de cele două cazuri, dispersia cunoscută sau necunoscută. Statisticile folosite sunt cele prezentate la construcţia intervalelor de încredere pentru diferenţa mediilor a două populaţii care urmează o distribuţie normală cu dispersiile cunoscute, respectiv necunoscute.

Urmează un exemplu de aplicare a testului privind egalitatea mediilor a două eşantioane, dispersie necunoscută.

**Exemplul 13.1.10** *Notele înregistrate de studenţii a două grupe la un test sunt*

*I: 7, 5, 4, 8, 10, 9, 3, 8, 6, 5;   II: 9, 7, 10, 10, 8, 4, 5, 4, 6, 9.*

*Să se testeze dacă cunoştinţele studenţilor celor două grupe diferă semnificativ sau nu, ştiind distrubuţia caractetistica studiată urmează o distribuţie normală.*

**Rezolvare.** Se va efectua un test Student pentru verificarea egalităţii mediilor a două eşantioane, dispersiile populaţiilor fiind necunoscute.

*Pasul 1.* Se testează egalitatea mediilor notelor obţinute de studenţii a două grupe, $m_1$ şi $m_2$.

*Pasul 2.* Se formulează ipoteza nulă $H_0 : m_1 = m_2$.

*Pasul 3.* Se formulează ipoteza alternativă $H_1 : m_1 \neq m_2$.

*Pasul 4.* Considerăm nivelul de semnificaţie $\alpha = 0.05$.

*Pasul 5.* Se efectuează selecţia, se calculează mediile celor două eşantioane, dispersiile de selecţie.

*Pasul 6.* Se consideră statistica

$$T = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \in t(n_1 + n_2 - 2).$$

unde $s_1^2$ şi $s_2^2$ sînt dispersiile de selecţie ale celor două eşantioane, iar $n_1$ şi $n_2$ sînt volumele eşantioanelor. Variabila aleatoare $t$ are repartiţie Student cu $n_1 + n_2 - 2$ grade de libertate.

Se stabileşte regiunea critică.

*Pasul 7.* Se fac calculele necesare, se înlocuiesc în testul statistic şi se calculează valoarea critică.

*Pasul 8.* Se stabileşte dacă ipoteza $H_0$ se acceptă sau nu.

Ipoteza nulă $H_0$ se va accepta dacă $|T| \leq t_{\alpha/2}$, unde $t_{\alpha/2}$ se determină din condiţia $P\left(|T| \leq t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$ şi va fi respinsă dacă $|T| > t_{\alpha/2}$. Următorul program Matlab va verifica ipoteza egalităţii celor două medii:

```
% testare bilaterala a diferentei mediilor a doua esantioane
% ipoteza nula:  m1=m2
% ipoteza alternativa:  m1~=m2
clc;
clear;
format compact;
x1=[7 5 4 8 10 9 3 8 6 5]
x2=[9 7 10 10 8 4 5 4 6 9]
alfa=0.05
n1=length(x1);
n2=length(x2);
ms1=sum(x1)/n1
ms2=sum(x2)/n2
s1=sqrt(1/(n1-1)*sum((x1-ms1).^2))
s2=sqrt(1/(n2-1)*sum((x2-ms2).^2))
s=sqrt(((n1-1)*s1^2+(n2-1)*s2^2)/(n1+n2-2))
T=(ms1-ms2)/s/sqrt(1/n1+1/n2)
ta=tinv(1-alfa/2,n1+n2-2)
if abs(t)<=ta
    disp('Ipoteza H0 se accepta')
else
    disp('Ipoteza H0 se respinge')
end;
```

Rulând programul, obţinem

$$\bar{x}_1 = 6.5; \quad s_1^2 = 2.27; \quad \bar{x}_2 = 7.2;$$
$$s_2^2 = 2.35; \quad T = -0.677; \quad t_{\alpha/2} = 2.1.$$

Cum $|T| < t_{\alpha/2}$, rezultă că nu avem motive să respingem ipoteza nulă $H_0$, adică la nivelul de semnificaţie dat cunoştinţele studenţilor celor două grupe nu diferă semnificativ.

Concluzia: nu avem motive să respingem ipoteza nulă $H_0$, adică la nivelul de semnificaţie dat cunoştinţele studenţilor celor două grupe nu diferă semnificativ.

**Exemplul 13.1.11** Un producător este interesat în reducerea timpului de uscare a unei vopsele. În acest caz se ştie că timpul de uscare urmează o distribuţie normală. Sunt testate două formule: formula 1 este cea standard, formula 2 conţine un ingredient în vopsea care reduce timpul de uscare. Din experienţă se ştie că timpul de uscare urmează o repartiţie normală cu abaterea standard de 8 minute şi că ea nu este afectată de adăugarea ingredientului. 10 produse sunt vopsite utilizând formula 1 şi 10 utilizând formula 2. Alegerea produselor pentru vopsire se face aleator. Se obţin datele

x1 = $\{120, 132, 111, 121, 119, 123, 120, 120, 119, 125\}$

x2 = $\{110, 111, 120, 113, 112, 103, 121, 115, 102, 113\}$.

Ce concluzie se poate trage despre cele două formule folosind $\alpha = 0.05$?

Se va efectua un test normal pentru verificarea egalităţii mediilor a două eşantioane, dispersiile populaţiilor fiind cunoscute şi egale.

Ipoteza nula: $H_0 : m_1 = m_2$ (media timpilor de uscare nu diferă semnificativ, este aproape zero)

Ipoteza alternativă: $H_1 : m_1 > m_2$ media timpului de uscare a formulei 1 este mai mare decit a formulei 2.

Va rezulta că nu sunt motive să se accepte ipoteza nulă, deci timpul de uscare prin a doua formulă este mai mic decât cel prin prima formulă.

### 13.1.6 Test asupra raportului dispersiilor a două populaţii

Vom aplica test asupra raportului dispersiilor a două populaţii care urmează o distribuţie normală şi ale căror medii şi dispersii sunt necunoscute.

Reluăm un exemplu dintr-un curs anterior.

**Exemplul 13.1.12** Într-un atelier se polizează o anumită suprafaţă metalică. Două procedee de polizare sunt folosite şi ambele procedee produc porţiuni neregulate. Coordonatorul vrea să aplice acel procedeu care realizează cea mai mică variaţie a porţiunilor neregulate. A fost ales un eşantion de $n_1 = 11$ porţiuni de suprafaţă polizate cu primul procedeu şi s-au obţinut rezultatele

$\{22.0, 13.1, 22.7, 12.9, 12.05, 12.5, 12.55, 20.1, 24.7, 22.7, 14.5\}$.

A rezultat o dispersie de selecţie $S_1^2 = 26.0992$, deci o deviere standard de $S_1 = 5.10874$ microinches şi un eşantion de $n_2 = 16$ porţiuni de suprafaţă polizate cu al doilea procedeu şi s-au obţinut rezultatele

$\{22.0, 13.2, 13.1, 22.1, 12.9, 12.4, 12.05, 12.1, 12.9, 14.55, 23.1, 23.3, 26.5, 24.158, 13.4, 14.5, 14.5, 19.7, 15.6, 12.6, 16.8, 15\}$

A rezultat o dispersie de selecţie $S_2^2 = 22.0243$, deci o deviere standard de $S_2 = 4.69301$ microinches. Dorim să verificăm ipoteza că dispersiile celor două procedee sunt egale cu un nivel de încredere de 90%.

Ipoteza nula: ipoteza nulă $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$.

Ipoteza alternativă: $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$.

Va rezulta că nu avem motive să respingem ipoteza nulă.

### 13.1.7 Test asupra diferenţei proporţiilor a două populaţii

Presupunem că avem două eşantioane de dimensiuni $n_1$ şi respectiv $n_2$ extrase din două populaţii $X_1$ şi $X_2$ reprezentând numărul de observaţii care aparţin unei clase care se studiază. Mai mult, presupunem aproximarea distribuţiei binomiale cu distribuţia normală este aplicabilă (populaţia să aibă măcar 10 elemente), astfel încât estimatorii proporţiilor $\hat{P}_1 = X_1/n_1$ şi $\hat{P}_2 = X_2/n_2$ urmează o distribuţie normală. Suntem interesaţi în a testa ipotezele

$H_0 : p_1 = p_2$,

$H_1 : p_1 \neq p_2$.

Statistica folosită este

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}.$$

Ea urmează o distribuţie aproximativ standard normală. Dacă ipoteza nulă este adevărată, folosind faptul că $p_1 = p_2 = p$, atunci

$$Z = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{p\,(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \in N\,[0,1]\,.$$

Estimatorul parametrului $p$ este $\hat{P} = \dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$.
Statistica folosită pentru testul având ipoteza $H_0 : p_1 = p_2$ va fi

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}\left(1 - \hat{P}\right)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}.$$

| Ipoteza alternativă | Regiunea critică |
|---|---|
| $H_1 : p_1 \neq p_2$ | $\left(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{\frac{\alpha}{2}}, \infty\right)$ |
| $H_1 : p_1 > p_2$ | $(z_\alpha, \infty)$ |
| $H_1 : p_1 < p_2$ | $(-\infty, -z_\alpha)$ |

**Exemplul 13.1.13** Un cercetăror este interesat dacă persoanele care au făcut psihologia sunt capabile să rezolve o problemă care implică o anumită judecată. Cercetătorul este interesat în a estima diferenţa dintre proporţiile persoanelor din cele două populaţii care pot rezolva problema. Prima populaţie are 100 membrii din care 65 au rezolvat problema, iar a doua populatie are 110 din care doar 45 au rezolvat problema. Să se analizeze ipotezele:
a) cele două proporţii sunt egale,
b) prima proporţie este mai mare decât a doua.

**Rezolvare.** *a*) 1. Parametrii care interesează sunt $p_1$ şi $p_2$.
2. Ipoteza nulă $H_0 : p_1 = p_2$,
3. Ipoteza alternativă $H_1 : p_1 \neq p_2$.
4. Alegem $\alpha = 0.05$
5. Testul statistic utilizat $Z_0 = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{p\,(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$, unde $\hat{p}_1 = 0.65, \hat{p}_2 = \frac{45}{110} = 0.409\,09, n_1 = 100, n_2 = 110$ şi

$$\hat{p} = \frac{X_1}{n_1} + \frac{X_2}{n_2} = \frac{65 + 45}{100 + 110} = 0.523\,81.$$

6. Regiunea critică: deoarece $z_{0.025} = 1.96$ rezultă că ipoteza nulă este respinsă dacă $Z_0 \in (-\infty, -1.96) \cup (1.96, \infty)$.
7: $Z_0 = \dfrac{0.65 - 0.409\,09}{\sqrt{0.523\,81\,(1 - 0.523\,81)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{110}\right)}} = 3.4911.$
8. Concluzia: deoarece $Z_0 = 3.4911 > 1.96$, rezultă că ipoteza nulă este respinsă, deci proporţiile nu sunt egale.

*b*) 1. Parametrii care interesează sunt $p_1$ şi $p_2$.
2. Ipoteza nulă $H_0 : p_1 = p_2$,
3. Ipoteza alternativă $H_1 : p_1 > p_2$.
4. Alegem $\alpha = 0.05$
5. Testul statistic utilizat $Z_0 = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{p\,(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$, unde $\hat{p}_1 = 0.65, \hat{p}_2 = \frac{45}{110} = 0.409\,09, n_1 = 100, n_2 = 110$ şi

$$\hat{p} = \frac{X_1}{n_1} + \frac{X_2}{n_2} = \frac{65 + 45}{100 + 110} = 0.523\,81.$$

6. Regiunea critică: deoarece $z_{0.05} = 1.65$, rezultă că ipoteza nulă este respinsă dacă $Z_0 \in (1.65, \infty)$.

7: $Z_0 = \dfrac{0.65 - 0.409\,09}{\sqrt{0.523\,81\,(1 - 0.523\,81)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{110}\right)}} = 3.4911$

8. Concluzia: deoarece $Z_0 = 3.4911 > 1.65$ rezultă că ipoteza nulă este respinsă, deci proporţiile nu sunt egale iar prima proporţie este mai mare decât a doua.