Curs 9

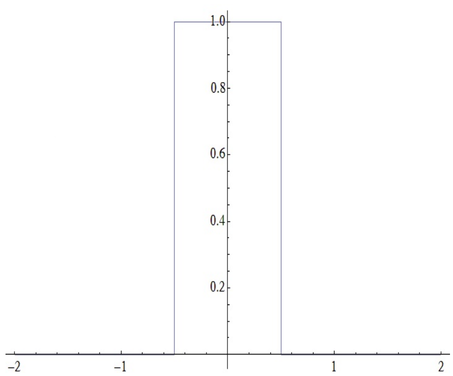
Teorema Limită Centrală

9.1 Teorema Limită Centrală

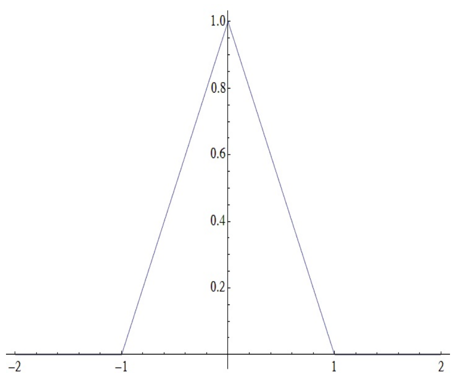
9.1.1 Enunţ

Teorema Limită Centrală (TLC) este una dintre cele mai importante teoreme din teoria probabilităţilor. Intuitiv, torema afirmă că suma unui număr mare de v. a. independente, identic distribuite, standardizate poate fi aproximată de o distribuţie normală. Rezultă importanţa acestei distribuţii, deşi densitatea sa de probabilitate are o formă care pare complicată. Teorema limită centrală mai poartă denumirea de miracolul lui Gauss.

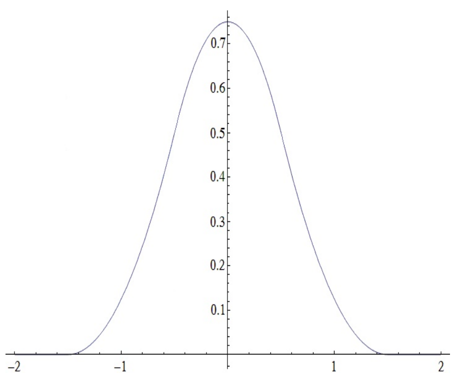
Pentru a realiza acest lucru, să considerăm densitatea de probabilitate a sumei a n variabile independente, de tipul Unif $[-0.5, 0.5]$. Obţinem următoarele:



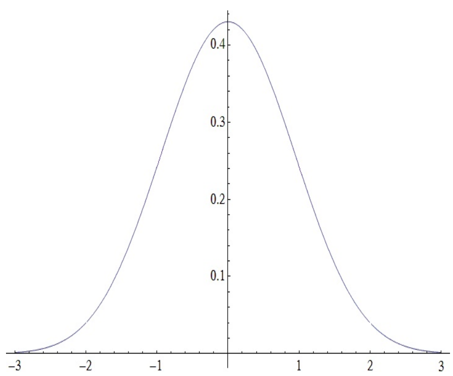
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



$n = 10$

Dacă vom compara aceste grafice cu graficul unei densităţi de probabilitate a unei v.a. normal distribuite, vom observa asemănarea remarcabilă chiar pentru n destul de mic.

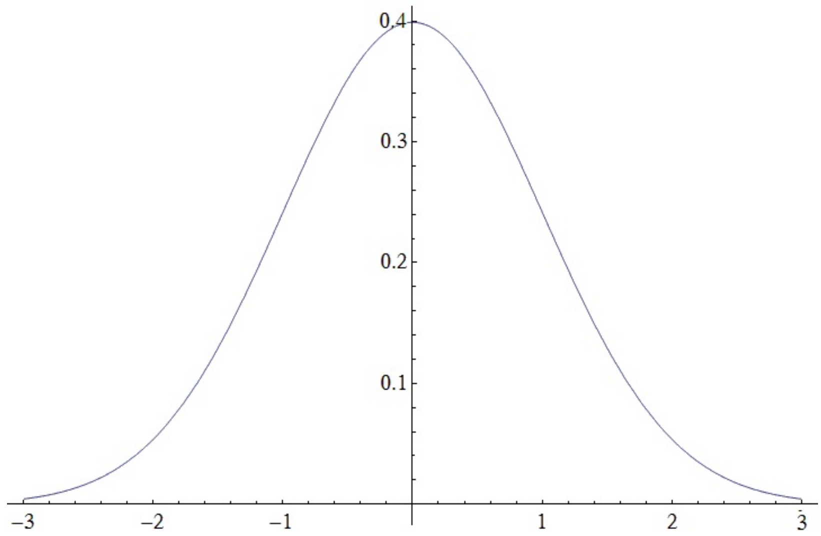


Figura 9.1: Distribuţia normală standard

Acest lucru ne conduce intuitiv la ideea că suma variabilelor aleatoare se comportă, într-un anumit sens, normal. Exact Teorema Limită Centrală formalizează acest lucru.

Fie $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ un şir de v. a. independente şi identic distribuite cu $M[X_i] = m$ şi $D[X_i] = \sigma^2, i \geq 1$. Fie $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ şi $M_n = \frac{1}{n} S_n$. Teorema limită centrală dă informaţii asupra v. a.

$Z_n = \dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \dfrac{n(M_n - m)}{n\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{M_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\dfrac{M_n - m}{\sigma}.$

Deoarece $M[M_n] = m, D[M_n] = \dfrac{\sigma^2}{n}$, deducem că $M[Z_n] = 0$ şi $D[Z_n] = 1$. Aceată v. a. se numeşte standardizată, deci şirul Z_n este versiunea standardizată a şirului M_n.

Înainte de a demonstra Teorema Limită Centrală, avem nevoie de următoarele preliminarii, ce rezultă din dezvoltările Taylor ale funcţiei exponenţiale:

1. Dacă $u \geq 0$, atunci

$$0 \leq e^{-u} - 1 + u \leq \frac{u^2}{2}. \tag{9.1}$$

2. Dacă $t \in \mathbb{R}$, atunci

$$\left|e^{it} - 1 - it\right| \leq \frac{|t|^2}{2} \text{ şi } \left|e^{it} - 1 - it - \frac{(it)^2}{2}\right| \leq \frac{|t|^3}{6}. \tag{9.2}$$

De asemenea, vom folosi următorul rezultat:

Teorema 9.1.1 (Teorema convergenţei dominate) *Fie (f_n) un şir de funcţii, convergente punctual la o funcţie f, f_n continue cu excepţia unui număr finit de puncte şi dominate de o funcţie integrabilă g :*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx < \infty.$$

Atunci f este integrabilă şi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Înainte de a formula TLC, avem nevoie de definiţia convergenţei în distribuţie.

Definiţia 9.1.2 *Spunem că şirul (X_n) de v.a.* ***converge în distribuţie*** *la v.a. X şi notăm $X_n \xrightarrow{d} X$ dacă*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$ de continuitate a lui F_X.

Formulăm acum un alt rezultat util, ce permite simplificarea demonstraţiei TLC.

Teorema 9.1.3 (Teorema de continuitate a lui Lévy) *Fie (X_n) un şir de v.a. astfel încât şirul funcţiilor caracteristice corespunzătoare φ_{X_n} converge punctual la o funcţie φ. Atunci*

$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \varphi = \varphi_X.$$

Teorema 9.1.4 (Teorema Limită Centrală) *Fie (X_n) un şir de v.a. independente, identic distribuite, standardizate ($M[X_i] = 0$ şi $D[X_i] = 1$). Atunci, pentru orice $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

adică $\frac{X_1+...+X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z$, unde $Z \in N[0,1]$.

Demonstraţie. Notăm cu $S_n = X_1 + ... + X_n$. Fie φ_{X_k} funcţia caracteristică a lui X_k, care este aceeaşi pentru fiecare k (i.i.d.), deci o putem nota cu φ. Atunci, pentru orice $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = M\left[e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right] = \prod_{k=1}^{n} M\left[e^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right] = \left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n.$$

Rămâne de arătat, folosind Teorema de continuitate a lui Levy, că

$$\lim_{n\to\infty}\left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

deoarece am arătat mai sus că funcţia caracteristică a v.a. normale standard este de tipul $e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Dacă $t = 0$, nu avem nimic de demonstrat. Presupunem $t \neq 0$. Avem

$$\begin{aligned}\left|\left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| &= \left|\left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n - \left[e^{-\frac{t^2}{2n}}\right]^n\right| \\ &\leq n\left|\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right|, \end{aligned} \tag{9.3}$$

deoarece $\left|\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \leq 1$ şi $0 \leq e^{-\frac{t^2}{2n}} \leq 1$.

Urmează

$$n\left|\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right| \leq n\left|\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)\right| + n\left|\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right) - e^{-\frac{t^2}{2n}}\right|.$$

Folosind (9.1) pentru $u = \frac{t^2}{2n}$, obţinem

$$n\left|\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)-e^{-\frac{t^2}{2n}}\right| \leq n\frac{t^4}{8n^2}=\frac{t^4}{8n} \to 0 \text{ pentru } n\to\infty. \tag{9.4}$$

Pentru primul modul,

$$\begin{aligned} n\left|\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)\right| &= n\left|M\left[e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X}-\left(1+i\frac{t}{\sqrt{n}}X+i^2\frac{t^2}{2n}X^2\right)\right]\right| \\ &\leq n\cdot M\left[\left|e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X}-\left(1+i\frac{t}{\sqrt{n}}X+i^2\frac{t^2}{2n}X^2\right)\right|\right], \end{aligned} \tag{9.5}$$

deoarece $M[X]=0$ şi $M[X^2]=D[X]=1$.

Pe de o parte, folosind prima relaţie din (9.2), obţinem

$$\begin{aligned} &\left|e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X}-\left(1+i\frac{t}{\sqrt{n}}X+i^2\frac{t^2}{2n}X^2\right)\right| \leq \left|e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X}-\left(1+i\frac{t}{\sqrt{n}}X\right)\right|+\frac{t^2}{2n}X^2 \\ &\leq \frac{t^2}{2n}X^2+\frac{t^2}{2n}X^2=\frac{t^2}{n}X^2. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, folosind a doua relaţie din (9.2), obţinem

$$\left|e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X}-\left(1+i\frac{t}{\sqrt{n}}X+i^2\frac{t^2}{2n}X^2\right)\right| \leq \frac{|t|^3|X|^3}{6n^{3/2}}.$$

Pentru orice $\delta>0$ şi $n\in\mathbb{N}^*$, definim

$$A := A(\delta,n) := \left\{|X|>\delta\sqrt{n}\right\}$$

şi funcţia caracteristică a mulţimii A,

$$I_A(x)=\begin{cases} 1, & \text{dacă } x\in A \\ 0, & \text{în rest.}\end{cases}$$

Atunci

$$\left|e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X}-\left(1+i\frac{t}{\sqrt{n}}X+i^2\frac{t^2}{2n}X^2\right)\right| \leq \frac{t^2}{n}X^2I_A+\frac{|t|^3|X|^3}{6n^{3/2}}I_{A^c}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} &n\cdot M\left[\left|e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}X}-\left(1+i\frac{t}{\sqrt{n}}X+i^2\frac{t^2}{2n}X^2\right)\right|\right] \leq n\frac{t^2}{n}M\left[X^2I_A\right]+n\frac{|t|^3}{6n^{3/2}}M\left[|X|^3I_{A^c}\right] \\ &=t^2M\left[X^2I_A\right]+\frac{|t|^3}{6n^{1/2}}M\left[|X|^3I_{A^c}\right]. \end{aligned} \tag{9.6}$$

Cum $|X|\leq\delta\sqrt{n}$ pe A^c, rezultă

$$M\left[|X|I_{A^c}\right] \leq \delta\sqrt{n}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}I_{A^c}\cdot f_X(x)dx}_{\leq 1},$$

de unde

$$M\left[|X|^3I_{A^c}\right] \leq M\left[X^2\right]\cdot M\left[|X|I_{A^c}\right] \leq \delta\sqrt{n}.$$

Deci,
$$\frac{|t|^3}{6n^{1/2}} M\left[|X|^3 I_{A^c}\right] \leq \frac{|t|^3 \delta}{6}.$$
De asemenea,
$$M\left[X^2 I_A\right] = 1 - M\left[X^2 I_{\{|X| \leq \delta\sqrt{n}\}}\right].$$
Cum şirul de funcţii $f_n := X^2 I_{\{|X| \leq \delta\sqrt{n}\}} f_X$ este crescător, cu limita punctuală $f = X^2 f_X$, care este integrabilă ($M[X^2] = 1$), rezultă aplicând Teorema convergenţei dominate că $\lim\limits_{n\to\infty} M\left[X^2 I_{\{|X| \leq \delta\sqrt{n}\}}\right] = M[X^2] = 1$.

Fie acum $\varepsilon > 0$. Fie $\delta > 0$ astfel încât $\frac{|t|^3\delta}{6} < \frac{\varepsilon}{4}$. Alegem de asemenea $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, să avem $\frac{t^4}{8n} < \frac{\varepsilon}{4}$ şi $t^2 M[X^2 I_A] < \frac{\varepsilon}{2}$. Va rezulta, combinând relaţiile (9.3)-(9.6), că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$,
$$\left|\left[\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n - e^{-\frac{t^2}{2}}\right| < \varepsilon,$$
ceea ce era de demonstrat. □

Alte variante ale teoremei limită centrală sunt următoarele:

Teorema 9.1.5 (TLC1) *Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de v. a. independente şi identic distribuite (i.i.d.) cu $M[X_i] = m$ şi $D[X_i] = \sigma^2, i \geq 1$. Atunci pentru orice numere reale $a < b$, avem*
$$\lim_{n\to\infty} P(\{a \leq Z_n \leq b\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx. \tag{9.7}$$

Teorema 9.1.6 (TLC2) *Fie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de v. a. independente distribuite cu $M[X_i] =$ şi $D[X_i] = \sigma_i^2, i \geq 1$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2$. Atunci pentru orice numere reale $a < b$, avem*
$$\lim_{n\to\infty} P(\{a \leq Z_n \leq b\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

9.1.2 Aplicaţii ale Teoremei Limită Centrală

Aplicaţie la sondaje de opinie

Exerciţiul 1 Presupunem că se realizează experimente de tip Bernoulli în care un eveniment A se produce cu probabilitatea p. Notăm cu X_k variabila aleatoare care ia valoarea 1 dacă la experienţa cu numărul de ordine k se produce evenimentu A şi 0 dacă nu se produce A. Variabilele aleatoare $(X_k)_{k\geq 1}$ sunt independente. Atunci $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ reprezintă numărul total de apariţii ale lui A, deci numărul de succese ale lui A în urma efectuării a n experienţe. S_n este o v. a. repartizată binomial, $S_n \in Bi(n,p)$. V. a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au aceeaşi repartiţie (binomială).

Notăm cu $Z_n = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$. Conform teoremei limită centrală rezultă că pentru orice $a < b$ şi n suficient de mare,
$$P(\{a \leq Z_n \leq b\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Pentru orice $\alpha < \beta$, avem $\alpha \leq S_n \leq \beta$ dacă şi numai dacă $\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}} \leq Z_n \leq \frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}$. Notând $\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}} = a$, $\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}} = b$, rezultă că

$$P\left(\{\alpha \leq S_n \leq \beta\}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

şi deci

$$P\left(np + a\sqrt{npq} \leq S_n \leq np + b\sqrt{npq}\right) \cong \Phi(b) - \Phi(a).$$

În particular, pentru $a = -b$ $(b > 0)$ rezultă formula

$$P\left(\{np - b\sqrt{npq} \leq S_n \leq np + b\sqrt{npq}\}\right) \cong 2 \cdot \Phi(b) - 1, \tag{9.8}$$

pentru $n >> 1$ (unii statisticieni recomandă $npq \geq 10$).

Această formulă este utilizată în sondaje astfel: considerăm o populaţie statistică umană căreia îi cerem opinia într-o anumită chestiune: ce echipă de fotbal, ce partid, ce televiziune etc. preferă. Nu toată lumea poate fi consultată şi atunci se realizează un sondaj pe eşantioane restrânse, alese cu obiectivitate. Să presupunem că se consultă n persoane şi notăm cu S_n numărul de persoane care se pronunţă pentru (succes); se determină parametrul p ca fiind frecvenţa de succes. Pentru $b = 2.17$ avem $\Phi(b) = 0.985$ deci $2 \cdot \Phi(b) - 1 = 0.97$ şi conform (9.8), se realizează cu eroare sub 3% evenimentul $S_n \in \left[np - 2.17\sqrt{npq} \leq S_n \leq np + 2.17\sqrt{npq}\right]$; apoi pentru $b = 1.96$ avem $2 \cdot \Phi(b) - 1 = 0.952$ şi conform (9.8), se realizează cu eroare sub 5% evenimentul

$$S_n \in \left[np - 1.96\sqrt{npq} \leq S_n \leq np + 1.96\sqrt{npq}\right].$$

Exerciţiul 2 Dintr-un sondaj realizat într-un oraş a rezultat că dintr-un eşantion de 1000 votanţi 600 ar vota cu partidul X. Cu o eroare de sub 3% să se estimeze câti dintre cei 1,2 milioane de votanţi ar vota pentru X.

Soluţie. Avem $p = \frac{600}{1000} = 0.6$ şi $q = 0.4, n = 1200000$ şi luăm $b = 2.17$, deci numărul cerut este cuprims între $np - 2.17\sqrt{npq}$ şi $np + 2.17\sqrt{npq}$ deci între

$$1200000 \cdot 0.6 - 2.17\sqrt{1200000 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = 7188\,40$$

şi

$$1200000 \cdot 0.6 + 2.17\sqrt{1200000 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = 721160.$$ □

Aproximarea legii binomiale printr-o lege normală

Fie X o v. a. discretă repartizată binomial cu parametrii p şi n.(deci $M[X] = np, D[X] = npq$ şi $k \in N, k \leq n$. Să se calculeze $P(\{X = k\})$ şi $P(\{X \leq k\})$ folosind teorema limită centrală (pentru n suficient de mare şi pq nu foarte mic).

Conform teoremei limită centrală $X \in N(np, npq)$ şi deci

$$\begin{aligned} P(\{X = k\}) &= P\left(\left\{X \in \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]\right\}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right). \end{aligned}$$

Adăugarea lui 0.5 la k se numeşte corecţie prin continuitate. A fost pentru îmbunătăţirea aproximaţiei.

La fel

$$P(\{X \leq k\}) = P\left(\left\{X \leq k + \frac{1}{2}\right\}\right) = \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Exerciţiul 3 Se aruncă o monedă şi probabilitatea de a obţine banul este 0.6. Se aruncă moneda de 1000 ori. Care este probabilitatea de a obţine banul de 650 de ori?

Soluţie. Fie X v. a. care ia ca valori numărul de apariţii ale banului în cele 1000 de aruncări. Evident $X \in \text{Binomial}\,[10000; 0.6]$. Conform teoremei limită centrală $X \in N(600, 240)$.

$$\begin{aligned}P(\{X = 650\}) &= P\left(\left\{X \in \left[650 - \frac{1}{2}, 650 + \frac{1}{2}\right]\right\}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{650 + \frac{1}{2} - 600}{\sqrt{240}}\right) - \Phi\left(\frac{650 - \frac{1}{2} - 600}{\sqrt{240}}\right)\\ &= \Phi(3.25) - \Phi(3.19) = 0.999423 - 0.999289 = 0.000134.\end{aligned}$$

□

O v. a. distribuită binomial se aproximează cu o v. a. distribuită normal dacă $np > 5, nq > 5$.

Aproximarea legii Poisson printr-o lege normală

Fie X o v. a. discretă repartizată Poisson cu parametru λ. Atunci $M[X] = \lambda, D[X] = \lambda$. Conform teoremei limită centrală $X \in N(\lambda, \lambda)$. Să se calculeze $P(\{X = k\})$ şi $P(\{X \leq k\})$ pentru k număr natural.

$$P(\{X = k\}) = P\left(\left\{X \in \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]\right\}\right) = \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - \Phi\left(\frac{k - \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

La fel,

$$P(\{X \leq k\}) = P\left(\left\{X \leq k + \frac{1}{2}\right\}\right) = \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Aproximarea este bună dacă $\lambda > 5$.

Exerciţiul 4 Statistica arată că la o unitate de asigurări se primesc în medie 300 de reclamaţii pe an. Fie X numărul de reclamaţii pe an, presupus repartizat Poisson. Să se determine probabilitatea ca să primească cel puţin 351 de reclamaţii pe an.

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned}P(\{X \geq 351\}) &= 1 - P(\{X \leq 351\}) = 1 - \Phi\left(\frac{351.5 - 300}{\sqrt{300}}\right)\\ &= 1 - \Phi(2.9734) = 1 - 0.99853 = 0.001\,47.\end{aligned}$$

□