Curs 8

Variabile aleatoare continue

8.1 Funcţia caracteristică

Definiţia 8.1.1 *Fie X o v. a. cu densitatea de probabilitate f. Funcţia*

$$\varphi_X(t) = M\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx,$$

*se numeşte **funcţia caracteristică** corespunzătoare v. a. X.*

Teorema 8.1.2 *Dacă X este o v. a. cu funcţia caracteristică $\varphi_X(t)$, atunci*

1. $\varphi_X(0) = 1$,

2. $\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M[X^n]}{n!}(it)^n, M[X^n] = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{i^n}$, unde $M[X^n]$ reprezintă momentul iniţial de ordin n.

3. Dacă $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$.

4. Dacă X şi Y sunt v. a. independente, atunci $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

Demonstraţie. 1. $\varphi_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i0x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

2. Folosim dezvoltatrea în serie a funcţiei exponenţiale e^{itx} şi se înlocuieşte în definiţia funcţiei generatoare,

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \frac{it}{1!}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + \frac{(it)^2}{2!}\int_{\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx + ... + \frac{(it)^n}{n!}\int_{\infty}^{\infty} x^n f(x)dx + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} M[X^n].$$

3. $\varphi_{aX+b}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itax+itb} f(x) = e^{itb}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itax} f(x) = e^{bt}\varphi_X(at).$

4. $\varphi_{X+Y}(t) = M\left[e^{it(X+Y)}\right] = M\left[e^{itX}e^{itY}\right] = M\left[e^{itX}\right]M\left[e^{itY}\right] = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$, unde am ţinut seama de independenţa v. a. care a permis scrierea relaţiei relativ la medie. □

Exerciţiul 1 Să se determine funcţia caracteristică pentru v. a. $X \in \text{Exp}[\lambda]$.

Soluţie. $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\lambda e^{\lambda x}dx = \lambda\int_{0}^{\infty} e^{(it-\lambda)x}dx = \left.\frac{\lambda e^{(it-\lambda)x}}{it-\lambda}\right|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{it-\lambda}$

deorece $\lambda > 0$ şi $\left|e^{(it-\lambda)x}\right| = \left|e^{itx}\right|\left|e^{-\lambda x}\right| = e^{-\lambda x} \overset{x\to\infty}{\to} 0.$

Exercițiul 2 Să se determine funcția caracteristică pentru v. a. $X \in \text{Gama}\left[p, \lambda\right]$.

Soluție. $\varphi_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(t) dx = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int\limits_{0}^{\infty} e^{itx} x^{p-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int\limits_{0}^{\infty} e^{(it-\lambda)x} x^{p-1} dx.$

Facem schimbarea de variabilă $u = -\left(it - \lambda\right) x$ și obținem

$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u} \frac{u^{p-1}}{(\lambda - it)^p} dx = \frac{\lambda^p}{(\lambda - it)^p}.$

Să calculăm media și dispersia cu ajutorul funcției caracteristice.

$\varphi'_X(t) = \left(\frac{\lambda^p}{(\lambda - it)^p}\right)' = \frac{p\lambda^p j}{(\lambda - it)^{p+1}} \Rightarrow \varphi'_X(0) = \frac{pj}{\lambda} \Rightarrow M\left[X\right] = \frac{p}{\lambda}.$

$\varphi''_X(t) = \frac{p(p+1)\lambda^p j^2}{(\lambda - it)^{p+2}} \Rightarrow M\left[X^2\right] = \frac{p(p+1)}{\lambda^2}$

$D\left[X\right] = M\left[X^2\right] - \left(M\left[X\right]\right)^2 = \frac{p}{\lambda^2}.$

Exercițiul 3 Fie $X \in \text{Pois}[\lambda]$ și $Y \in \text{Pois}[\mu]$, v.a. independente. Demonstrați că $X + Y \in \text{Pois}[\lambda + \mu]$.

Soluție. Determinăm funcția caracteristică a lui $X \in \text{Pois}[\lambda]$.

$$\varphi_X(t) = M[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}.$$

Deoarece v.a. sunt independente,

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)} e^{\mu\left(e^{it}-1\right)} = e^{(\lambda+\mu)\left(e^{it}-1\right)}.$$

Deoarece funcția caracteristică determină complet funcția densitate de probabilitate

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt,$$

rezultp că $X + Y \in \text{Pois}[\lambda + \mu]$.

Exercițiul 4 Determinați funcția caracteristică pentru v.a. $X \in N[0, 1]$.

Soluție. Avem

$$\varphi_X(t) = M[e^{itX}] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $y = \frac{x-m}{\sigma}$, obținem

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(m+\sigma y)} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy = \frac{e^{itm}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2 - 2ity\sigma + i^2t^2\sigma^2}{2}} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} dy$$
$$= \frac{e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}},$$

deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}.$$

În cazul $X \in N[0, 1]$, obținem

$$\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Cunoscând funcţia caracteristică, putem calcula

$$M[X] = \frac{\varphi'_X(0)}{i} = m, \quad M[X^2] = \frac{\varphi''_X(0)}{i^2} = m^2 + \sigma^2,$$
$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = \sigma^2.$$

Exerciţiul 5 Fie. $X \in N[m_1, \sigma_1]$ şi $Y \in N[m_2, \sigma_2]$ două v.a. independente. Atunci $X+Y \in N[m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}]$.

Soluţie. Obţinem

$$\varphi_X(t) = e^{itm_1 - \frac{t^2\sigma_1^2}{2}}, \quad \varphi_X(t) = e^{itm_2 - \frac{t^2\sigma_2^2}{2}},$$
$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_X(t) = e^{itm_1 - \frac{t^2\sigma_1^2}{2}} \cdot e^{itm_2 - \frac{t^2\sigma_2^2}{2}}$$
$$= e^{it(m_1+m_2) - \frac{t^2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}^2}{2}}.$$

Exerciţiul 6 Dacă $X_1, ..., X_n \in N[m, \sigma]$ sunt v.a. independente, atunci $X_1 + ... + X_n \in N[m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$.

Soluţie. Găsim ca mai sus că

$$\varphi_{X_1+...+X_n}(t) = e^{itnm - \frac{t^2 n\sigma^2}{2}}.$$

Folosind Teorema 8.1.2, punctul 3, rezultă

$$\varphi_{\frac{1}{n}(X_1+...+X_n)}(t) = \varphi_{X_1+...+X_n}(\frac{t}{n}) = e^{itm - \frac{t^2}{2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2}.$$

Exerciţiul 7 Să se determine funcţia caracteristică pentru v. a. $X \in \chi^2(n)$.

Soluţie. $\varphi_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\int\limits_0^{\infty} e^{itx} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\int\limits_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1-2itx}{2}} dx.$

Facem schimbarea de variabilă $u = \frac{1-2it}{2}x$ şi obţinem $x = \frac{2}{1-2it}u$, $dx = \frac{2}{1-2it}du$, deci

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{2}{1-2it}u\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-u} \frac{2}{1-2it} du$$
$$= \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\int\limits_0^{\infty} u^{\frac{n}{2}-1} e^{-u} du = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}}.$$

La distribuţia $\chi^2(n)$ se poate ajunge pornind de la distribuţii normale.

Propoziţia 8.1.3 *Fie n v.a. independente $X_1, ..., X_n \in N[0,1]$ şi $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$. Atunci $Y \in \chi^2(n)$.*

Demonstraţie. Fie F_i funcţia de repartiţie a v.a. X_i^2. Avem

$$F_i(x) = P\left(X_i^2 \le x\right) = P(-\sqrt{x} \le X_i \le \sqrt{x})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Prin derivare determinăm densităţile de probabilitate ale lui X_i^2.

$$f_i(x) = F_i'(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}},$$

deci $X_i^2 \in \chi^2(1)$.

Deoarece $X_1^2, ..., X_n^2$ sunt independente, rezultă că

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1^2+...+X_n^2}(t) &= \varphi_{X_1^2}(t) \cdot ... \cdot \varphi_{X_n^2}(t) = (1+2it)^{-\frac{1}{2}} \cdot ... \cdot (1+2it)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (1+2it)^{-\frac{n}{2}},\end{aligned}$$

care este tocmai funcţia caracteristică a unei v.a. care urmează o distribuţie hi-pătrat cu n grade de libertate. □

8.2 Variabile aleatoare bidimensionale

Definiţia 8.2.1 *Se numeşte* vector aleator n-dimensional *orice n-uplu $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ având cele n componente, X_1, X_2, $\ldots$, X_n, variabile aleatoare.*

Presupunem că avem două v. a. X_1 şi X_2

Definiţia 8.2.2 *1) Fie un vec. a. bidimensional $X = (X_1, X_2)$. Se numeşte* funcţie de repartiţie *a lui X funcţia reală*

$$F_X : \mathbb{R}^2 \to [0,1], \quad F_X(x,y) = P(X_1 \le x, X_2 \le y).$$

2) Vec. a. bidimensional $X = (X_1, X_2)$ se numeşte continuu *cu* densitatea de probabilitate *$f_X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dacă funcţia de repartiţie $F_X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este continuă şi derivabilă pe porţiuni şi*

$$f_X(x,y) = \frac{\partial^2 F_X(x,y)}{\partial x \, \partial y}.$$

Teorema 8.2.3 *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1. $F_X(x,y)$ este monoton crescătoare în raport cu fiecare variabilă,

2. $F_X(x,y)$ este continuă la dreapta în raport cu fiecare variabilă,

3. $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty,\\ y\to-\infty}} F_X(x,y) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to\infty,\\ y\to\infty}} F_X(x,y) = 1$.

Teorema 8.2.4 *Fie vec. a. bidimensional $X = (X_1, X_2)$ cu densitatea de probabilitate f_X. Atunci:*

a) $f_X(x,y) \ge 0, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x,y)dx\,dy = 1$,

c) $F_X(x,y) = P(X_1 \le x, X_2 \le y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_X(u,v)du\,dv$

sau pentru orice domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$P((X_1, X_2) \in D) = \iint_D f_X(x,y)dx\,dy$$

d) dacă $a \le b$ şi $c \le d$ atunci

$$P(a < X_1 \le b, c < X_2 \le d) = F_X(b,d) - F_X(a,d) - F_X(b,c) + F_X(a,c)$$

sau

$$P(a < X_1 \le b, c < X_2 \le d) = \int_a^b \int_c^d f_X(x,y)dxdy.$$

Definiţia 8.2.5 *Fie vec. a. bidimensional $X = (X_1, X_2)$ şi $f_X(x,y)$ densitatea sa de probabilitate. Funcţiile*

$$f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x,y)dy, \quad f_{X_2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x,y)dx$$

se numesc densităţi de probabilitate marginale.

Definiţia 8.2.6 *Fie vec. a. bidimensional $X = (X_1, X_2)$ şi $f_X(x,y)$ densitatea sa de probabilitate, iar $f_{X_1}(x)$ şi $f_{X_2}(y)$ densităţile de probabilitate marginale. Variabilele aleatoare X_1 şi X_2 sunt* independente *dacă*

$$f_X(x,y) = f_{X_1}(x) f_{X_2}(y), \quad \forall x, y.$$

8.2.1 Distribuţia câtului a două v. a. continue

Teorema 8.2.7 *Să se calculeze densitatea de probabilitate a câtului a două v. a. continue. Să se particularizeze în cazul în care cele două v. a. sunt independente.*

Demonstraţie. Fie X_1 şi X_2 două v. a., $X_2 \neq 0$, care au densităţile de probabilitate f_1 respectiv f_2 şi $f_X(x,y)$ densitatea de probabilitate a vectorului $X = (X_1, X_2)$. Notăm cu $Z = \dfrac{X_1}{X_2}$ iar h respectiv H densitatea de probabilitate, respectiv funcţia de repartiţie a lui Z.

Conform definiţiei funcţiei de repartiţie avem: $\forall z \in \mathbb{R}$,

$$H(z) = P(Z \le z) = \int\limits_{y>0} \int\limits_{x<zy} f_X(x,y)dxdy + \int\limits_{y<0} \int\limits_{x>zy} f_X(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{zy} f_X(x,y)dxdy + \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{zy}^{\infty} f_X(x,y)dxdy.$$

Prin derivare în raport cu z găsim

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \, f_X(zy,y)dy.$$

În particular, pentru X_1 şi X_2 independente găsim

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y| \, f_{X_1}(zy) f_{X_2}(y)dy. \qquad \square$$

Teorema 8.2.8 *Fie v. a. $X \in N[0,1]$ şi $Y \in \chi^2(n)$. Atunci*

$$Z = \frac{X}{\sqrt{Y/\sqrt{n}}} \in T(n).$$

Rezolvare. Avem

$$F_{\sqrt{\frac{Y}{n}}}(y)=\begin{cases} P\left(\sqrt{\frac{Y}{n}}<y\right)=P\left(Y<y^2n\right)=F_Y\left(y^2n\right), & \text{pentru } y>0\\ 0, & \text{pentru } y\le 0.\end{cases}$$

Rezultă că densitatea de probabilitate a lui $\sqrt{\frac{Y}{n}}$ este

$$\begin{aligned} f_{\sqrt{\frac{Y}{n}}}(y) &= \frac{d}{dy}F_{\sqrt{\frac{Y}{n}}}(y)=2nyF'_Y(y^2n)=\\ &=2nyf_Y\left(y^2n\right)=\frac{2ny}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(y^2n\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y^2n}{2}}, \end{aligned}$$

deci

$$f_{\sqrt{\frac{Y}{n}}}(y)=\begin{cases} \dfrac{2ny}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(y^2n\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y^2n}{2}}, & \text{pentru } y>0\\ 0, & \text{pentru } y\le 0.\end{cases}.$$

Pentru $Z=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ avem densitatea de probabilitate, conform Teoremei 8.2.7,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty}|y|\,f_X(zy)f_{\sqrt{\frac{Y}{n}}}(y)dy=\\ &=\int_0^{\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(zy)^2}{2}}\frac{2ny}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(y^2n\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y^2n}{2}}dy=\\ &=\frac{2\,(n)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}y^ne^{-\frac{\left(z^2+n\right)y^2}{2}}dy. \end{aligned}$$

Facem schimbarea de variabilă $\frac{\left(z^2+n\right)y^2}{2}=u$, $y=u^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{z^2+n}}$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{2\,(n)^{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{z^2+n}}\right)^{n+1}}{2^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}2}\int_0^{\infty}e^{-u}u^{\frac{n+1}{2}-1}du=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\frac{z^2+n}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}},\\ f_Z(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \end{aligned}$$

Recunoaştem în expresia acestei funcţii densitatea de probabilitate a v.a. distribuite Student.□

8.2.2 Aplicaţii în statistică

Teorema 8.2.9 *Fie v.a. $X_1,...,X_n\in N(m,\sigma)$ şi*

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\left(X_1+...+X_n\right),\quad \textit{media de selecţie}$$

$$S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2,\quad \textit{dispersia de selecţie modificată.}$$

Atunci

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\in\chi^2(n-1).$$

Demonstraţie. Observăm că

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-m}{\sigma}\right)^2-\left(\frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2.$$

Cum $X_i \in N(m,\sigma)$, reyultă $\dfrac{X_i-m}{\sigma} \in N(0,1)$ şi deci $\left(\frac{X_i-m}{\sigma}\right)^2 \in \chi^2(1)$. Rezultă

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-m}{\sigma}\right)^2 \in \chi^2(n).$$

În plus, cum $\varphi_{X_i}(t)=e^{itm-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$, $\forall i=\overline{1,n}$, rezultă

$$\varphi_{\overline{X}}(t)=\varphi_{\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}}(t)=\varphi_{X_1+\ldots+X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\left[\varphi_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n=e^{itm-\frac{t^2(\sigma/\sqrt{n})2}{2}}.$$

Deci,

$$\overline{X}\in N\left(m,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\iff\frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}\in N(0,1)\Rightarrow\left(\frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\in\chi^2(1).$$

Rezultă, notând

$$U:=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2},\ V:=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-m}{\sigma}\right)^2,\ W:=\left(\frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2,$$

că $V=U+W$, deci

$$\varphi_V(t)=\varphi_U(t)\cdot\varphi_W(t),$$

adică

$$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{n}{2}}}=\varphi_U(t)\cdot\frac{1}{(1-2it)^{\frac{1}{2}}}.$$

În final,

$$\varphi_U(t)=\frac{1}{(1-2it)^{\frac{n-1}{2}}},$$

deci

$$U=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\in\chi^2(n-1).$$

□

Teorema 8.2.10 *Fie $X_1,...,X_n \in N(m,\sigma)$. Atunci*

$$\frac{\overline{X}-m}{S/\sqrt{n}}\in T(n-1).$$

Demonstraţie. Observăm că

$$\frac{\overline{X}-m}{S/\sqrt{n}}=\frac{\frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}}.$$

Notăm $U:=\frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}\in N(0,1)$ şi $V:=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\in\chi^2(n-1)$ (vezi Teorema 8.2.9). Avem deci

$$\frac{\overline{X}-m}{S/\sqrt{n}}=\frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}},$$

deci folosind Teorema 8.2.8, rezultă concluzia. □