Curs 6

Variabile aleatoare

6.1 Funcţia de repartiţie

În cele ce urmează $\{\mathbf{F}, \Omega, P\}$ este un câmp de probabilitate.

Definiţia 6.1.1 *Fie X o v. a. Se numeşte* ***funcţie de repartiţie*** *a lui X (sau* ***funcţie de distribuţie cumulativă****) funcţia reală*
$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]\,,\ F_X(x) = P(\{X \le x\})$.

Rezultă că oricărui număr real x i se asociază prin funcţia de repartiţie F probabilitatea ca valorile lui X să fie mai mici decât x.

Pentru o variabilă aleatoare discretătă cu matricea de repartiţie dată prin:
$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \\ p_1 & p_2 & ... & p_n \end{pmatrix}$, unde am presupus, pentru simplitate, $x_1 < x_2 < ... < x_n$,
se poate introduce funcţia de repartiţie care este o funcţie scară dată de relaţa:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x < x_1, \\ p_1, & \text{dacă} \quad x_1 \le x < x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{dacă} \quad x_2 \le x < x_3, \\ \dots & \\ p_1 + \dots + p_{n-1}, & \text{dacă} \quad x_{n-1} \le x < x_n, \\ 1, & \text{dacă} \quad x_n \le x. \end{cases}$$

Graficul acestei funcţii este o funcţie scară. În acest caz funcţia de repartiţie mai poate fi scrisă $F_X(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \theta(x - x_i)$, unde θ este funcţia treaptă unitate a lui Heaviside,
$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Teorema 6.1.2 *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1. Dacă $x_1 \le x_2$, atunci $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;
2. $F_X(x + 0) = F_X(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (F_X este continuă la dreapta);
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$;
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Demonstraţie. 1.Observăm că dacă $x_1 < x_2$ atunci $\{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$ şi aplicând monotonia funcţiei de probabilitate rezultă

$$F_X(x_1) = P(\{X \le x_1\}) \le P(\{X \le x_2\}) = F_X(x_2).$$

2. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $F_X(x+0) = \lim\limits_{n\to\infty} F_X(x+\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\{X \le x + \frac{1}{n}\}) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\bigcap\limits_{n\ge 1} \{X \le x+\frac{1}{n}\}\right) = P(\{X \le x\}) = F_X(x)$.

3. Fie $B_n = \{X \le -n\}$. Atunci $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_X(-n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\{X \le -n\}) = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n)$. Dar (B_n) este un şir descrescător de evenimente şi $\bigcap\limits_{n\ge1} B_n = \emptyset$. Rezultă, $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\bigcap\limits_{n\ge 1} B_n\right) = P(\emptyset) = 0$.

4. Fie $A_n = \{X \le n\}$. Observăm că (A_n) este un şir crescător de evenimente, $\bigcup\limits_{n\ge1} A_n = \Omega$ (epuizează toate valorile v. a. X) şi datorită continuităţii lui P, obţinem $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\bigcup\limits_{n\ge1} A_n\right) = P(\Omega) = 1$. □

Observaţia 6.1.3 *Variabila aleatoare nu este definită explicit, nu se vede; cunoaşterea funcţiei reale F_X permite obţinerea de informaţii de tip statistic relativ la comportarea lui X. De reţinut că v. a. distincte pot avea aceeaşi funcţie de repartiţie.*

Teorema 6.1.4 *Fie $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ funcţia de repartiţie a unei v. a. X. Atunci pentru orice numere reale $a < b$ avem:*
a) $P(\{X > a\}) = 1 - F_X(a)$,
$P(\{X < a\}) = F_X(a-0)$,
$P(\{X \ge a\}) = 1 - F_X(a-0)$.
b) $P(\{a \le X < b\}) = F_X(b-0) - F_X(a-0)$,
$P(\{a < X < b\}) = F_X(b-0) - F_X(a)$,
$P(\{a < X \le b\}) = F_X(b) - F_X(a)$,
$P(\{a \le X \le b\}) = F_X(b) - F_X(a-0)$.

Demonstraţie. a)

$$P(\{X > a\}) = P(\overline{\{X \le a\}}) = 1 - P(\{X \le a\}) = 1 - F_X(a),$$
$$P(\{X < a\}) = P\left(\bigcup_{i\ge1}\left\{X < a - \frac{1}{n}\right\}\right) = F_X(a-0),$$
$$P(\{X \ge a\}) = P(\overline{\{X < a\}}) = 1 - P(\{X < a\}) = 1 - F_X(a-0).$$

b)

$$\{a < X \le b\} = \{X \le b\} \setminus \{X \le a\}, \{X \le a\} \subset \{X \le b\}$$
$$\Rightarrow P(\{a < X \le b\}) = F_X(b) - F_X(a).$$

Analog rezultă şi celelalte relaţii. □

Exerciţiul 1 Să presupunem că pentru o v. a. Y funcţia de repartiţie este

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{pentru } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{pentru } x \ge 1. \end{cases}.$$

Să se calculeze $P(\{Y \leq \frac{1}{2}\})$ şi $P(\{Y^2 > \frac{1}{2}\})$.

Soluţie.

$$P\left(\left\{Y \leq \frac{1}{2}\right\}\right) = F_Y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8},$$
$$P\left(\left\{Y^2 > \frac{1}{2}\right\}\right) = 1 - P(\left\{Y^2 \leq \frac{1}{2}\right\}) = 1 - P(\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq Y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\})$$
$$= 1 - F_Y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + F_Y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 0\right) = 1 - \frac{1}{4} + 0 = \frac{3}{4}.$$

6.2 Variabile aleatoare continue. Densitatea de probabilitate

Definiţia 6.2.1 *Spunem că* ***v. a.*** X *este de* ***tip continuu*** *cu* ***densitatea de probabilitate*** $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dacă funcţia de repartiţie* $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este continuă şi derivabilă pe porţiuni şi* $f_X(x) = F'_X(x)$ *în orice punct* x *în care* F_X *este dervabilă.*

Proprietăţile densităţii de probabilitate

Teorema 6.2.2 *Fie* X *o v. a. continuă cu densitatea de probabilitate* f_X*. Atunci:*

$$a)\ f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$b)\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \tag{6.1}$$

$$c)\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1, \tag{6.2}$$

d) pentru orice numere reale $a < b$ *avem:*

$$P(\{a \leq X < b\}) = P(\{a < X < b\}) = P(\{a < X \leq b\}) = P(\{a \leq X \leq b\}) = \int_a^b f_X(x)dx. \tag{6.3}$$

Demonstraţie. a) Deoarece F_X este monoton crescătoare, conform teoremei 6.1.2, deci derivata ei este pozitivă adică $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f_X(x) = F'_X(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{x} F'_X(x)dt = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \Rightarrow F_X(x) - \lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \Rightarrow$
$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$

c) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \Rightarrow 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx.$

d) Demonstrăm $P(\{a < X \leq b\}) = \int_a^b f_X(x)dx.$

Într-avevăr, $P(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} f_X(t)dt - \int\limits_{-\infty}^{a} f_X(t)dt = \int\limits_{a}^{b} f_X(t)dt.$
Celelalte egalităţi rezultă folosind teorema 6.1.4, b) şi ţinând seama de continuitatea funcţiei F_X. $\square$

Observaţia 6.2.3 *Densitatea de probabilitate este folosită pentru a calcula aria care reprezintă probabilitatea ca v. a. X să ia valori în intervalul $[a, b]$. De exemplu, în cazul măsurării intensităţii curentului, probabilitatea ca v. a. X (ale căerei valori reprezintă intensitatea curentului) să aibă ca rezultat o valoare care să aparţină intervalului $[14\ mA,\ 15\ mA]$ este integrala densităţii de probabilitate a lui X calculată pe acest interval.*

Exerciţiul 2 Se spune că v. a. X este **repartizată uniform pe intervalul** $[a, b]$, $a < b$, notat $X \sim Uniform\,[a, b]$, dacă ea are densitatea de probabilitate

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{dacă } x \in [a, b] \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}.$$

Să se verifice că f_X are proprietăţile densităţii de probabilitate şi să se determine funcţia de repartiţie.

Soluţie. Verificăm proprietăţile a) şi b) ale teoremei 6.2.2. $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, este evidentă şi $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dx = 1.$

Calculăm funcţia de repartiţie. Pentru $x < a \Rightarrow F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = 0,$

Pentu $x \in [a, b] \Rightarrow F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a},$

Pentru $x > b \Rightarrow F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt = 1$, deci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{dacă } x \in [a, b] \\ 1 & \text{dacă } x > b \end{cases}.\blacktriangledown$$

Exerciţiul 3 Se spune că v. a. X este **repartizată exponenţial,** cu notaţia $X \sim Exponential\,[\lambda]$, dacă ea are densitatea de probabilitate

$$f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{dacă } x \geq 0 \\ 0, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}.$$

Să se verifice că f_X are proprietăţile densităţii de probabilitate şi să se determine funcţia de repartiţie.

6.3 Funcţii de v. a.

Considerăm cazul în care v. a. X *este discretă* şi notăm $P(\{X = x\}) = f_X(x)$. Fie $Y = h(X)$ funcţia bijectivă care stabileşte legătura dintre valorile lui X şi Y. Fie $x = h^{-1}(y)$ soluţia unică a ecuaţiei $y = h(x)$. V. a. Y va lua valorile y cănd X va lua valorile $x = h^{-1}(y)$. Atunci

$$f_Y(y) = P(\{Y = y\}) = P(\{X = h^{-1}(y)\}) = f_X(h^{-1}(y)).$$

Exerciţiul 4 Fie X o variabilă aleatoare distribuită geometric în care $P(\{X = k\}) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Ne interesează distribuţia lui X^2.

Soluţie. Notăm $f_X(k) = p(1-p)^k$. Deoarece $X \geq 0$, funcţia $y = x^2$ este bijectivă pentru $x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow h^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

$f_Y(y) = f(h^{-1}(y)) = p(1-p)^{\sqrt{y}}, y = 0, 1, 4, 9, 16, ...$ □

Considerăm cazul în care v. a. X *este continuă.* Fie X v. a. având funcţia de repartiţie F_X. dacă $Y = h(X)$ este o funcţie bijectivă, atunci funcţia de repartiţie a v. a. Y este complet determinată. Fie $x = h^{-1}(y)$ soluţia unică a ecuaţiei $y = h(x)$. Într-adevăr, dacă h este strict crescătoare, atunci:

$F_Y(y) = P(\{Y \leq y\}) = P(\{h(X) \leq y\}) = P(\{X \leq h^{-1}(y)\}) = F_X(h^{-1}(y))$.

Dacă h este strict descrescătoare, atunci:

$F_Y(y) = P(\{Y \leq y\}) = P(\{h(X) \leq y\}) = P(\{X \geq h^{-1}(y)\}) = 1 - F_X(h^{-1}(y) + 0)$.

Teorema 6.3.1 *Fie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie monotonă, derivabilă şi $h'(x) \neq 0$, deci ecuaţia $h(x) = y$ are soluţia unică $x = h^{-1}(y)$.Atunci densitatea de probabilitate a v. a. $Y = h(X)$ este:*

$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left|(h^{-1}(y))'\right|$.

Demonstraţie. Dacă h este monoton crescătoare atunci

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d(F_X(h^{-1}(y)))}{dy} = \frac{dF_X(h^{-1}(y))}{dy}\frac{d(h^{-1}(y))}{dy} = f_X(h^{-1}(y))\,(h^{-1}(y))',$$

iar dacă h este monoton descrescătoare atunci

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d(1 - F_X(h^{-1}(y)))}{dy} = -\frac{dF_X(h^{-1}(y))}{dy}\frac{d(h^{-1}(y))}{dy} =$$
$$= -f_X(h^{-1}(y))\,(h^{-1}(y))'.$$ □

Exerciţiul 5 Fie $X \sim Uniform\,[0, 1]$ şi $Y = 3X$. Care este densitatea de probabilitate a v. a. Y?

Soluţie. X are densitatea de probabilitate dată de

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in [0,1] \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases},$$

$Y = h(X) = 3X$, unde $h(x) = 3x, h'(x) = 3 > 0 \Rightarrow h$ funcţie continuă şi monoton crescătoare, deci bijectivă. Rezultă că

$$F_Y(y) = P(\{Y \leq y\}) = P(\{3X \leq y\}) = P\left(\left\{X \leq \frac{y}{3}\right\}\right) = F_X\left(\frac{y}{3}\right) \Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) =$$
$$\left(F_X\left(\frac{y}{3}\right)\right)' = f_X\left(\frac{y}{3}\right)\frac{1}{3} = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{dacă } y \in [0,3] \\ 0, & \text{în caz contrar.} \end{cases}.$$

De aici rezultă că $Y \sim Uniform\,[0, 3]$.

6.4 Caracteristici numerice ale v. a. continue

Definiţia 6.4.1 *Fie X o v. a. având densitatea de probabilitate f. Definim:*

Media $M[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$

Dispersia $D[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx,$

în ipoteza că integralele respective sunt convergente. La fel se definesc, în ipoteza că integralele respective sunt convergente:

Abaterea medie pătratică $\sigma = \sqrt{D[X]}$,

Momentul de ordin $k, k \geq 1, M\left[X^k\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx$,

Momentul centrat de ordin $k, k \geq 1, D\left[X^k\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^k f(x)dx$.

Observaţia 6.4.2 *Dacă X este o v. a. continuă şi h este o funcţie continuă, ştim că $Y = h(X)$ este o v. a. şi* $M[h(X)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$.

Observaţia 6.4.3 *Momentul centrat de ordinul trei, $D[X^3]$, caracterizează **asimetria** graficului densităţii de probabilitate a v. a. X în raport cu dreapta de ecuaţie $x = M[X]$. Momentul centrat de ordinul patru, $D[X^4]$, îndică modul în care este aplatizat graficul densităţii de repartiţie a lui X, adică dacă acest grafic este mai ascuţit sau mai plat.*

Definiţia 6.4.4 *Se numeşte **mod** al v. a. X acea valoare a v. a. pentru care densitatea de probabilitate are valoare maximă.*

Observaţia 6.4.5 *Dacă X este o v. a. de tip continuu cu densitatea de probabilitate f, atunci $f'(x_m) = 0, f''(x_m) < 0$.*

Definiţia 6.4.6 *Numim **mediana** v. a. X acea valoare $x_{0.5}$ a lui X pentru care*
$P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x_{0.5}\}) = 0.5$.

Această relaţie se poate scrie, dacă cunoştem densitatea de probabilitate, de forma $F(x_{0.5}) = \int\limits_{-\infty}^{x_{0.5}} f(x)dx = 0.5$, adică dreapta $x = x_{0.5}$ împarte aria cuprinsă între graficul lui f şi axa Ox în două părţi egale.

Propoziţia 6.4.7 (Inegalitatea lui Cebâşev) *Dacă variabila aleatoare X este de tip continuu cu media m şi dispersia σ^2, atunci are loc*

$$P(\{|X - m| < \varepsilon\}) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{6.4}$$

sau echivalent

$$P(\{|X - m| \geq \varepsilon\}) < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Demonstraţie. Dispersia este dată de

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{m-\varepsilon} (x-m)^2 f(x)dx + \int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} (x-m)^2 f(x)dx +$$

$$+ \int_{m+\varepsilon}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx.$$

Din faptul că $x \notin (m - \varepsilon, m + \varepsilon)$, rezultă $(x - m)^2 \geq \varepsilon^2$ şi dispersia poate fi minorată prin

$$\sigma^2 \geq \varepsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{m-\varepsilon} f(x)dx + \int_{m+\varepsilon}^{\infty} f(x)dx \right) =$$

$$= \varepsilon^2 \left(1 - \int_{m-\varepsilon}^{m+\epsilon} f(x)dx\right),$$

deoarece $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Ultima paranteză se poate scrie

$$\sigma^2 \geq \varepsilon^2(1 - P(\{|X - m| < \varepsilon\})),$$

care este echivalentă cu relaţia (6.4). □

Exerciţiul 6 Timpul mediu de răspuns al unui calculator este de 15 secunde pentru o anumită operaţie, cu abaterea medie pătratică 3 secunde. Estimaţi probabilitatea ca timpul de răspuns să se abată cu mai puţin de 5 secunde faţă de medie. Vom folosi inegalitatea lui Cebâşev. Avem $P(\{|X - 15| < 5\}) \geq 1 - \frac{9}{25} = 0.64$.

Definiţia 6.4.8 *Şirul* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge în probabilitate*** *către* X *(vom folosi notaţia* $\{X_n\} \xrightarrow{prob} X$*) dacă*

$$\forall\varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0 \tag{6.5}$$

sau, echivalent,

$$\forall\varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P(\{\omega \in \Omega||X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon\}) = 1. \tag{6.6}$$

Corolarul 6.4.9 *Fie* X_n *un şir de v. a. având medie şi dispersie astfel încât* $\lim_{n\to\infty} D[X_n] = 0$. *Atunci* $\{X_n - M[X_n]\} \xrightarrow{prob} 0$ *(convergenţă în probabilitate).*

Demonstraţie. Se spune că şirul de v. a. (X_n) converge în probabilitate către X dacă $\forall\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$.

În cazul acestui corolar avem aplicând inegalitatea lui Cebâşev, $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - M[X_n]| \geq \varepsilon) \leq \frac{D[X_n]}{\varepsilon^2} \to 0$. Rezultatul se obţine aplicând lema cleştelui. □

Teorema 6.4.10 (Legea numerelor mari a lui Bernoulli) *Fie* X_n *un şir de v. a. având aceeaşi medie şi dispersiile egal majorate (adică există* $C > 0$ *astfel încât* $\forall n \geq 1, D[X_n] \leq C$*). Atunci* $\left\{\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)\right\} \xrightarrow{prob} m$ *(în probabilitate).*

Demonstraţie. Ştim că $M[X_i] = m$, $D[X_i] \leq C$. Notăm $Y_n = \dfrac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ şi deoarece v. a. sunt independente avem $M[Y_n] = m$, $D[Y_n] = \dfrac{1}{n^2}D[X_1 + ... + X_n] \leq \dfrac{C}{n} \to 0$. Aplicând Corolarul 6.4.9 rezultă că $Y_n - M[Y_n] = \dfrac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) - m \to 0$ (convergenţă în probabilitate). □

Exemplul 6.4.11 Presupunem că se efectuează serii de experienţe Bernoulli cu $P(A) = p$. Pentru orice n notăm

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{dacă la experimentul } n \text{ se produce } A \\ 0 & \text{dacă la experimentul } n \text{ nu se produce } A \end{cases}.$$

Matricea de repartiţie a lui X_n este

$X_n : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, deci $M[X_n] = p, D[X_n] = p(1-p)$.

Conform legii numerelor mari a lui Bernoulli rezultă că $\frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n) \rightarrow p$. Dar $X_1 + ... + X_n$ reprezintă numărul de apartţii ale lui A după primele n experimente, adică frecvenţa relativă lui A, notată în statistică cu $f_n(A)$, şi deci am arătat că $f_n(A) \xrightarrow{prob} p$, deci un rezultat de stabilitate statistică.