# Curs 3

# Probabilităţi

## 3.1 Moduri de selectare a elementelor

Presupunem că o urnă conţine $m$ bile, numerotate de la 1 la $m$, din care se extrag $n$ bile în anumite condiţii. Vom număra, în fiecare situaţie, numărul cazurilor posibile. Evident $n \leq m$.

1. **Selectare cu întoarcerea bilei extrase în urnă şi ordonare.**

   Extragem $n$ bile pe rând, fiecare bilă fiind pusă înapoi în urnă înainte de următorea extragere, însemnând numărul bilelor în ordinea în care apar (interesează ordinea bilelor în $n$-uplul extras). Evident că pot exista şi repetiţii. Conform principiului multiplicării, în care $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, numărul $n$-uplelor este $m^n$.

2. **Selectare fără întoarcerea bilei în urnă şi cu ordonare.**

   Procedăm ca şi în cazul întâi, dar după fiecare extragere bila obţinută este pusă la o parte, această operaţie fiind echivalentă cu extragerea simultană din urnă a $n$ bile. Obţinem $n$-uple $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Nu pot exista repetiţii. Regula de multiplicare se aplică astfel: pentru $a_1$ avem $m$ posibilităţi, pentru $a_2$ avem $m-1$ posibilităţi,...,pentru $a_n$ avem $m - n + 1$ posibilităţi, în total

   $$m \times (m-1) \times \ldots \times (m-n+1) = A_m^n.$$

   Caz particular: dacă $m = n$, atunci numărul cazurilor posibile este $n!$.

3. **Selectare cu întoarcerea bilei în urnă şi fără ordonare.**

   Extragem $n$ bile, una după alta, fiecare fiind repusă în urnă înainte de a realiza următoarea extragere. Nu ţinem seama de ordinea bilelor în mulţimea formată. Pot exista şi repetiţii. Numărul cazurilor posibile este $C_{n+m-1}^n$, deoarece ar fi ca şi cum am extrage simultan dintr-o urnă care conţine $n + m - 1$ bile (numerotate de la 1 la $m$, unele din ele putându-se repeta) $n$ bile, fără să ne intereseze ordinea. După ultima extragere secvenţială în urnă vor rămâne $m - 1$ bile.

4. **Selectare fără întorcerea bilei şi fără ordonare.**

   Bilele sunt extrase una după alta, fără a pune bila extrasă înapoi; este acelaşi lucru cu a spune că extragem $n$ bile dintr-o dată şi formăm submulţimi de $n$ elemente, în total $C_m^n$.

   Aplicaţie: determinarea numărului de permutări a $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$ elemente care se disting prin grupuri de culori, adică avem $m_1$ elemente de culoarea $c_1$, $m_2$

elemente de culoarea $c_2$ ,..., $m_r$ elemente de culoarea $c_r$. Culorile sunt distincte, dar bilele de aceeaşi culoare nu se disting între ele.

Numărul cazurilor posibile :

- $C_m^{m_1}$ moduri de alegere a poziţiilor bilelor de culoare $c_1$,
- $C_{m-m_1}^{m_2}$ moduri de alegere a poziţiilor bilelor de culoare $c_2$,...,
- $C_{m-m_1-\ldots-m_{r-1}}^{m_r}$ moduri de alegere a poziţiilor bilelor de culoarea $c_m$ (de fapt $m-m_1-m_2-\ldots-m_{r-1}=m_r$ şi avem, de fapt, o singură posibilitate).

În total, ţinând seama de regula multiplicării,

$$C_m^{m_1}\cdot C_{m-m_1}^{m_2}\cdot\ldots\cdot C_{m-m_1-\ldots-m_{r-1}}^{m_r}$$
$$=\frac{m!}{m_1!(m-m_1)!}\cdot\frac{(m-m_1)!}{m_2!(m-m_1-m_2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{(m-m_1-\ldots-m_{r-1})!}{m_r!}=$$
$$=\frac{m!}{m_1!m_2!\ldots m_r!}.$$

## 3.2 Scheme clasice de probabilitate

**Schema lui Poisson**

Se dau $n$ urne $U_1,U_2,\ldots,U_n$ care conţin bile albe şi bile negre în proporţii date, deci cunoaştem probabilităţile $p_i, i=\overline{1,n}$, cu care este extrasă o bilă albă din urna $U_i$. Se cere probabilitatea de a extrage $k$ bile albe şi $n-k$ bile negre, atunci când din fiecare urnă se extrage câte o bilă.

Notăm cu $A_i$ evenimentul extragerii unei bile albe din urna $U_i$. Notăm şi $B_k$ evenimentul care constă în extragerea a $k$ bile albe şi $n-k$ bile negre, adică

$$B_k=(A_1\cap\ldots\cap A_k\cap\overline{A}_{k+1}\cap\overline{A}_n)\cup(A_1\cap\ldots\cap A_{k-1}\cap\overline{A}_k\cap A_{k+1}\cap\overline{A}_{k+2}\cap\ldots\cap\overline{A}_n)$$
$$\cup(\overline{A}_1\cap\ldots\cap\overline{A}_{n-k}\cap A_{n-k+1}\cap\ldots\cap A_n),$$

numărul parantezelor fiind $C_n^k$. Un eveniment

$$A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}\cap\overline{A}_{i_{k+1}}\cap\ldots\cap\overline{A}_{i_n}$$

se realizează, ţinând seama că evenimentele sunt independente, cu probabilitatea

$$p_{i_1}\ldots p_{i_k}q_{i_{k+1}}\ldots q_{i_n}$$

indicii $i_1,i_2\ldots,i_n$ reprezentând o permutare a indicilor $1,2,\ldots,n$ , iar litera $p$ apare de $k$ ori cu indici diferiţi, iar $q$ de $n-k$ ori cu indici care nu apar în $p$ . Se observă că după aceiaşi regulă se calculează coeficientul lui $x^k$ din polinomul

$$P(x)=(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\ldots(p_nx+q_n).$$

Condiţii ale unui experiment Poisson:
1. Există $n$ efectuări în condiţii diferite ale unui experiment.
2. Fiecare experiment are exact două rezultate posibile.
3. Probabilităţile celor două rezultate sunt diferite pe parcursul repetărilor.
4. Repetările sunt independente una de cealaltă.

**Exerciţiul 1** *Într-un atelier sunt trei maşini. Prima dă $0,9\%$ rebut, a doua $1\%$ şi a treia $1,3\%$. Se ia la întâmplare câte o piesă de la fiecare maşină. Se cere probabilitatea ca două din piese să fie bune şi una rebut.*

Avem

$$\begin{array}{lll} p_1 = 0,991, & q_1 = 0,009, & p_2 = 0,99, \\ q_2 = 0,01, & p_3 = 0,987, & q_3 = 0,013, \end{array} .$$

$$P(x) = (0,991x + 0,009)(0,99x + 0,01)(0,987x + 0,013).$$

Coeficientul lui $x^2$ este

$$0,991 \times 0,99 \times 0,013 + 0,99 \times 0,987 \times 0,987 \times 0,009 + 0,991 \times 0,987 \times 0,01 = 0,0313.$$

## Schema lui Bernoulli (binomială)

Presupunem că în schema lui Poisson urnele $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sunt identice. Atunci putem lua

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p, \quad q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q$$

Probabilitatea extragerii a $k$ bile albe se va obţine calculând coeficientul lui $x^k$ din polinomul

$$P(x) = (px + q)^n,$$

adică va fi

$$C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Recunoaştem în această expresie termenul general al ridicării la puterea $n$ a binomului $px+q$. Pentru acest motiv schema se mai numeşte **binomială**. Deoarece urnele sunt identice, putem considera că toate extragerile se fac dintr-o singură urnă, bila extrasă punându-se în urnă după fiecare extragere. Obţinem astfel schema lui Bernoulli. Probabilitatea de a extrage $k$ bile albe din $n$ extrageri dintr-o urnă, punându-se de fiecare dată bila înapoi, este

$$P_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

unde $p$ este probabilitatea oţinerii unei bile albe dintr-o singură extragere şi $q = 1 - p$. Schema lui Bernoulli se mai numeşte **schema bilei revenite (întoarse).**

Condiţii ale unui experiment binomial:

1. Există $n$ repetări identice ale unui experiment.
2. Fiecare repetare are exact două rezultate posibile.
3. Probabilităţile celor două rezultate rămân constante pe parcursul repetărilor.
4. Repetările sunt independente una de cealaltă.

**Exerciţiul 2** *Se aruncă un zar de 5 ori. Se cere probabilitatea ca faţa cu un punct să apară exact de două ori.*

Avem:

$$p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}, \quad n = 5, \quad k = 2,$$

$$P_{5,2} = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,16.$$

## Schema lui Bernoulli cu mai multe stări

Fie o urnă care conţine bile de $m$ culori $c_1, c_2, \ldots, c_m$ iar $p_i$ probabilitatea ca la o extragere să obţinem o bilă de culoarea $c_i$. Probabilitatea ca în $n$ extrageri să obţinem $n_1$ bile de culoarea $c_1$ , $n_2$ bile de culoarea $c_2$ , …, $n_m$ bile de culoarea $c_m$ $(n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n)$ este

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}.$$

Această schemă rezolvă problemele în care se cere probabilitatea ca în $n$ efectuări ale experienţei evenimentul $A_i$ să se realizeze de $n_i$ ori, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ fiind un sistem complet de evenimente şi $P(A_i) = p_i, i = \overline{1, m}$. Presupunem că în cele $n$ efectuări ale experienţei s-au obţinut succesiv

$$\underbrace{A_1 \ldots A_1}_{n_1} \underbrace{A_2 \ldots A_2}_{n_2} \ldots \underbrace{A_m \ldots A_m}_{n_m}.$$

Acest eveniment se produce cu probabilitatea

$$\underbrace{p_1 \cdots p_1}_{n_1} \underbrace{p_2 \cdots p_2}_{n_2} \cdots \underbrace{p_m \cdots p_m}_{n_m}.$$

Acelaşi rezultat îl obţinem pentru orice altă ordine stabilită dinainte în care $A_i$ apare de $n_i$ ori. Rămâne să vedem în câte moduri putem scrie cele $n$ simboluri, dintre care $n_1$ egale cu $A_1$, $n_2$ cu $A_2, \ldots, n_m$ cu $A_m$.

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \ldots C_{n-n_1-n_2-\ldots n_{m-1}}^{n_m} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-\ldots n_{m-1})!}{n_m!\,(n-n_1-\ldots-n_{n_m})!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!}.$$

**Exerciţiul 3** *Se aruncă un zar de 5 ori. Care este probabilitatea ca exact de două ori să apară faţa cu un punct şi exact de 2 ori să apară faţa cu două puncte?*

Avem:

$$n = 5, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 1,$$

$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_3 = \frac{2}{3},$$

$$P_{4,2,2,1} = \frac{5!}{2! \times 2! \times 1!} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{324}.$$

## Schema hipergeometrică

O urnă conţine $a$ bile albe şi $b$ bile negre. Din această urnă se extrag $n$ bile $(n \le a + b)$ pe rând, fără a pune bila extrasă înapoi în urnă (ceea ce este echivalent cu a extrage $n$ bile deodată). Se cere probabilitatea ca din cele $n$ bile extrase, $k$ să fie albe $(k \le a)$ şi $n - k$ negre $(n - k \le b)$. Pentru a calcula acestă probabilitate vom stabili numărul cazurilor posibile şi numărul cazurlor favorabile.

Numărul cazurilor posibile este: $C_{a+b}^n$.

Numărul cazurilor favorabile: un grup de $k$ bile albe dintr-un total de $a$ bile albe poate fi luat în $C_a^k$ moduri; un grup de $n - k$ bile negre din totalul de $b$ bile negre poate fi obţinut în

$C_b^{n-k}$ moduri. Un grup de $k$ bile albe şi $n-k$ bile negre poate fi obţinut, conform principiului multiplicării, în $C_a^k C_b^{n-k}$ moduri. Probabilitatea căutată este

$$\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

**Exemplul 3.2.1 (Controlul de calitate)** *Presupunem că într-o cutie sunt* 550 *de piese, din care* 2% *sunt defecte. Care este probabilitatea ca alegând* 25 *de piese, acestea să conţină două piese defecte. Acesta este principiul testării produselor prin selecţii aleatoare.*

Spaţiul de selecţie este format din mulţimea grupelor de câte 25 de piese care se pot forma cu cele 550 piese (un rezultat posibil al experienţei este o grupare de 25 de piese, iar un rezultat favorabil este o grupare de 25 de piese dintre care 2 piese să fie defecte). Putem alege cele 25 piese dintre cele 550, fără să ne intereseze ordinea pieselor, în $C_{550}^{25}$ moduri. Câte din acestea vor conţine 2 piese defecte? Putem alege cele 2 piese defecte, din cele $550 \times 2\% = 11$, în $C_{11}^2$ moduri, iar celelalte $25-2=23$ piese, care nu sunt defecte, în $C_{539}^{23}$ moduri. Probabilitatea căutată va fi

$$\frac{C_{11}^2 C_{539}^{23}}{C_{550}^{25}} = 0,00059.$$

**Exerciţiul 4** *La o tombolă sunt 400 bilete dintre care 4 câştigătoare. O persoană cumpără 10 bilete. Care este probabilitatea să nu se găsească nici un bilet câştigător?*

Avem $a=4, b=396, k=0, n-k=10, n=10, p=\frac{C_4^0 C_{396}^{10}}{C_{400}^{10}} = 0,903$.

### Schema hipergeometrică cu mai multe stări

În general, dacă urna conţine $a_i$ bile de culoarea $c_i$, i=$\overline{1,m}$, probabilitatea de a obţine $n_1$ bile de culoarea $c_1$ , $n_2$ bile de culoarea $c_2$, $\ldots$, $n_m$ bile de culoarea $c_m$ când facem $n = n_1+n_2+\ldots+n_m$ extracţii, este egală cu

$$\frac{C_{a_1}^{n_1} C_{a_2}^{n_2} \ldots C_{a_m}^{n_m}}{C_{a_1+a_2+\ldots+a_m}^n}.$$

**Exerciţiul 5** *O urnă conţine* 7 *bile albe,* 7 *bile negre şi* 6 *verzi. Se extrag* 9 *bile. Care este probabilitatea să obţinem câte* 3 *de fiecare culoare?*

Avem

$$a_1=7, a_2=7, a_3=6, n_1=3, n_2=3, n_3=3, p=\frac{C_7^3 C_7^3 C_6^3}{C_{20}^9} = 0,145.$$

# Variabile aleatoare

## 4.1 Definiţia şi clasificarea variabilelor aleatoare

Una din noţiunile fundamentele ale teoriei probabilităţilor este cea de variabilă aleatoare. Teoria clasică a probabilităţilor operează, în principal, cu evenimente, iar teoria modernă preferă, unde este posibil, să studieze variabile aleatoare. Intuitiv, o variabilă aleatoare atribuie o valoare numerică oricărui caz posibil al experienţei considerate. Practic toate mărimile fizice, tehnice, economice întâlnite în inginerie sunt variabile aleatoare.

Fie $\{F, \Omega, P\}$ un câmp de probabilitate.

**Definiţia 4.1.1** *Funcţia*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

*se numeşte* ***variabilă aleatoare*** *(v.a.) dacă*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathbf{F}. \tag{4.1}$$

Această definiţie justifică afirmaţia că toate mărimile măsurabile sunt variabile aleatoare. Pentru simplitate, vom nota $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\}$.

**Observaţia 4.1.2** *Nu este obligatoriu* $X(\Omega) = \mathbb{R}$*, deci* $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$*;* $X(\Omega)$ *reprezintă mulţimea valorilor variabilei aleatoare.*

*Relaţia* $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathbf{F}$ *semnifică de fapt că pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ *se poate calcula probabilitatea ca* $X$ *să fie mai mică sau egală cu* $x$*, adică există* $P(\{X \leq x\})$*.*

**Definiţia 4.1.3** *Se numeşte* ***vector aleator*** $n-$***dimensional*** *orice* $n-$*uplu*

$$X = (X_1, X_2, \ ..., X_n)$$

*având cele* $n$ *componente variabile aleatoare.*

### 4.1.1 Variabile aleatoare discrete

Dacă $\Omega$ este finit sau numărabil atunci orice funcţie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare. Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$. Notând $x_i = X(\omega_i), i \geq 1$, $E_i = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\}$ şi $p_i = P(E_i)$, se obţin toate valorile posibile ale lui $X$ precum şi probabilităţile cu care acestea sunt luate. Aceste evenimente formează un sistem complet de evenimente deoarece pentru $i \neq j, E_i \cap E_j = \emptyset$ şi $\bigcup\limits_{i\geq 1} E_i = \Omega$. Evident $0 \leq p_i \leq 1$ şi $\sum\limits_{i\geq 1} p_i = 1$.deoarece

$$\sum_{i\geq 1} p_i = \sum_{i\geq 1} P(E_i) = P\left(\bigcup_{i\geq 1} E_i\right) = P(\Omega) = 1.$$

Variabilei aleatoare $X$ i se poate asocia o matrice cu două linii, numită **matricea (tabelul) de repartiţie** a lui $X$, de forma:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n & ... \\ p_1 & p_2 & ... & p_n & ... \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

unde pe prima linie sunt scrise valorile distincte ale lui $X$ şi pe linia a doua probabilităţile cu care sunt luate aceste valori. O astfel de variabilă aleatoare care are un număr finit sau numărabil de valori se numeşte **variabilă aleatoare discretă**.

Trebuie reţinut că pentru o variabilă aleatoare prezintă interes doar valorile ei şi distribuţia acestor valori.

**Exemplul 4.1.4** *Presupunem că o firmă trebuie să încheie contracte independente cu alte trei firme* $A, B, C$. *Aceste contracte nu sunt sigure, ele se încheie cu probabilităţile* $p_1, p_2, p_3$. *Numărul contractelor pe care firma le poate încheia este o variabilă aleatoare* $X$ *cu* 4 *valori posibile* $0, 1, 2, 4$. *Matricea ei de repartiţie este:*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3 & p_1\overline{p}_2\overline{p}_3 + \overline{p}_1 p_2\overline{p}_3 + \overline{p}_1\overline{p}_2 p_3 & p_1 p_2\overline{p}_3 + \overline{p}_1 p_2 p_3 + p_1\overline{p}_2 p_3 & p_1 p_2 p_3 \end{pmatrix}$$

*Pentru a calcula probabilităţile cu care ia valori variabila aleatoare notăm cu* $E_1, E_2, E_3$ *evenimentele ca firma să încheie contracte cu firmele* $A, B, C$. $P(X = 0)$ *este probabilitatea ca firma să nu încheie nici un contract.*

$P(X = 0) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) = P(\overline{E_1})P(\overline{E_2})P(\overline{E_3}) = (1 - P(E_1))(1 - P(E_2))(1 - P(E_3))$
$= (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) = \overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3$,

$P(X = 1)$ *este probabilitatea ca firma să încheie un contract.*

$P(X = 1) = P\left((E_1 \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_3}) \cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3}) \cup (\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3)\right) =$
$= P(E_1)P(\overline{E_2})P(\overline{E_3}) + P(\overline{E_1})P(E_2)P(\overline{E_3}) + P(\overline{E_1})P(\overline{E_2})P(E_3) = p_1\overline{p}_2\overline{p}_3 + \overline{p}_1 p_2\overline{p}_3 + \overline{p}_1\overline{p}_2 p_3$
*etc.*

*Am notat pentru simplitate* $1 - p_1 = \overline{p}_1$.

**Observaţia 4.1.5** *După cum se vede denumirea de variabilă aleatoare dată acestei noţiuni nu are nimic aleator, ea este perfect determinată de evenimentele lui* $\Omega$. *De asemenea ea nu este o variabilă ci este o funcţie aşa cum rezultă din definiţie.*

### Operaţii cu v. a. discrete

Date variabilele aleatoare discrete $X$ şi $Y$, cu ele se pot efectua operaţiile aritmetice obişnuite. Presupunem că avem tabelele de repartiţie ale celor două variabile aleatoare (v.a.). Prezentăm operaţii cu v. a. în cazul $X(\Omega)$ finit.

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}.$$

Variabila aleatoare $X+Y$ ia valoarea $x_i+y_j$ pe submulţimea $\{\omega \in \Omega : (X + Y)(\omega) = x_i + y_j\}$. Dacă $\{\omega \in \Omega : (X + Y)(\omega) = x_i + y_j\} = \emptyset$, variabila aleatoare $X + Y$ ia valoarea $x_i + y_j$ cu probabilitatea zero şi aceasta nu se trece în tabel.

Dacă notăm $P(\{\omega \in \Omega : (X + Y)(\omega) = x_i + y_j\}) = p_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ atunci tabelul de repartiţie al variabilei aleatoare $X + Y$ va fi

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & \dots & x_1 + y_n & \dots & x_m + y_n \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Pentru produs vom avea

$$XY:\left(\begin{array}{cccccc} x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_n & \ldots & x_my_n \\ q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1n} & \ldots & q_{mn} \end{array}\right). \tag{4.4}$$

unde $P\left(\{\omega \in \Omega : (XY)(\omega) = x_iy_j\}\right) = q_{ij}$, dacă $\{\omega \in \Omega : (XY)(\omega) = x_iy_j\} \neq 0$.

Observăm că $\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = p_i, \sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij} = q_j, \sum\limits_{j=1}^{n} q_{ij} = p_i, \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ij} = q_j$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} p_i &= P\left(\{X = x_i\}\right) = P\left(\{X = x_i\} \cap \Omega\right) = P\left(\{X = x_i\} \cap \left(\{Y = y_1\} \cup ... \cup \{Y = z_n\}\right)\right) \\ &= P\left(\left(\{X = x_i\} \cup \{Y = y_1\}\right) \cap ... \cap \left(\{X = x_i\} \cup \{Y = z_n\}\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}. \end{aligned}$$

Analog se demonstrează şi celelate relaţii. În ambele cazuri tabelul de repartiţie are cel mult $mn$ coloane.

Operaţiile se extind şi în cazul variabilelor aleatoare cu un număr infinit, dar numărabil, de valori.

**Observaţia 4.1.6** *În cazul particular $Y = a = const.$, deoarece*

$$p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = a\right) = P\left(\{X = x_i\} \cap \Omega\right) = P\left(X = x_i\right) = p_i,$$

*avem:*

$$a + X : \left(\begin{array}{cccc} a + x_1 & a + x_2 & \ldots & a + x_m \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{array}\right), aX : \left(\begin{array}{cccc} ax_1 & ax_2 & \ldots & ax_m \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{array}\right).$$

**Exerciţiul 6** *Probabilitatea extragerii unei bile albe dintr-o urnă este $p$. Din această urnă se fac două extrageri, punându-se bila înapoi în urnă după extragere. Se consideră variabilele aleatoare $X_1$ şi $X_2$, prima reprezentând numărul de bile albe obţinute la prima extragere şi a doua numărul de bile albe de la a doua extragere. Să se scrie tabloul de repartiţie al variabilelor aleatoare discrete $X_1,\ X_2,\ X_1 + X_2,\ X_1X_2$.*

*Dacă* $X_1 : \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ q & p \end{array}\right)$, $X_2 : \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ q & p \end{array}\right)$, $q = 1 - p$, *atunci*

$$X_1 + X_2 : \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{array}\right)$$

*deoarece*

$$\begin{aligned} &P(\{X_1 + X_2 = 0\}) = P(\{X_1 = 0, X_2 = 0\}) = P(\{X_1 = 0\})P(\{X_2 = 0\}) = q^2, \\ &P(\{X_1 + X_2 = 1\}) = P(\{X_1 = 1, X_2 = 0\} \cup \{X_1 = 0, X_2 = 1\}) = 2pq, \\ &P(\{X_1 + X_2 = 2\}) = P(\{X_1 = 1, X_2 = 1\}) = P(\{X_1 = 1\})P(\{X_2 = 1\}) = p^2. \end{aligned}$$

*Interpretarea pe care o putem da variabilei aleatoare $X_1 + X_2$ este: valorile variabilei aleatoare reprezintă numărul de bile albe care pot fi extrase din urnă în urma celor două extrageri prezentate în enunţ. La fel,*

$$X_1X_2 : \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2pq + q^2 & p^2 \end{array}\right),$$

*deoarece*

$P(\{X_1X_2 = 0\}) = P(\{X_1 = 0, X_2 = 0\} \cup \{X_1 = 1, X_2 = 0) \cup \{X_1 = 0, X_2 = 1\}) = 2pq + q^2,$
$P(\{X_1X_2 = 1\}) = P(\{X_1 = 1, X_2 = 1\}) = p^2.$

*Interpretarea pe care o putem da variabilei aleatoare* $X_1X_2$ *este: variabila ia valoarea* 0 *dacă s-a extras măcar o bilă neagră (contrarul evenimentului că ambele bile extrase sunt albe) şi valoarea* 1 *dacă ambele bile extrase sunt albe.*

**Definiţia 4.1.7** *Două v.a.* $X$ *şi* $Y$ *se numesc* ***independente*** *dacă pentru orice valori reale* $x_i$ *şi* $y_j$ *evenimente de forma* $\{X = x_i\}$ *şi* $\{Y = y_j\}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, *sunt independente, adică*

$$P(\{X = x_i \wedge Y = y_j\}) = P(\{X = x_i\}) P(\{Y = y_j\}).$$